Matemáticas 11

Proyecto **Los Caminos del Saber**

AUTORES

Lida Buitrago García
Oscar Oswaldo Benavides Velásquez
Andrea Constanza Perdomo Pedraza
José Omar Castaño León
Doys Jeanette Morales Jaime
Jeinsson Giovanni Gamboa Sulvara

SANTILLANA

Matemáticas 11 para educación media, es una obra colectiva concebida, diseñada y creada por el Departamento Editorial de Santillana S. A., bajo la dirección de **Fabiola Nancy Ramírez Sarmiento**.

EQUIPO EDITORIAL

Diana Constanza Salgado Ramírez. *Editora ejecutiva*
Carlos David Sánchez. *Editor júnior*
Edgar Alexander Olarte Chaparro. *Editor júnior*
Daniel Rojas Ruiz. *Editor de contenidos digitales*
Juan Gabriel Aldana Álvarez. *Asistente editorial*
Óscar Fernando Cruz Castañeda, Isabel Hernández Ayala. *Revisores de contenidos*

AUTORES

Lida Buitrago García
Licenciada en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Ingeniera Eléctrica, Universidad Nacional de Colombia.

Andrea Constanza Perdomo Pedraza
Magíster en edición. Universidad de Salamanca, España. Licenciada en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Dorys Jeannette Morales Jaime
Doctora en Ingeniería Informática. Universidad Pontificia de Salamanca. Especialista en Enseñanza de la Matemática. Universidad de Cundinamarca.

Oscar Oswaldo Benavides Velásquez
Maestría en Matemáticas Aplicadas. Universidad EAFIT. Licenciado en Física. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

José Omar Castaño León
Licenciado en física. Universidad Pedagógica Nacional. Estudios de Maestría en Dirección y Gestión de Instituciones Educativas. Universidad de la Sabana.

Jeinsson Giovanni Gamboa Sulvara
Licenciado en Física. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

El especialista encargado de avalar este texto desde el punto de vista de la disciplina específica y desde su pedagogía fue José Edilberto Robles Castro. *Licenciado en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Magíster en Ciencias Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia.*

La especialista encargada de avalar este texto desde la equidad de género y de su adecuación a la diversidad cultural fue María Ivonne Wilches Mahecha. *Psicóloga. Universidad Nacional de Colombia. Magíster en estudios de género. Universidad Nacional de Colombia.*

Se han hecho todos los esfuerzos para ubicar a los propietarios de los derechos de autor. Sin embargo, si es necesario hacer alguna rectificación, la Editorial está dispuesta a hacer los arreglos necesarios.

EQUIPO GRÁFICO Y TÉCNICO

Iván Merchán Rodríguez. *Coordinador de arte creativo y diseñador del modelo gráfico*
Pep Carrió. *Creador gráfico de las carátulas*
Mauricio García Duque. *Coordinador de contenidos digitales*
Martha Jeanet Pulido Delgado, Orlando Bermúdez Rodríguez. *Correctores de estilo*
Alveiro Javier Bueno Aguirre. *Analista de soporte técnico*
Luis Nelson Colmenares Barragán. *Documentalista y operador de escáner*
Claudia Marcela Jaime Tapia, Lady Midlennis Sánchez Yopazá. *Asistentes de documentación*
Sandra Patricia Acosta Tovar, Juan Carlos López Gómez, César Alfonso Murillo Díaz. *Diseñadores*
Teresa Alcira Vanegas Chaves, Sandra Ballén. *Digitadoras*
Diomedes Guilombo Ramírez, Edwin Hernando Cruz Delgado, Danilo Ramírez Parra, Juan Wiesner. *Ilustradores*
Carlos Valle . *Fotógrafo*
Repositorio Santillana, Archivo Santillana, Getty images, Corel professional Photos, Images provided by Photodisc, Inc., Corbis Images, Archivo Santillana. *Fotografía*
Francisco Rey González. *Jefe de producción*

Debido a la naturaleza dinámica de la Internet, las direcciones y los contenidos de los sitios web, a los que se hace referencia en este libro, pueden sufrir modificaciones o desaparecer. El uso de Internet debe ser supervisado por los padres de familia, tutores y docentes.

Carrera 11A No. 98-50
Bogotá, Colombia
ISBN 978-958-24-2267-7 Obra completa
ISBN 978-958-24-2352-0 Edición para el alumno
ISBN 978-958-24-2353-7 Edición para el docente

Este libro está elaborado de acuerdo con las normas ICONTEC NTC-4724 y NTC-4725 para textos escolares.
Depósito legal en trámite.
Impreso en Colombia por Prensa moderna Impresores S.A.

SANTILLANA

PRESENTACIÓN DEL MODELO

Proyecto Los Caminos del Saber

Es un **programa de educación** que te ofrece múltiples recursos, impresos y digitales, para que adquieras conocimientos y desarrolles habilidades que te permitan enfrentar los retos del futuro.

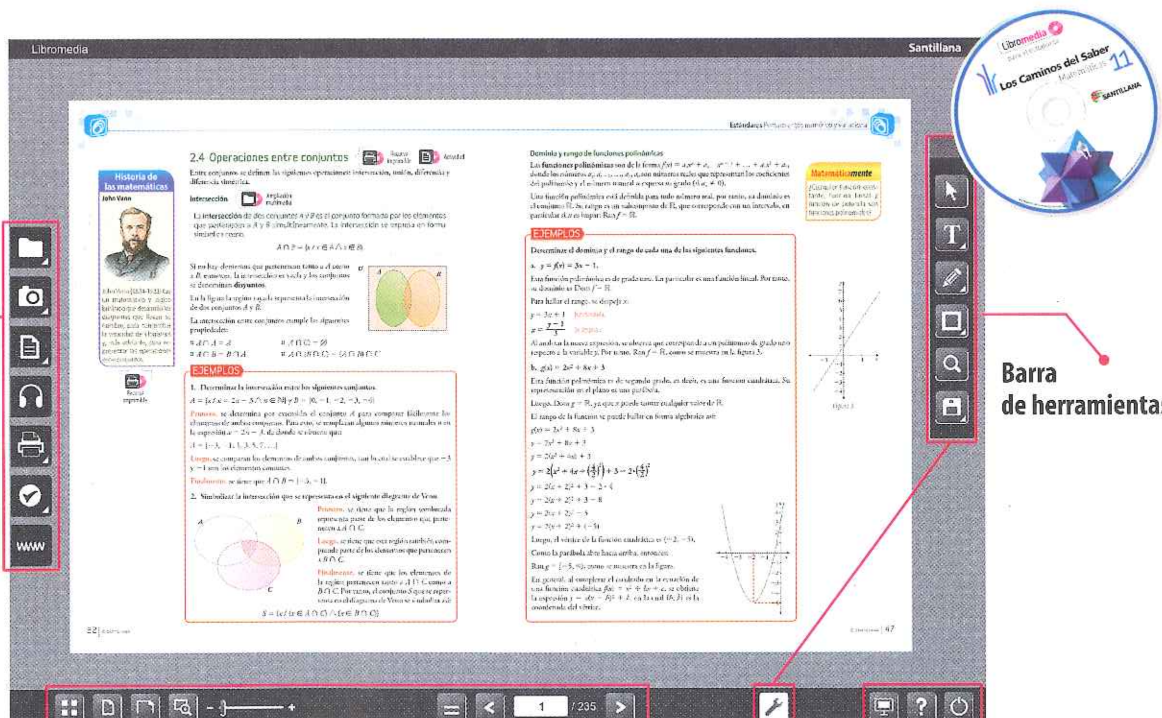
¿Qué te ofrece el programa para el área de Matemáticas?

Un libro del estudiante
que responde a las exigencias planteadas por el MEN y promueve el desarrollo de tus competencias.

Un sitio Web
www.santillanaplus.com.co con más recursos ***interactivos*** y ***multimedia*** que agregan valor a tu desarrollo escolar.

Un Libromedia en DVD, que:

- Contiene una amplia variedad de recursos digitales.
- Es fácil de manejar y no requiere conectividad.
- Se vincula a tu salón de clases y a tu hogar como una oportunidad para aumentar tu eficacia en el aprendizaje.



Barra de contenidos

Barra de herramientas

Barra de navegación

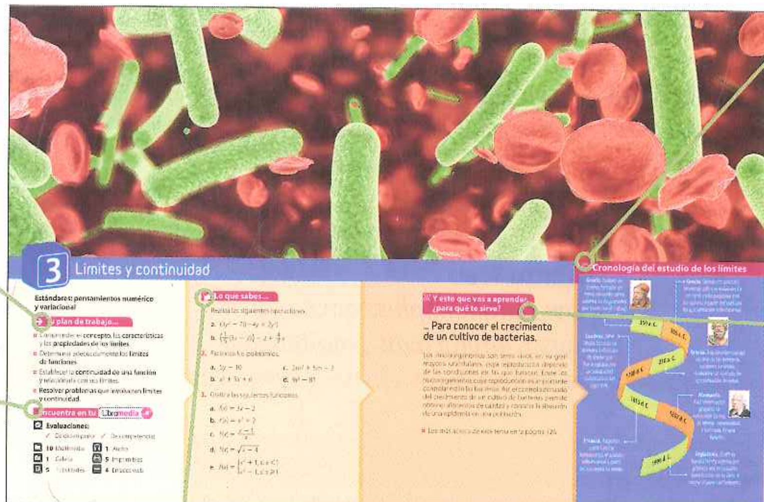
Botón de ayuda

¿Cómo está organizado tu libro?

Para que juntos alcancemos las metas educativas que nos hemos propuesto, el programa de educación te ofrece un libro organizado en ocho unidades y estas se presentan así:

Página inicial

Al comienzo de cada unidad, encontrarás una doble página de apertura donde se presentan los temas que abordarás y los logros que vas a alcanzar. También se enumeran los contenidos y las actividades que desarrollarás en tu Libromedia, así como las evaluaciones que te ayudarán a afianzar tus conocimientos y competencias.



Tu plan de trabajo...
Presenta los temas y logros que vas a desarrollar en la unidad.

Encuentra en libromedia
Relaciona los objetos digitales y las evaluaciones que complementan tu libro.

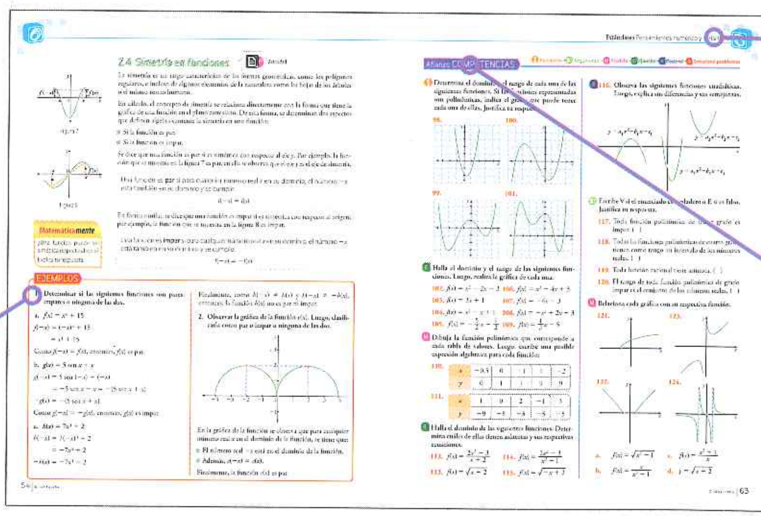
Cronología
Es una línea de tiempo que te muestra cómo ha sido estudiado un tema de la unidad, en diferentes épocas y lugares del mundo.

Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?
Es una lectura de motivación que te informa sobre una aplicación práctica del tema de la unidad.

Lo que sabes
Es una autoevaluación de conceptos que debes saber para que aprendas con mayor facilidad lo que se va a trabajar.

Desarrollo de temáticas

El desarrollo de los contenidos está acompañado de ejercicios y de situaciones en contexto, cuya solución se explica paso a paso. Además, encuentras actividades para desarrollar tus competencias.



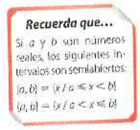
Te indica el tipo de estándar o estándares que se trabajan en cada página.

Afianzo competencias
Son actividades para interpretar, argumentar y proponer. También para ejercitar, razonar, modelar o solucionar problemas.

Ejemplos
Son ejercicios de aplicación de la teoría que se está trabajando.

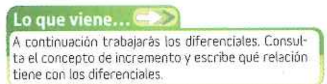
En el desarrollo de las temáticas también encuentras:

En estos recuadros encontrarás datos acerca de los acontecimientos históricos relacionados con la temática que se está trabajando.



Este cuadro te recuerda información clave para que puedas comprender mejor la teoría.

En esta sección encontrarás preguntas acerca de la teoría que se está trabajando.

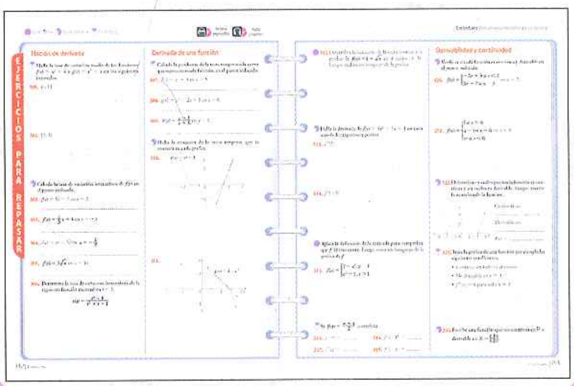


En estos cuadros encuentras una pregunta acerca del tema siguiente para que te prepares para la próxima clase.

Al final de la unidad encuentras:

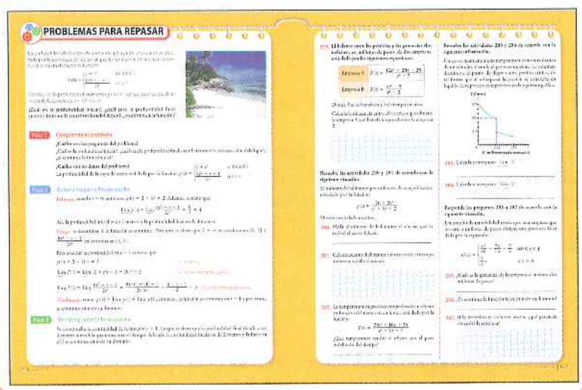
Ejercicios para repasar

Es una selección de actividades de cada tema, para que repases y respondas allí mismo.



Problemas para repasar

Te presenta un problema resuelto acerca de una de las temáticas de la unidad y algunos problemas para que apliques lo aprendido.

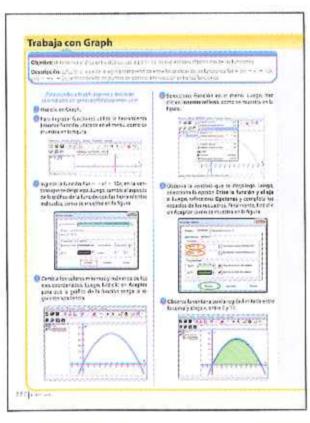


Secciones especiales

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?
En ella podrás leer y analizar situaciones que tienen aplicación con la temática estudiada.

Trabaja con
En ella encuentras actividades para que trabajes los temas de la unidad en diferentes programas informáticos.

Hiperpágina
Doble página en la que se abordan los temas de una manera más visual con el propósito de facilitar su comprensión.



CONTENIDOS

Pensamientos numérico y variacional

Pensamientos numérico y variacional

Unidad 5. Reglas de derivación — 160

Pensamientos variacional, espacial y métrico

Unidad 6. Aplicaciones de la derivada — 202

Unidad 7. Integrales — 250

Pensamiento aleatorio

Unidad 8. Estadística y probabilidad — 284

1 Lógica, conjuntos y números reales

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Hallar el **valor de verdad de una proposición**.
- Simbolizar una proposición con **cuantificadores**.
- Representar **operaciones entre conjuntos** mediante diagramas de Venn.
- Resolver **inecuaciones** cuadráticas y con valor absoluto.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

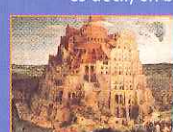
✓ Diagnóstica ✓ De desempeño

- 5 Multimedia
- 1 Galería
- 7 Actividades
- 1 Audio
- 6 Imprimibles
- 2 Enlaces web

Lo que sabes...

1. Determina cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos.
   a. Todo número entero negativo es menor que cero.
   b. La suma de dos números naturales puede ser un número racional.
   c. El producto de dos números es igual a cero, si alguno de los números es cero.
2. Escribe tres elementos que pertenezcan a cada conjunto.
   a. Conjunto de los números naturales.
   b. Conjunto de los números racionales que no son enteros.
   c. Conjunto de los números irracionales.

Cronología de lógica y conjuntos

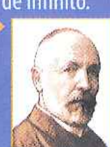


2150 a. C. **Babilonia.** Se planteó el conjunto de los números naturales a partir de un sistema sexagesimal, es decir, en base 60.

1753 d. C. **Europa.** Se observó la utilización de los conjuntos en tratados sobre clasificación de plantas como el *Species Plantarum*.

1854 d. C. **Irlanda.** George Boole publicó *An Investigation of the Laws of Thought* en el que desarrolló un sistema para resolver problemas lógicos admitiendo solo dos estados: verdadero y falso.

1874 d. C. **Alemania.** Georg Cantor desarrolló la teoría de conjuntos y formalizó la noción de infinito.



1879 d. C. **Alemania.** Gottlob Frege publicó su obra *Conceptografía,* con la cual sentó las bases de la lógica matemática moderna.

1905 d. C. **Alemania.** Ernst Zermelo inició la axiomatización de la teoría de conjuntos.

1973 d. C. **Azerbaiyán.** Lotfi A. Zadeh propuso la teoría de la lógica difusa, la cual se aplica en informática y sistemas de control industrial.

Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para tomar decisiones relacionadas con los productos bancarios.

Las desigualdades se aplican en diferentes ámbitos en la toma de decisiones. Así, por ejemplo, las inecuaciones se pueden utilizar para comparar los costos de ciertos productos bancarios, ofrecidos por diferentes entidades financieras.

Lee más acerca de este tema en la página 38.

1. Proposiciones

Una **proposición** es un enunciado del cual se puede afirmar si es verdadero o falso, pero no las dos cosas a la vez. Por esta razón las preguntas, las órdenes y las exclamaciones no son proposiciones.

1.1 Proposición simple

Una **proposición simple** es aquella que se forma sin utilizar términos de enlace.

EJEMPLOS

1. Determinar cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones.

a. Tokio es la capital de Japón.

Esta expresión es una proposición porque se puede afirmar si es verdadero o falso que Tokio es la capital de Japón.

b. ¿Cuál es la raíz cuadrada de 576?

Esta expresión no es una proposición porque es una pregunta y por tanto no se puede afirmar si es verdadera o falsa.

c. Cierre la puerta.

Esta expresión no es una proposición porque es una orden y por esto no se puede afirmar si es verdadera o falsa.

d. $320 + 54 > 368$.

Esta expresión es una proposición porque se puede afirmar si es verdadero o falso que la suma $320 + 54$ es mayor que 368.

2. Simbolizar cada proposición. Luego, determinar su valor de verdad.

a. 25 es divisor de 173.

La proposición se puede simbolizar como p: 25 es divisor de 173. El valor de verdad de p es falso porque la división de 173 entre 25 no es exacta.

b. El período de la función $f(\theta) = \cos\theta$ es π.

La proposición se puede simbolizar q: el período de la función $f(\theta) = \cos\theta$ es π. El valor de verdad de q es falso porque el período de $f(\theta) = \cos\theta$ es 2π.

c. Una de las soluciones de la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$ es $x = 4$.

La proposición se puede simbolizar como r: una de las soluciones de la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$ es $x = 4$. Para determinar el valor de verdad de r se resuelve la ecuación así:

$x^2 - 7x + 12 = 0$ Ecuación cuadrática.

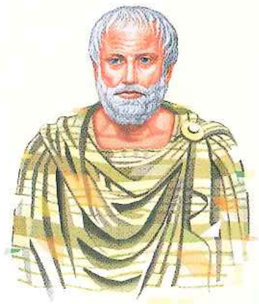
$(x - 3)(x - 4) = 0$ Se factoriza.

$x = 3$ o $x = 4$ Se hallan las posibles soluciones.

Por tanto, el valor de verdad de r es verdadero.

Historia de las matemáticas

El fundador de la lógica



Aristóteles es reconocido como el padre de la lógica porque fue el primer pensador en formalizar esta ciencia. Para esto, propuso la construcción de silogismos o razonamientos a partir de proposiciones.

Recuerda que...

Hallar el valor de verdad de una proposición significa determinar si es verdadera o falsa.

1.2 Proposiciones compuestas

Actividad

Una **proposición compuesta** es aquella que se forma a partir de dos o más proposiciones simples que se relacionan mediante enlaces denominados **conectivos lógicos**.

Por ejemplo, la proposición "Un triángulo equilátero es equiángulo y en un cuadrado cada ángulo interno mide 90°" es una proposición compuesta formada por las siguientes proposiciones simples:

p: un triángulo equilátero es equiángulo.

q: en un cuadrado cada ángulo interno mide 90°.

En este caso, las proposiciones p y q se unen mediante el conectivo lógico "y".

Conectivos lógicos

Actividad

Los conectivos lógicos son los términos de enlace que se utilizan para formar proposiciones compuestas. Cada conectivo lógico se simboliza de una manera diferente y define una operación lógica según la función que cumple. Los conectivos lógicos son:

Conectivo lógico	Operación lógica	Símbolo	Notación	Lectura
y	Conjunción	$\wedge$	$p \wedge q$	p y q
o	Disyunción	$\vee$	$p \vee q$	p o q
Si… entonces…	Implicación	$\rightarrow$	$p \rightarrow q$	Si p entonces q, p implica q
Si y sólo si	Equivalencia	$\leftrightarrow$	$p \leftrightarrow q$	p si y sólo si q, p es equivalente a q
No	Negación	$\neg$	$\neg p$	No p

El conectivo "no" se denomina **monádico** porque se aplica a una sola proposición. En cambio, a los conectivos y, o, si… entonces, si y sólo si, se les denomina **diádicos** porque se aplica a dos proposiciones.

EJEMPLOS

1. **Escribir la negación de p: el planeta más grande del sistema solar es Júpiter. Luego, determinar su valor de verdad.**

La negación de p es:

$\neg p$: el planeta más grande del sistema solar no es Júpiter.

El valor de verdad de $\neg p$ es falso porque Júpiter si es el planeta más grande del sistema solar.

2. **Simbolizar la proposición "Un polígono es regular si sus lados tienen igual medida".**

La proposición se puede reescribir como "Si los lados de un polígono tienen igual medida, entonces, es un polígono regular". Luego, se tienen dos proposiciones simples p y q relacionadas mediante el conectivo si… entonces. Por tanto, la proposición se simboliza $p \rightarrow q$.

Recuerda que…

Si una proposición p es verdadera, entonces, su negación $\neg p$ es falsa y recíprocamente, si p es falsa, $\neg p$ es verdadera.

Conjunción

Ampliación multimedia

La **conjunción** es una proposición compuesta que se forma al enlazar dos o más proposiciones simples mediante el conectivo lógico "y".

Una conjunción es verdadera cuando las dos proposiciones simples que la conforman son verdaderas. En la tabla de verdad se muestran los posibles valores de verdad para una conjunción formada por dos proposiciones simples p y q.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción

La **disyunción** es una proposición compuesta que se forma al enlazar dos proposiciones simples mediante el conectivo lógico "o".

La disyunción es falsa cuando las dos proposiciones simples que la conforman son falsas. En la tabla de verdad se muestran los posibles valores de verdad de una disyunción formada por dos proposiciones simples.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Historia de las matemáticas

Augustus De Morgan

El matemático inglés Augustus De Morgan (1806-1871) nació en India y escribió varias obras sobre lógica. Formuló ciertas leyes que relacionan la disyunción y la conjunción. Una de ellas es que "la negación de la conjunción es equivalente a la disyunción de las negaciones", es decir,

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

EJEMPLOS

1. Simbolizar la siguiente proposición.

Los precios son altos y el dinero no siempre alcanza.

Primero, se simbolizan las proposiciones simples. Por tanto, se tienen las proposiciones p: Los precios son altos y q: El dinero no siempre alcanza.

Luego, se tiene que ambas proposiciones se relacionan mediante el conectivo lógico "y".

Finalmente, la conjunción se simboliza $p \wedge q$.

2. Determinar el valor de verdad de las proposiciones compuestas conformadas por las siguientes proposiciones simples.

p: La ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ representa una circunferencia.

q: El radio de la circunferencia es a.

a. $p \wedge q$

Como p es verdadera y q es verdadera, entonces la conjunción $p \wedge q$ es verdadera.

b. $p \vee \neg q$

Primero, la negación de q es $\neg q$: El radio de la circunferencia no es a.

Luego, se tiene que p es verdadera y como q también es verdadera, entonces, la proposición $\neg q$ es falsa.

Finalmente, la disyunción $p \vee \neg q$ es verdadera, porque para ello basta con que solo p sea verdadera.

Implicación

La **implicación** es una proposición compuesta que se forma al enlazar dos proposiciones simples mediante el conectivo lógico "si… entonces…".

En una implicación $p \rightarrow q$, la primera proposición simple p es el **antecedente** y la segunda proposición simple q es el **consecuente**. En la tabla de verdad se muestra que la implicación es falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Equivalencia

La **equivalencia** es una proposición compuesta que se forma al enlazar dos proposiciones simples mediante el conectivo lógico "si y sólo si".

Una equivalencia $p \leftrightarrow q$ es verdadera cuando ambas proposiciones simples p y q son verdaderas o cuando ambas proposiciones son falsas, como se muestra en la tabla de verdad.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

A partir de las tablas de verdad de la conjunción, la disyunción, la implicación y la equivalencia, se pueden obtener los posibles valores de verdad de otras proposiciones compuestas. Si todos los valores de verdad de una proposición compuesta son verdaderos, entonces, la proposición es una **tautología**. En cambio, cuando todos los valores de verdad son falsos, entonces, la proposición es una **contradicción**.

En el caso en el que haya al menos un valor de verdad falso y otro verdadero, la proposición es una **contingencia**.

EJEMPLO

Hallar los posibles valores de verdad de la proposición $(\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

Primero, la proposición compuesta tiene cuatro posibles combinaciones de valores de verdad porque está formada por dos proposiciones simples p y q.

Luego, se construye la tabla de verdad.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$	$(\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Finalmente, se tiene que todos los posibles valores de la proposición $(\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ son verdaderos. Por tanto, la proposición compuesta es una tautología.

Matemáticamente

¿Cuántas posibles combinaciones de valores de verdad tiene una proposición compuesta formada por n proposiciones simples?

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Modelo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Marca con un ✓ las expresiones que son proposiciones.

1. Medellín es la capital de Antioquia. ✓
2. ¡Que viva Colombia!
3. George Boole fue un matemático y lógico inglés. ✓
4. ¿Qué es un número perfecto?

Determina el valor de verdad de cada proposición. Justifica tu respuesta.

5. Una conjunción es verdadera si al menos una de las proposiciones simples que la conforman es verdadera.
6. Una proposición compuesta es tautología cuando todos sus posibles valores de verdad son verdaderos.
7. Si $p \rightarrow q$ es falso, entonces, tanto p como q son falsas.
8. Si $p \rightarrow q$ es falso, entonces, p y q tienen diferentes valores de verdad.

Clasifica las siguientes proposiciones según la operación lógica que se aplica. Luego, simbolízalas.

9. Si dos rectas son paralelas, entonces, tienen la misma pendiente.
10. Un cuadrado es rectángulo y un rectángulo es paralelogramo.
11. Un número x puede ser racional o irracional.
12. Un triángulo es equilátero si y sólo si todos sus lados tienen igual medida.

Construye la tabla de verdad para cada proposición. Luego, determina si es tautología, contradicción o contingencia.

13. $p \wedge \neg(p \wedge q)$
14. $(p \vee q) \wedge r$
15. $(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \rightarrow \neg r)$
16. $[(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg r)] \rightarrow p$
17. $[(p \vee q) \wedge r] \vee [(p \wedge q) \vee \neg r]$
18. $[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$
19. $[(p \vee q) \rightarrow (p \wedge r)] \leftrightarrow r$

Observa la siguiente proposición compuesta en forma simbólica. Luego, aplícala para escribir cada implicación como una disyunción.

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

20. Si un triángulo es rectángulo, entonces, uno de sus ángulos internos mide 90°.
21. Si $x = y$, entonces, $x + y$ es par.
22. Si dos ángulos son suplementarios, entonces, la suma de sus medidas es 180°.
23. Si en una multiplicación los factores son pares, entonces, el producto es par.

Escribe, en cada caso, los posibles valores de verdad de p, q y r para que se cumpla la condición dada.

24. $(p \rightarrow \neg q) \wedge r$ es verdadera.
25. $(p \wedge q) \vee r$ es falsa.
26. $(p \vee \neg r) \leftrightarrow q$ es verdadera.
27. $(\neg p \rightarrow q) \vee \neg r$ es falsa.

Si la proposición $(p \vee q) \rightarrow [r \vee (s \rightarrow \neg p)]$ es falsa, ¿cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

28. $p \vee q$ es verdadera.
29. $s \rightarrow \neg p$ es falsa.
30. $\neg p$ es falsa.
31. r es verdadera.

Como parte de un juicio que se sigue a un sospechoso de robo, el fiscal asegura que: "Si el acusado estuvo en el lugar de los hechos, entonces, es el responsable directo o el cómplice del robo".

32. Identifica las proposiciones simples que se mencionan en la sentencia del fiscal.
33. Simboliza la proposición compuesta que formula el fiscal.
34. Construye una tabla de verdad para determinar los posibles valores de verdad de la sentencia del fiscal.
35. Clasifica la proposición compuesta en tautología, contradicción o contingencia.

1.3 Proposiciones con cuantificadores

Para formar proposiciones se utilizan las funciones proposicionales y los cuantificadores.

Funciones proposicionales

Una **función proposicional** es una expresión que tiene una o más variables que, al ser sustituidas por los elementos de un conjunto de referencia, dan origen a una proposición.

Las funciones proposicionales se representan con letras mayúsculas (P, Q, R, S) en función de las variables correspondientes. Por ejemplo, la función proposicional "x es menor que 5" se puede representar como $P(x)$: $x < 5$, en donde x se puede remplazar por valores de cualquier conjunto numérico para formar una proposición.

Matemáticamente

¿Cuál es la diferencia entre una función proposicional y una proposición?

Cuantificadores

Ampliación multimedia

Un **cuantificador** es una expresión que indica la cantidad de elementos que cumplen una proposición.

Los principales cuantificadores son el cuantificador universal "para todo" que se simboliza $\forall$ y el cuantificador existencial "existe algún" que se simboliza $\exists$.

Para negar una proposición con cuantificador universal se utiliza el cuantificador existencial y para negar una proposición con cuantificador existencial se utiliza el cuantificador universal.

Negación cuantificador universal $\neg(\forall\, x \in A: P(x)) \leftrightarrow \exists\, x \in A: \neg P(x)$

Negación cuantificador existencial $\neg(\exists\, x \in A: P(x)) \leftrightarrow \forall\, x \in A: \neg P(x)$

Recuerda que...

Los cuantificadores se utilizan para convertir una función proposicional en una proposición.

EJEMPLOS

1. Convertir la función proposicional $P(x)$ en una proposición anteponiendo un cuantificador. Luego, determinar su valor de verdad.

$$P(x): x^2 + 2 \leq 20$$

Primero, se convierte la función proposicional $P(x)$ a proposición. Para esto, se puede anteponer el cuantificador "para todo" así:

$$\forall\, x \in \mathbb{Z}, x^2 + 2 \leq 20$$

Luego, se determina el valor de verdad de la proposición. En este caso, la proposición es falsa, porque para $x = 5$ se tiene que:

$$(5)^2 + 2 = 27 \text{ y } 27 > 20.$$

Finalmente, se tiene que, al anteponer $\forall\, x \in \mathbb{Z}$ a la función proposicional $P(x)$: $x^2 + 2 \leq 20$, se forma una proposición que es falsa, porque no todos los números x que pertenecen a los enteros cumplen que $x^2 + 2$ sea menor o igual que 20.

2. Simbolizar la proposición "Todos los números reales son racionales". Luego, escribir su negación.

Primero, se identifica la función proposicional y el conjunto de referencia.

$$P(x): x \text{ es racional.}$$

Conjunto referencia: $\mathbb{R}$

Segundo, se simboliza la proposición teniendo en cuenta que se utiliza el cuantificador "para todo":

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: P(x)$$

Luego, se plantea la negación aplicando el cuantificador existencial.

$$\neg(\forall\, x \in \mathbb{R}: P(x)) \leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}: \neg P(x)$$

Finalmente, se escribe la negación en lenguaje natural, así:

"Existe un número x que pertenece a los números reales tal que x no es racional".

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Modelo • Razono • Soluciono problemas

Escribe las siguientes proposiciones en lenguaje natural, teniendo en cuenta que $\mathbb{N}$ representa el conjunto de los números naturales y $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros.

36. $\forall x \in \mathbb{N}: x \geqslant 7$

37. $\exists y \in \mathbb{Z}: y + 2 \leqslant -10$

38. $\forall x \in \mathbb{N}: \sqrt{x} \geqslant 0$

39. $\exists x, y \in \mathbb{Z}: x + y = y + x.$

Simboliza las siguientes proposiciones con cuantificadores.

40. Existen elipses que son circunferencias.

41. Todo número entero impar es de la forma $2x + 1$.

42. Existen números x, y tales que $x + y = 0$.

43. Todo número divisible entre 2 es par.

Niega cada proposición. Luego, determina el valor de verdad de la negación.

44. $\forall x \in \mathbb{N}: \sqrt{x^2} = x$

45. $\exists x \in \mathbb{N}: x + 1 = 3$

46. $\forall x \in \mathbb{Z}: \sqrt{x - 1} = 0$

47. $\exists x \in \mathbb{Z}: x^2 = \sqrt{2}$

Determina el valor de verdad de cada proposición teniendo en cuenta las siguientes funciones proposicionales. Justifica tu respuesta.

$P(x)$: x es un número entero.

$Q(x)$: x es múltiplo de 5.

$R(x)$: x es mayor que 2.

$S(x)$: x es menor o igual a 6.

48. $Q(20)$

49. $P(4) \wedge Q(16)$

50. $\neg[P(7) \wedge \neg Q(8)] \rightarrow R(10)$

51. $S(11) \leftrightarrow \{[R(-3) \vee \neg Q(6)] \wedge P(-5)\}$

52. $P(10) \wedge \{[R(1) \wedge Q(3)] \rightarrow S(-4)\}$

Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

53. $\forall x \in A: x^2 < 32$

54. $\exists x \in A: x^2 - x = 15$

55. $\forall x \in A: 2^x > 16$

Escribe una proposición con cuantificador para cada fotografía. Luego, simbolízala.

56. 

57. 

Utiliza cuantificadores para convertir las funciones proposicionales en proposiciones teniendo en cuenta que $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leqslant x \leqslant 9\}$. Luego, determina el valor de verdad de cada proposición.

58. $P(x)$: $x \leqslant 9$

59. $Q(x)$: $x > 8$

60. $S(x)$: $x^2 < 25$

61. $T(x)$: $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$

Simboliza la negación de las siguientes proposiciones.

62. Existen algunos números racionales que son menores que 1.

63. Todos los números naturales son divisibles entre 5.

64. Existe un número que elevado al cuadrado es igual a 3.

65. Todos los números irracionales son reales.

Sea U el conjunto de estudiantes de una universidad y dadas las funciones proposicionales $P(x)$: x fue a la conferencia y $Q(x)$: x fue a clase.

66. ¿Cómo se simboliza la proposición "Algunos estudiantes no fueron a la conferencia y faltaron a clase"?

Un estudiante escribió las siguientes proposiciones acerca de la alimentación de los animales.

- **Todos los animales son herbívoros.**
- **Algunos animales son carnívoros.**
- **Existen animales que son omnívoros.**

67. Simboliza cada una de las proposiciones utilizando cuantificadores.

68. Simboliza la siguiente proposición utilizando la función proposicional $R(x)$: es cuadrúpedo.

"Algunos animales cuadrúpedos no son herbívoros".

2. Conjuntos

Un **conjunto** es una agrupación de objetos de cualquier especie. Cada objeto de un conjunto se denomina **elemento**. Los elementos de un conjunto no se repiten y no tienen un orden específico.

Los conjuntos se clasifican según sus elementos, así:

- **Finitos:** son aquellos que tienen un número determinado de elementos.
- **Infinitos:** son aquellos que tienen un número indeterminado de elementos.
- **Unitario:** son aquellos que tienen un solo elemento.
- **Vacío:** es aquel que no tiene elementos.
- **Universal:** es aquel cuyo objeto de estudio son sus subconjuntos.

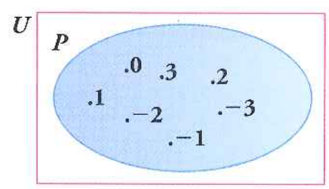
Los conjuntos se nombran con letras mayúsculas y, en particular, el conjunto universal generalmente se nombra con la letra U. Además el conjunto vacío se simboliza $\varnothing$.

Hay dos formas de representar un conjunto: escribiendo sus elementos entre llaves separadas por comas o, gráficamente, por medio de diagramas de Venn, de tal forma que el conjunto universal se representa con un rectángulo y los conjuntos que están en su interior con círculos u óvalos en los que se encuentran sus elementos.

EJEMPLOS

1. Representar el conjunto P cuyos elementos son los números enteros mayores o iguales a -3 y menores o iguales a 3.

Las posibles representaciones del conjunto P son:

Entre llaves	En diagramas de Venn
$P = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	

Existen varios posibles conjuntos universales U. En este caso, el conjunto universal puede ser el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ o el conjunto de los número racionales $\mathbb{Q}$, entre otros.

2. Clasificar los siguientes conjuntos en finito, infinito, vacío o unitario.

a. El conjunto de los números reales.

El conjunto $\mathbb{R}$ es infinito, porque tiene un número indeterminado de elementos.

b. $A = \{-4, -3, -2, -1, 0\}$

El conjunto A es finito, porque tiene un número determinado de elementos, es decir, 5.

c. El conjunto M formado por los números primos pares.

El conjunto M es unitario, porque 2 es el único número primo que es par.

Historia de las matemáticas

Georg Cantor

Georg Cantor (1845-1918) fue un matemático y filósofo alemán quien creó (junto con Dedekind y Frege) la teoría de conjuntos. Cantor propuso una definición de conjunto y formalizó la noción de infinito a partir de sus investigaciones sobre conjuntos infinitos.

Recurso imprimible

2.1 Determinación de un conjunto

Enlace web

Un conjunto se puede determinar de dos formas: por extensión y por comprensión.

Un conjunto se determina por **extensión** cuando se nombran sus elementos o una parte de ellos.

Un conjunto se determina por **comprensión** cuando se da una regla o propiedad característica de los elementos que conforman el conjunto.

Por ejemplo, el conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ está determinado por extensión. Este mismo conjunto se determina por comprensión como $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ es par}\}$.

EJEMPLOS

1. Determinar por extensión los siguientes conjuntos.

a. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 8\}$

El conjunto A es el conjunto formado por los números enteros x que son mayores o iguales a 0 y menores o iguales a 8. Por tanto, el conjunto A se determina por extensión así:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 8 \wedge x < 6\}$

El conjunto S es vacío, porque no hay ningún número que sea mayor que 8 y menor que 6. Por tanto, se escribe que $S = \varnothing$.

2. Determinar por comprensión los siguientes conjuntos.

a. $B = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$

Los elementos del conjunto B son potencias de 2. Por tanto, al determinarlo por comprensión se tiene que:

$$B = \{x \mid x = 2^n \wedge n \in \mathbb{N}\}$$

b. $T = \{7\}$

El conjunto T es unitario. En este caso B se puede determinar por comprensión de varias formas. Por ejemplo:

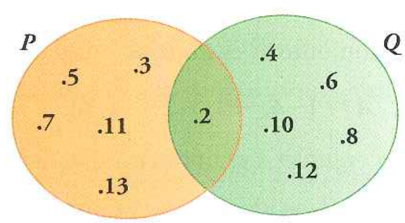
$$T = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 49\} \text{ y } T = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 < x < 8\}$$

3. Observar los siguientes conjuntos. Luego, resolver.

a. Determinar por extensión el conjunto Q.

El conjunto Q se determina por extensión así:

$$Q = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$



b. Determinar por comprensión el conjunto P.

El conjunto P se determina por comprensión así:

$$P = \{x \mid x \text{ es primo} \wedge x \leq 13\}$$

Matemática*mente*

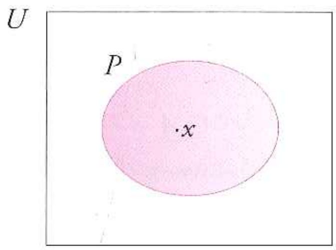
¿Cómo se determina por extensión el conjunto $\mathbb{Z}^-$?

2.2 Relación de pertenencia

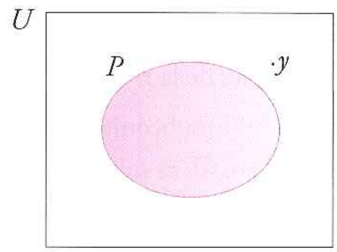
La relación entre un elemento y un conjunto dado se denomina relación de pertenencia.

Un elemento pertenece a un conjunto si cumple con las características que definen al conjunto. Los símbolos que se utilizan para indicar si un elemento pertenece o no pertenece a un conjunto son $\in$ y $\notin$, respectivamente.

Por ejemplo, si un elemento x cumple con las características de un conjunto P se escribe $x \in P$ y se lee "x pertenece a P". De manera similar, si un elemento y no cumple con las características que definen a P, entonces, se escribe $y \notin P$ y se lee "y no pertenece a P". Estas relaciones de pertenencia se pueden representar en diagramas de Venn así:



$x \in P$



$y \notin P$

EJEMPLOS

1. **Determinar por comprensión el conjunto $A = \{9, 14, 19, 24, \ldots\}$. Luego, establecer si el número 169 pertenece o no pertenece a A.**

Primero, se tiene que los elementos del conjunto A se generan a partir de igualdades como las siguientes:

$$5(0) + 9 = 9 \qquad 5(1) + 9 = 14 \qquad 5(2) + 9 = 19$$

Luego, cada elemento del conjunto A es igual a 9 más un múltiplo de 5. Por esto, el conjunto A se determina por comprensión así:

$$A = \{y \mid y = 5n + 9 \wedge n \in \mathbb{N}\}$$

Finalmente, si $n = 32$, entonces, $5(32) + 9 = 169$, de donde se concluye que $169 \in A$.

2. **Determinar por comprensión el conjunto S de puntos (x, y) del plano cartesiano que pertenecen a la región sombreada:**

Primero, se calcula la pendiente m, de la recta.

$$m = \frac{1 - 0}{0 - (-1)} = \frac{1}{1} = 1$$

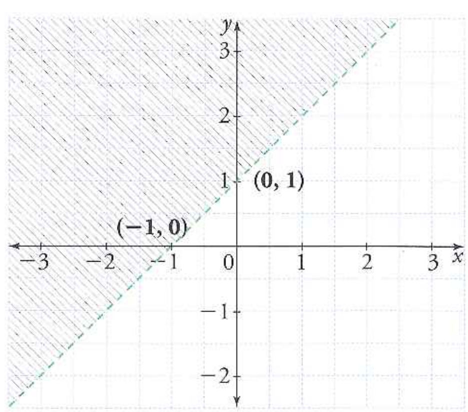
Luego, la ecuación de la recta es:

$$y - 1 = 1\,(x - 0)$$

$$y = x + 1$$

Finalmente, como los puntos de la región sombreada están "por encima" de la recta, entonces, el conjunto S se determina así:

$$S = \{(x, y) \mid y > x + 1\}$$



Recuerda que...

Si $P\ (x_1, y_1)$ es un punto de una recta y m es su pendiente, entonces, la ecuación de la recta está dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

2.3 Relaciones entre conjuntos

Entre dos o más conjuntos se puede presentar una relación de inclusión y una relación de igualdad.

Relación de inclusión

Actividad

Un conjunto A está contenido o incluido en un conjunto B si todos los elementos que pertenecen a A también pertenecen a B. Esto se escribe $A \subseteq B$ y se lee "A es subconjunto de B". En forma simbólica la relación de inclusión se puede expresar como:

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x \in A \rightarrow x \in B$$

Cuando un conjunto A no es subconjunto de un conjunto B, entonces, se escribe $A \subsetneq B$.

Algunas propiedades de la relación de inclusión son:

- Todo conjunto A es subconjunto de sí mismo, es decir, $A \subseteq A$.
- El conjunto vacío, $\varnothing$, es subconjunto de todos los conjuntos, es decir, $\varnothing \subseteq A$.

Relación de igualdad

Dos conjuntos A y B son iguales si A es subconjunto de B y B es subconjunto de A, es decir, si ambos conjuntos tienen los mismos elementos. En forma simbólica, la relación de igualdad se puede expresar como:

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Y de acuerdo con la relación de inclusión se tiene que:

$$A = B \leftrightarrow (\forall x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\forall x \in B \rightarrow x \in A)$$

Algunas propiedades de la relación de igualdad son:

- Todo conjunto A es igual a sí mismo, es decir, $A = A$.
- Si $A = B$, entonces, $B = A$.
- Si A, B, C son conjuntos tales que $A = B$ y $B = C$, entonces, $A = C$.

Historia de las matemáticas

Richard Dedekind

Richard Dedekind (1831-1916) fue un matemático alemán que estructuró los números naturales a partir de la tesis de conjuntos. Además, desarrolló la teoría de conjuntos transfinitos en correspondencia con Georg Cantor.

Recurso imprimible

EJEMPLO

Determinar las posibles relaciones entre los siguientes conjuntos.

$A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -6 \leqslant x \leqslant 4\}$

$B = \{x \,/\, x^2 + 8x + 15 = 0\}$

$C = \{-5, -3, 0, 3, 4\}$

Primero, se resuelve la ecuación que aparece en el conjunto B para hallar sus elementos.

$x^2 + 8x + 15 = 0$	Ecuación.
$(x + 3)(x + 5) = 0$	Se factoriza.
$x + 3 = 0$ o $x + 5 = 0$	Se iguala a cero.
$x = -3$ o $x = -5$	Se despeja x.

Por tanto, el conjunto B se determina por extensión así:

$$B = \{-3, -5\}$$

Segundo, como todos los elementos de B, es decir, -3 y -5, pertenecen al conjunto A, entonces, B es subconjunto de A y se escribe:

$$B \subseteq A$$

Luego, como cada elemento de B pertenece a C, entonces, B también es subconjunto de C y se escribe:

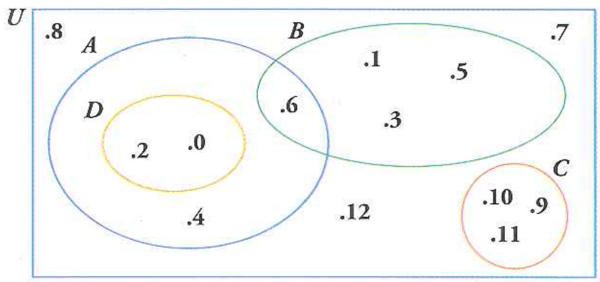
$$B \subseteq C$$

Finalmente, se tiene que todos los elementos de C son mayores que -6 y menores o iguales a 4, de donde se deduce que C es subconjunto de A y se escribe: $C \subseteq A$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono

Observa el siguiente diagrama de Venn. Luego, completa cada espacio con los símbolos $\in$, $\notin$, $\subseteq$ o $\not\subseteq$.



69. B ____ A

70. -2 ____ D

71. 11 ____ C

72. D ____ A

Determina por extensión los siguientes conjuntos.

73. $R = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 4 \leq x \leq 20\}$

74. $T = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x^2 - 2x - 3 = 0\}$

75. $J = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x^2 = 169\}$

76. $L = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x^2 - 5x - 6 = 0\}$

77. $H = \left\{x \,/\, x = \dfrac{1}{2^n} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$

Determina por comprensión los siguientes conjuntos.

78. $F = \{5, 12, 19, 26, 33, 40, \ldots\}$

79. $G = \{1, 8, 27, 64, 125, \ldots\}$

80. $M = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots\right\}$

81. $N = \left\{\dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{7}, \dfrac{5}{9}, \ldots\right\}$

82. $P = \{\sqrt{6}, \sqrt[4]{12}, \sqrt[6]{18}, \sqrt[8]{24}, \ldots\}$

Representa en diagramas de Venn las siguientes relaciones entre conjuntos.

83. $A \subseteq B \wedge C \subseteq A$

84. $A \subseteq S$, $B \subseteq S$, $C \subseteq S$. Además, A tiene elementos comunes con B y C no tiene elementos comunes con A ni con B.

Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.

85. $\varnothing \in \varnothing$

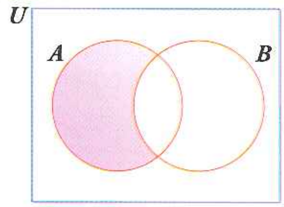
86. $\varnothing \subseteq \{0\}$

87. $\varnothing \subseteq \varnothing$

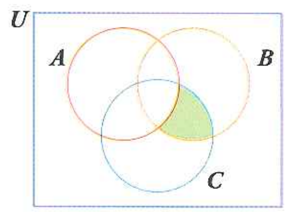
88. $0 \in \varnothing$

Determina por comprensión el conjunto de los elementos que pertenecen a la región sombreada en los siguientes diagramas de Venn.

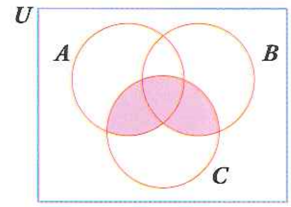
89.



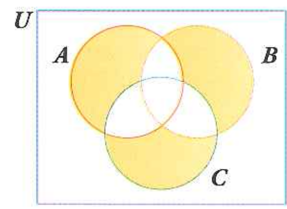
90.



91.



92.



Lee y resuelve.

El conjunto de partes es el conjunto formado por todos los subconjuntos de un conjunto determinado. Por ejemplo, el conjunto de partes de $H = \{0, 1\}$ es:

$$P(H) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

93. Escribe el conjunto de partes del conjunto $M = \{a, b, c\}$.

94. Determina cuántos elementos tiene el conjunto de partes de un conjunto que tiene n elementos.

Si $A = \{\varnothing, \{1, 2\}, \{1\}, 1, \{2\}\}$, escribe V, si es verdadero o F, si es falso. Justifica tu respuesta.

95. $2 \subseteq A$ ____

96. $\{2\} \in A$ ____

97. $\varnothing \subseteq A$ ____

98. $\{1, 2\} \subseteq A$ ____

99. $1 \in A$ ____

100. $\{1\} \in A$ ____

Indica si cada pareja de conjuntos son iguales o no son iguales.

101. $J = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x > 2\}$

$L = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$

102. $R = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 3 < x < 10\}$

$S = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

103. $M = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 0 < x < 1\}$

$N = \varnothing$

2.4 Operaciones entre conjuntos

Recurso imprimible · Actividad

Entre conjuntos se definen las siguientes operaciones: intersección, unión, diferencia y diferencia simétrica.

Intersección

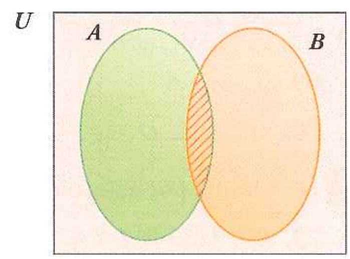
Ampliación multimedia

La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y B simultáneamente. La intersección se expresa en forma simbólica como:

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

Si no hay elementos que pertenezcan tanto a A como a B, entonces, la intersección es vacía y los conjuntos se denominan **disyuntos**.

En la figura la región rayada representa la intersección de dos conjuntos A y B.



La intersección entre conjuntos cumple las siguientes propiedades:

- $A \cap A = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Historia de las matemáticas

John Venn

John Venn (1834-1923) fue un matemático y lógico británico que desarrolló los diagramas que llevan su nombre, para comprobar la veracidad de silogismos y, más adelante, para representar las operaciones entre conjuntos.

Recurso imprimible

EJEMPLOS

1. Determinar la intersección entre los siguientes conjuntos.

$A = \{x / x = 2n - 3 \wedge n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{0, -1, -2, -3, -4\}$

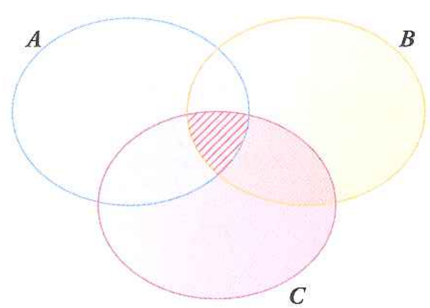
Primero, se determina por extensión el conjunto A para comparar fácilmente los elementos de ambos conjuntos. Para esto, se remplazan algunos números naturales n en la expresión $x = 2n - 3$, de donde se obtiene que:

$A = \{-3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots\}$

Luego, se comparan los elementos de ambos conjuntos, con lo cual se establece que -3 y -1 son los elementos comunes.

Finalmente, se tiene que $A \cap B = \{-3, -1\}$.

2. Simbolizar la intersección que se representa en el siguiente diagrama de Venn.



Primero, se tiene que la región sombreada representa parte de los elementos que pertenecen a $A \cap C$.

Luego, se tiene que esta región también comprende parte de los elementos que pertenecen a $B \cap C$.

Finalmente, se tiene que los elementos de la región pertenecen tanto a $A \cap C$ como a $B \cap C$. Por tanto, el conjunto S que se representa en el diagrama de Venn se simboliza así:

$$S = \{x / (x \in A \cap C) \wedge (x \in B \cap C)\}$$

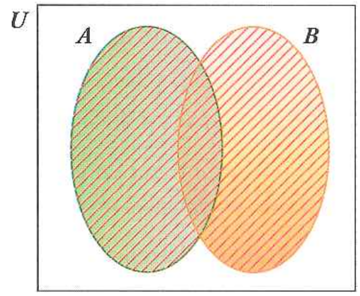
Unión

La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o que pertenecen a B.

La unión se expresa en forma simbólica como:

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

En la figura se muestra la representación, en diagramas de Venn, de la unión de los conjuntos A y B. La unión entre conjuntos cumple la siguientes propiedades:



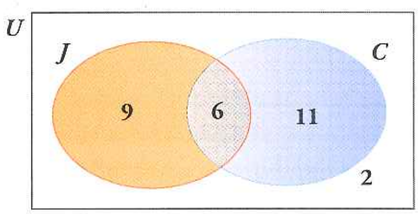
- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cup A = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup U = U$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

También existen otras propiedades que relacionan la unión y la intersección entre conjuntos. Estas son:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

EJEMPLOS

1. **Un supermercado ofrece una promoción a sus clientes de dos productos: champú y jabón. El número de personas que aprovecharon la oferta se muestra en el siguiente diagrama de Venn.**



¿Cuántas personas compraron al menos uno de los dos productos?

Primero, se tiene que, para saber cuántas personas compraron al menos uno de los productos, se debe determinar la cantidad de elementos del conjunto $J \cup C$.

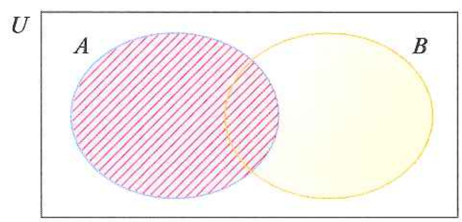
Luego, el conjunto J tiene $9 + 6 = 15$ y el conjunto C tiene $6 + 11 = 17$.

Finalmente, como en la unión no se debe repetir un mismo elemento dos veces y hubo 6 personas que compraron champú y jabón, entonces, la cantidad de elementos de $J \cup C$ es $15 + 17 - 6 = 26$.

Es importante tener en cuenta que en este caso no se representan en el diagrama de Venn los elementos de cada conjunto, sino la cantidad de elementos que tiene.

2. **Utilizar los símbolos de unión, intersección e igualdad entre conjuntos para simbolizar cada representación en diagramas de Venn.**

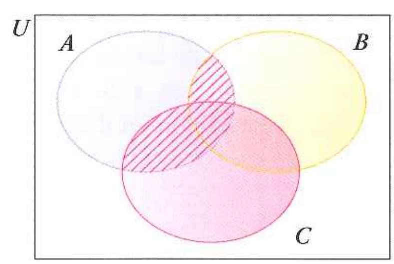
a.



En el diagrama de Venn se representa el conjunto A. Por tanto, al utilizar los símbolos de unión intersección e igualdad se tiene que:

$$A = A \cap (A \cup B)$$

b.



En el diagrama de Venn se representa la unión de $A \cap B$ y $A \cap C$. Por tanto, se tiene que:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$$

Diferencia

Ampliación multimedia

La **diferencia** entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A, pero que no pertenecen a B. En forma simbólica la diferencia se expresa como:

$$A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$$

Recuerda que...

Si A es un subconjunto de B y $A \neq B$, entonces, A es un **subconjunto propio** de B y se simboliza $A \subsetneq B$. En cambio, si A es un subconjunto de B y A puede ser igual a B, se escribe $A \subseteq B$.

La diferencia entre dos conjuntos A y B cumple las siguientes propiedades:

- $A - \varnothing = A$ y de igual forma $A - A = \varnothing$.
- $A - B = \varnothing$ si y sólo si $A \subseteq B$.
- $A - B = A$ si y sólo si $A \cap B = \varnothing$.

Es importante tener en cuenta que la diferencia entre conjuntos no cumple la ley conmutativa, es decir, $A - B \neq B - A$.

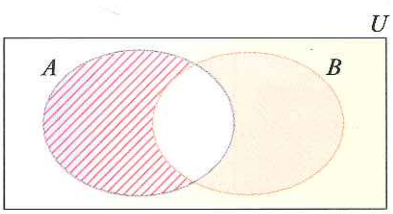
A partir de la diferencia entre conjuntos y teniendo en cuenta un conjunto universal U, se define el complemento del conjunto.

El **complemento** de un conjunto A con respecto a un conjunto universal U es el conjunto formado por los elementos de U que no pertenecen a A. En forma simbólica, el complemento de un conjunto se define como:

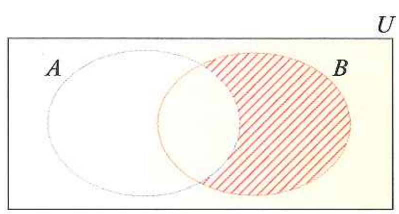
$$A^C = \{x \,/\, x \in U \wedge x \notin A\}$$

Es decir, $A^C = U - A$.

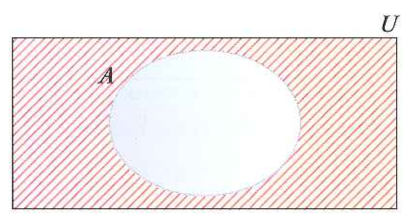
Los diagramas de Venn que representan las diferencias $A - B$, $B - A$ y el conjunto A^C son:



$A - B$



$B - A$

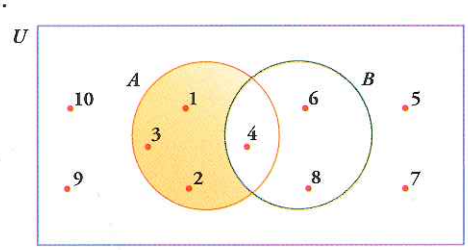


A^C

EJEMPLOS

1. Determinar por extensión el conjunto $A - B$ y representarlo en un diagrama de Venn teniendo en cuenta que $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{4, 6, 8\}$ y el conjunto universal es $U = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 1 \leq x \leq 10\}$.

El conjunto $A - B$ es el conjunto de los elementos que pertenecen a A y que no pertenecen a B. Por tanto, $A - B = \{1, 2, 3\}$ y su representación en diagramas de Venn es:

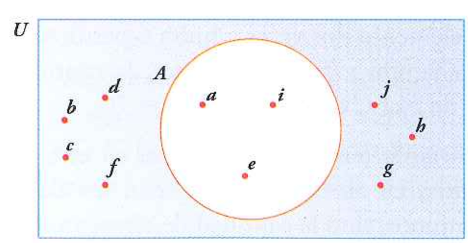


2. Representar en un diagrama de Venn A^C a partir del conjunto universal U y del conjunto A.

$U = \{$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$\}$

$A = \{x \,/\, x$ es una vocal de la palabra diferencia$\}$

Cuando se determina el conjunto A por extensión se tiene que $A = \{$a, e, i$\}$. Luego, la representación de A^C es:



Diferencia simétrica

Actividad

La **diferencia simétrica** entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a $A \cup B$ y que no pertenecen a $A \cap B$. En forma simbólica, la diferencia simétrica se expresa como:

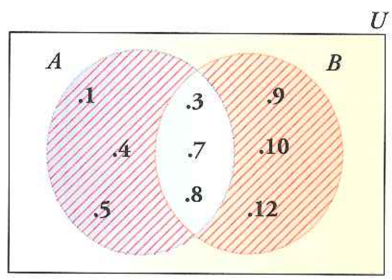
$$A \Delta B = \{x / x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$$

La diferencia simétrica entre dos conjuntos A y B cumple con las siguientes propiedades:

- $A \Delta B = B \Delta A$
- $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

EJEMPLOS

1. Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 4, 5, 7, 8\}$ y $B = \{3, 7, 8, 9, 10, 12\}$, determinar el conjunto $A \Delta B$ y representarlo en un diagrama de Venn.



Primero, se determinan los conjuntos $A \cup B$ y $A \cap B$, así:

$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12\}$

$A \cap B = \{3, 7, 8\}$

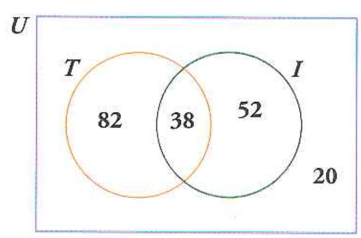
Luego, se determinan los elementos que pertenecen a la unión y que no pertenecen a la intersección.

Finalmente, se tiene que:

$$A \Delta B = \{1, 4, 5, 9, 10, 12\}$$

2. En una encuesta se les preguntó a los estudiantes qué actividad preferían realizar en su tiempo libre: ver televisión o navegar por Internet. Al respecto se obtuvieron los siguientes resultados: 38 estudiantes prefieren ver televisión y navegar por Internet, 120 prefieren ver televisión, 90 prefieren navegar por Internet y 20 prefieren realizar otras actividades.

a. ¿Cuántos estudiantes fueron encuestados?



Para determinar el número de encuestados resulta útil representar los datos en un diagrama de Venn, como se muestra en la figura, de tal forma que en T se ubica el número de estudiantes que prefieren ver televisión y en I, el número de estudiantes que prefieren navegar por Internet.

Así, el número de estudiantes encuestados es $82 + 38 + 52 + 20 = 192$.

b. ¿Cuántos estudiantes prefieren ver televisión únicamente o navegar por Internet únicamente?

El número de estudiantes que prefieren solo ver televisión o solo navegar por Internet corresponde a la cantidad de elementos del conjunto $T \Delta I$, es decir, $82 + 52 = 134$ estudiantes.

Matemáticamente

Si $A = \{a\}$ y $B = \{a, b\}$, determina por extensión el conjunto $P(A) \Delta P(B)$.

Recuerda que...

Otras propiedades

$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

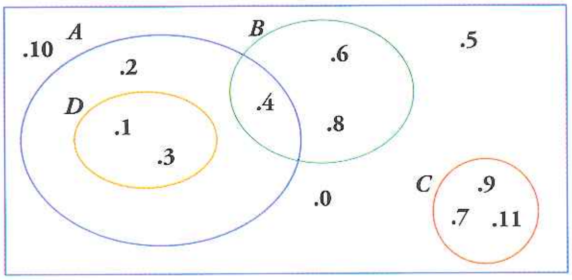
$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

$(A^C)^C = A$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Modelo • Ejercito • Soluciono problemas

E Determina por extensión cada conjunto a partir del siguiente diagrama de Venn.

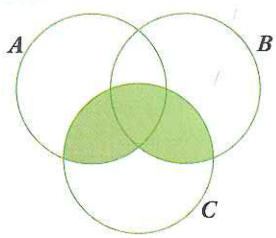


104. $B \cup C$

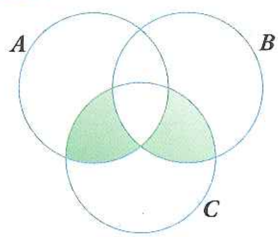
105. $(C \cup B)\ \Delta\ A$

M Simboliza la operación entre conjuntos que representa la región sombreada en los siguientes diagramas de Venn.

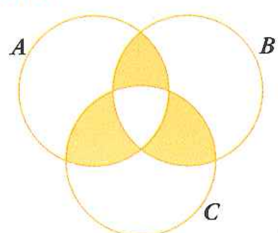
106.



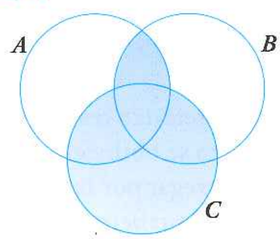
108.



107.



109.



I Representa, mediante diagramas de Venn, los siguientes conjuntos.

110. $A \cap B \cap C$

111. $(A \cap B) - C$

112. $(A \cap B \cap C)^C$

113. $(A \cup B \cup C)^C$

114. $A\ \Delta\ (B - C)$

115. $(A\ \Delta\ B) \cap C$

E Determina por extensión los siguientes conjuntos si $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 2, 3, 7, 9\}$ y $C = \{3, 4, 5, 8, 9, 10\}$.

116. $(A \cup B) - (B \cap C)$

117. $(A \cap B^C) \cup C$

118. $A - (B^C \cap C)$

119. $(A\ \Delta\ B) \cup (B\ \Delta\ C)$

A Utiliza las propiedades de las operaciones entre conjuntos para demostrar las siguientes igualdades:

120. $(A \cup B^C) \cap B = A \cap B$

121. $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A$

122. $(A^C \cap B)^C \cup (A^C \cap B^C) = (B - A)^C$

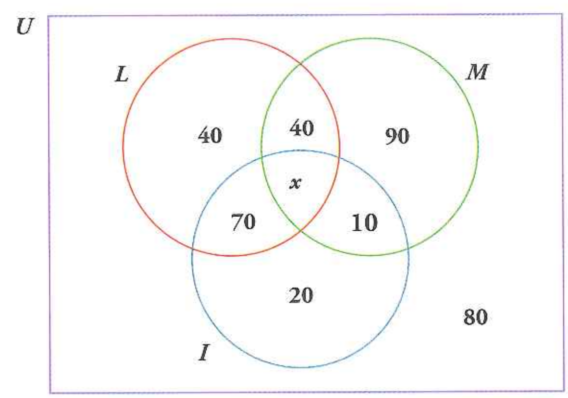
P Observa los siguientes conjuntos determinados por extensión.

$A = \{$a, d, c, ______, ______$\}$

$B = \{$a, e, b, ______, ______$\}$

123. Completa los elementos de los conjuntos A y B, de tal forma que $A\ \Delta\ B = \{$d, b, f, g$\}$.

S Cuatrocientos usuarios de telefonía celular recibieron una promoción para llamadas a celular (L), envío de mensajes de texto (M) y navegación por Internet (I). La cantidad de personas que aprovechó la promoción por servicio se muestra en el siguiente diagrama de Venn.



124. Determina la cantidad de personas x que aprovecharon la promoción para los tres servicios.

125. ¿Cuántas personas usaron solo la promoción para navegación por Internet?

S En un zoológico hay 70 aves que son de corral, 130 aves que son ornamentales, 45 aves que son de corral y ornamentales, y 310 aves que no son de corral ni ornamentales.

126. ¿Cuántas aves hay en el zoológico?

127. ¿Cuántas aves son únicamente ornamentales?

3. Números reales

Recurso imprimible

Los distintos conjuntos numéricos surgen a partir de necesidades específicas. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) es necesario para contar y enumerar objetos, y el conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$) sirve, entre otras, para describir la relación entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia. En general, el conjunto de los números reales tiene diversas aplicaciones.

El conjunto de los **números reales** está formado por los números racionales y por los números irracionales y se simboliza $\mathbb{R}$.

En el siguiente diagrama se muestra la relación entre los diferentes conjuntos que conforman el conjunto de los números reales.

$$\text{Números reales } (\mathbb{R})\begin{cases}\text{Racionales } (\mathbb{Q})\begin{cases}\text{Enteros } (\mathbb{Z})\begin{cases}\text{Naturales } (\mathbb{N})\\ \text{Enteros negativos}\end{cases}\\ \text{Decimales finitos y periódicos}\end{cases}\\ \text{Iracionales } (\mathbb{I})\end{cases}$$

Todos los números reales se pueden expresar en forma decimal. Así, los números naturales, los enteros y los racionales se pueden expresar como números decimales finitos o como números decimales infinitos periódicos. En cambio, los números irracionales se expresan como números decimales infinitos no periódicos.

Al representar los números reales en una recta se pueden observar las siguientes características:

- A cada punto de la recta le corresponde un único número real y viceversa.
- Entre dos números reales siempre es posible encontrar otro número real.
- Los números reales forman un conjunto ordenado, de tal forma que entre dos números reales a y b se cumple solo una de las siguientes proposiciones:

$$a < b \text{ si } b - a > 0$$

$$a = b \text{ si } b - a = 0$$

$$a > b \text{ si } b - a < 0$$

EJEMPLOS

Determinar si cada proposición es verdadera o falsa.

a. $1{,}7 \in \mathbb{Q}$

La proposición es verdadera porque 1,7 representa al número racional $\frac{17}{10}$.

b. $3{,}\overline{571428} \in \mathbb{I}$

La proposición es falsa porque $3{,}\overline{571428}$ es un decimal periódico que representa al número racional $\frac{25}{7}$.

c. $\sqrt{2} \in \mathbb{I} \wedge 3 \notin \mathbb{Q}$

La conjunción es falsa, porque aunque $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ es verdadera, la proposición $3 \notin \mathbb{Q}$ es falsa, ya que 3 sí es un número racional.

Historia de las matemáticas

El número π

En 1761, Johann Heinrich Lambert demostró que el número π es irracional. Años después, Ferdinand von Lindemann demostró la imposibilidad de construir un cuadrado de igual área a la de un círculo, teniendo en cuenta que π no es construible.

3.1 Desigualdades en $\mathbb{R}$

Ampliación multimedia

Una **desigualdad** es una expresión de la forma $a < b, a > b, a \leqslant b, a \geqslant b$ en la que a y b son números reales.

Si a, b y c son números reales, entonces, las desigualdades cumplen las siguientes propiedades:

- Si $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$, entonces, $a \leqslant c$.
- Si $a \leqslant b$, entonces, $a - c \leqslant b - c$.
- Si $a \leqslant b$, entonces, $a + c \leqslant b + c$.
- Si $a \leqslant b$ y $c > 0$, entonces, $ac \leqslant bc$.
- Si $a \leqslant b$ y $c < 0$, entonces, $ac \geqslant bc$.

Las desigualdades entre números reales se pueden representar en intervalos. Un **intervalo** es un subconjunto no vacío de números reales, que se representa gráficamente mediante un segmento de la recta real.

Los intervalos pueden ser abiertos, cerrados o semiabiertos.

Recuerda que...

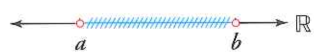
Si a y b son números reales, los siguientes intervalos son semiabiertos:

$[a, b) = \{x \,/\, a \leqslant x < b\}$

$(a, b] = \{x \,/\, a < x \leqslant b\}$

Si a y b son números reales tales que $a < b$, entonces, se llama **intervalo abierto** al conjunto de todos los números reales que son, simultáneamente, mayores que a y menores que b. Se simboliza (a, b).

En la notación (a, b), los paréntesis indican que los valores extremos no se incluyen en el intervalo. Gráficamente, un intervalo (a, b) se representa así:



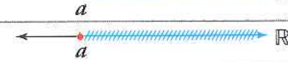
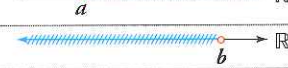
$(a, b) = \{x \,/\, a < x < b\}$

Si a y b son números reales tales que $a \leqslant b$, entonces, se llama **intervalo cerrado** al conjunto de todos los números reales que son, simultáneamente, mayores o iguales que a y menores o iguales que b. Se simboliza $[a, b]$.

En la notación $[a, b]$, los corchetes indican que los valores extremos se incluyen en el intervalo. Gráficamente, un intervalo $[a, b]$ se representa así:

$[a, b] = \{x \,/\, a \leqslant x \leqslant b\}$

En la siguiente tabla, se muestran otros intervalos con su respectiva notación de conjuntos y su representación gráfica.

Intervalo	Notación de conjuntos	Representación gráfica
$[a, b)$	$\{x \,/\, a \leqslant x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \,/\, a < x \leqslant b\}$	
(a, ∞)	$\{x \,/\, a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \,/\, a \leqslant x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \,/\, x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \,/\, x \leqslant b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	

Inecuaciones

Actividades

Una **inecuación** es una desigualdad en la que intervienen una o más variables.

Resolver una inecuación significa determinar todos los valores de la variable que hacen que la desigualdad sea verdadera. Una inecuación, por lo general, tiene infinitas soluciones que forman un intervalo, al que se le denomina conjunto solución.

Inecuaciones cuadráticas

Las **inecuaciones cuadráticas** son expresiones de la forma $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ y $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, en todos los casos $a \neq 0$.

Para resolver una inecuación cuadrática se aplican las propiedades de las desigualdades de tal forma que uno de los miembros de la inecuación sea cero y el otro sea la expresión cuadrática. Luego, se factoriza, si es posible, la expresión cuadrática y se resuelven las inecuaciones lineales correspondientes para determinar el conjunto solución.

Si la expresión cuadrática no se puede factorizar fácilmente, entonces, se realizan los siguientes pasos:

- **Primero,** se expresa la inecuación como una ecuación cuadrática.
- **Luego,** se aplica la fórmula cuadrática para hallar la solución de la ecuación.
- **Finalmente,** se ubican las soluciones de la ecuación en la recta numérica y se toman los valores de cada intervalo para verificar si son solución de la inecuación. Si los valores que se toman de cada intervalo son solución de la inecuación, entonces, el intervalo hace parte del conjunto solución.

EJEMPLOS

Resolver las siguientes inecuaciones cuadráticas.

a. $x^2 - 3x - 18 \geqslant 0$

Primero, se factoriza la expresión cuadrática.

$$(x-6)(x+3) \geqslant 0$$

Segundo, para que la multiplicación sea mayor que cero se puede presentar alguno de los siguientes casos:

Caso 1

$$x - 6 \geqslant 0 \wedge x + 3 \geqslant 0$$

Caso 2

$$x - 6 \leqslant 0 \wedge x + 3 \leqslant 0$$

Tercero, se resuelve cada inecuación lineal en ambos casos.

Caso 1

$$x \geqslant 6 \wedge x \geqslant -3$$

Caso 2

$$x \leqslant 6 \wedge x \leqslant -3$$

Luego, se obtienen los intervalos solución por cada caso, teniendo en cuenta que el conectivo lógico $\wedge$ implica la intersección entre intervalos.

Caso 1

$$[6, \infty) \cap [-3, \infty)$$

De donde la solución en este caso es el intervalo $[6, \infty)$.

Caso 2

$$(-\infty, 6] \cap (-\infty, -3]$$

De donde la solución en este caso es el intervalo $(-\infty, -3]$.

Finalmente, se tiene que la solución de la inecuación cuadrática es la unión de los intervalos solución en cada caso. Por tanto, el conjunto solución es:

$$(-\infty, -3] \cup [6, \infty)$$

b. $x^2 + 6x + 4 < 0$

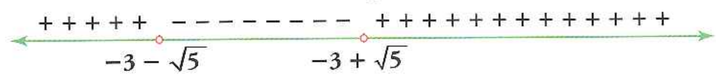
Primero, la expresión cuadrática no se puede factorizar fácilmente. Por esta razón, se expresa la inecuación como una ecuación cuadrática y se resuelve, así:

$x^2 + 6x + 4 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -3 \pm \sqrt{5}$$

Por tanto, hay dos posibles soluciones $x_1 = -3 + \sqrt{5}$ y $x_2 = -3 - \sqrt{5}$.

Luego, se ubican las dos soluciones en la recta teniendo en cuenta que $x_1 \approx -0{,}76$ y $x_2 \approx -5{,}24$, y se toman valores en cada intervalo para determinar en cuáles de ellos la expresión cuadrática toma valores menores que cero.



Finalmente, se tiene que la expresión cuadrática $x^2 + 6x + 4$ es menor que cero para los números que están entre $-3 - \sqrt{5}$ y $-3 + \sqrt{5}$, de donde se deduce que el conjunto solución es $(-3 - \sqrt{5}, -3 + \sqrt{5})$.

Recuerda que...

La solución de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ está dada por la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Solucionó problemas

Responde las siguientes preguntas.

128. ¿Cuáles son los diferentes tipos de intervalos?

129. ¿Cómo se resuelve una inecuación cuadrática?

Determina si el valor de la variable es solución de la inecuación. Justifica tu respuesta.

130. $3y - 7 \leqslant y + 5$ $y = 8$

131. $3m + 1 > 5 - 2m$ $m = 2$

132. $\frac{2}{3}x + 4 \geqslant x + 1$ $x = 9$

133. $-\frac{7}{9}p - \frac{1}{4} < \frac{5}{8}p + \frac{2}{5}$ $p = 0$

Relaciona cada inecuación con su respectivo conjunto solución.

134. $x + 4 < 3$ **a.** $\left(\frac{13}{6}, \infty\right)$

135. $x + 2 \geqslant x - 3$ **b.** $(-\infty, \infty)$

136. $3x - \frac{1}{2} > 6$ **c.** $\left[\frac{2}{5}, \infty\right)$

137. $\frac{5}{9}x + 2 < \frac{3}{5}x - 3$ **d.** $(-\infty, -1)$

138. $\frac{5x + 1}{3} < 7$ **e.** $(-\infty, 4)$

139. $\frac{7x - 1}{3} \geqslant \frac{x + 2}{4}$ **f.** $\left(\frac{225}{2}, \infty\right)$

Halla el conjunto solución de las siguientes inecuaciones cuadráticas.

140. $4x^2 - 25 \leqslant 0$

141. $x^2 + 11x < -18$

142. $x^2 - 8x - 1.008 > 0$

143. $15x^2 - 2 \geqslant 7x$

Determina una inecuación cuyo conjunto solución sea el intervalo dado.

144. $(2, \infty)$

145. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{4}{5}\right]$

146. $(-\infty, -7]$

147. $\left[5, \frac{11}{2}\right)$

Una vendedora de perfumes vende x perfumes. Si cobra a un precio de $53 - x$ dólares cada uno:

148. Determina una expresión para calcular los ingresos en términos de la cantidad de perfumes.

149. Halla el rango de precios en el que debe estar el valor de cada perfume si la vendedora desea obtener ingresos superiores a 690 dólares.

150. **La expresión $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$ relaciona la temperatura en grados Fahrenheit (T_F) y la temperatura en grados Celsius (T_C). Si la hipotermia se produce cuando la temperatura corporal se encuentra por debajo de los 98,2° Farenheit, ¿qué temperaturas indican que hay hipotermia en la escala Celsius?**

3.2 Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número a, se define como la distancia que hay entre cero y a en la recta numérica. Se simboliza $|a|$ y cumple con:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Si a, b son números reales, entonces, el valor absoluto cumple las siguientes propiedades:

1. $|a| \geqslant 0$
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $|a + b| \leqslant |a| + |b|$
5. $|a| = \sqrt{a^2}$
6. $|a^n| = |a|^n$

Ecuaciones con valor absoluto

Una **ecuación con valor absoluto** es una expresión de la forma $|ax + b| = c$ con $c \geqslant 0$.
Para resolver ecuaciones con valor absoluto se deben tener en cuenta las siguientes propiedades en las que a es un número real tal que $a \geqslant 0$.

7. $|x| = a$ si y sólo si $x = a \vee x = -a$
8. $|x| = |b|$ si y sólo si $x = b \vee x = -b$

EJEMPLOS

Resolver las siguientes ecuaciones.

a. $\left|3 - \frac{3}{2}x\right| = 5$

Se realizan los siguientes pasos:

$3 - \frac{3}{2}x = 5 \vee 3 - \frac{3}{2}x = -5$ Se aplica la propiedad 7.

$-\frac{3}{2}x = 2 \vee -\frac{3}{2}x = -8$ Se resta 3.

$x = -\frac{4}{3} \vee x = \frac{16}{3}$ Se multiplica por $-\frac{2}{3}$.

Por tanto, el conjunto solución es $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{16}{3}\right\}$.

b. $|4x + 6| = |2x + 8|$

Se realizan los siguiente pasos:

$4x + 6 = 2x + 8 \vee 4x + 6 = -2x - 8$ Se aplica la propiedad 8.

$2x = 2 \vee 6x = -14$ Se reducen los términos semejantes.

$x = 1 \vee x = -\frac{14}{6}$ Se divide entre 2 y entre 6, respectivamente.

$x = 1 \vee x = -\frac{7}{3}$ Se simplifica.

Por tanto, el conjunto solución es $\left\{-\frac{7}{3}, 1\right\}$.

Matemáticamente

¿Por qué la ecuación

$|x - 3| = -10$

no tiene solución?

Enlace web

Inecuaciones con valor absoluto

Las expresiones de la forma $|ax + b| \leq c$, $|ax + b| \geq c$, $|ax + b| > c$, $|ax + b| < c$ reciben el nombre de **inecuaciones con valor absoluto**.

Si a es un número real tal que $a \geq 0$, entonces, las inecuaciones con valor absoluto cumplen las siguientes propiedades:

1. $|x| > a$ si y sólo si $x > a \vee x < -a$.
2. $|x| < a$ si y sólo si $-a < x < a$.
3. $|x| \leq |a|$ si y sólo si $x^2 \leq a^2$.
4. $|x| \geq a$ si y sólo si $x \geq a \vee x \leq -a$.
5. $|x| \leq a$ si y sólo si $-a \leq x \leq a$.

EJEMPLOS

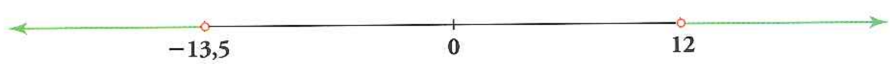
Determinar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones. Luego, representar la solución en la recta numérica.

a. $\left|\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right| > \frac{17}{2}$

Se realizan los siguientes pasos:

$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} > \frac{17}{2} \vee \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} < -\frac{17}{2}$	Se aplica la propiedad 1.
$4x + 3 > 51 \vee 4x + 3 < -51$	Se multiplica por 6.
$4x > 48 \vee 4x < -54$	Se resta 3.
$x > 12 \vee x < -13{,}5$	Se divide entre 4.

Por tanto, la solución corresponde a la unión $(-\infty, -13{,}5) \cup (12, \infty)$, como se muestra en la siguiente recta.



b. $|4x + 9| \leq 5x$

Primero, se tiene que $5x \geq 0$, de donde $x \geq 0$.

Luego, se realizan los siguientes pasos:

$-5x \leq 4x + 9 \leq 5x$	Se aplica la propiedad 5.
$-5x \leq 4x + 9 \wedge 4x + 9 \leq 5x$	Se analiza cada inecuación por separado.
$-9x \leq 9 \wedge -x \leq -9$	Se reducen términos semejantes.
$x \geq -1 \wedge x \geq 9$	Se multiplica por $-\frac{1}{9}$ y por -1, respectivamente.

Finalmente, como $x \geq 0$, $x \geq -1$ y $x \geq 9$, entonces, se halla la intersección de los intervalos para encontrar el conjunto solución, así:

$[0, \infty) \cap [-1, \infty) \cap [9, \infty) = [9, \infty)$

Así, el intervalo solución es $[9, \infty)$ y su representación en la recta es:

Recuerda que...

Al multiplicar una desigualdad por un número negativo, cambia el sentido de la desigualdad.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Determina si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

151. El valor absoluto nunca es un número real negativo.

152. Si a y b son números reales, entonces, se cumple que $|a + b| = |a| + |b|$.

153. El valor absoluto de un número real corresponde a la distancia entre dicho número y cero en la recta numérica.

154. Si $x < y$, entonces, $|x| < |y|$.

La distancia entre dos puntos en la recta numérica está dada por la expresión $d(x, y) = |x - y|$. Expresa los siguientes enunciados utilizando el valor absoluto.

155. El número y se encuentra 5 unidades respecto a x.

156. z se encuentra a menos de w unidades de 7.

157. La distancia entre a y b es superior a c unidades e inferior a 7 unidades.

158. p se encuentra a más de q unidades de 8.

Resuelve las siguientes ecuaciones con valor absoluto.

159. $|x + 3| = 6$

160. $\dfrac{|3 + 2x|}{x + 5} = 4$

161. $|x^2 + 7| + 1 = x$

162. $4 + |3x - 2| = x + 5$

163. $|3x - 1| = |3 + 5x|$

164. $|5x^2 - 7x + 3| = 1$

Observa la siguiente ecuación.

$$|x - 4| + x = x - 5$$

165. Verifica que $x = 3$ no es solución de la ecuación.

166. Explica por qué la ecuación no tiene solución.

Propón una ecuación con valor absoluto cuya solución corresponda al conjunto dado.

167. $\{1\}$

168. $\left\{-\dfrac{11}{2}, \dfrac{5}{2}\right\}$

169. $\{-5, 4\}$

170. $\left\{-\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{5}\right\}$

Halla el conjunto solución para las siguientes inecuaciones.

171. $\left|\dfrac{x - 3}{2}\right| \geqslant 4$

172. $|x + 4| < |3x + 2|$

173. $|x| - |x + 1| < 2$

174. $3|x - 5| \geqslant 9$

175. $|x| + |x + 1| < 5$

176. $1 \leqslant |3x| < x + 1$

En trigonometría, el rango de la función seno toma valores comprendidos entre -1 y 1. En cambio, los rangos de las funciones secante y cosecante toman valores superiores a 1 o inferiores a -1. Utiliza el valor absoluto para expresar el rango de:

177. sen θ

178. sec α

179. csc β

Si a y b son números reales, entonces, se cumple que $|a| \leqslant |b|$ si y sólo si $a^2 \leqslant b^2$.

180. ¿Es válido afirmar que si

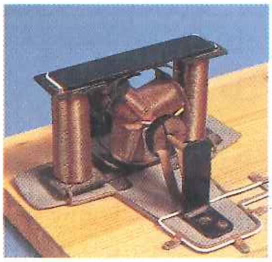
$$x^2 - 4x + 4 < 4x^2 + 12x + 9,$$

entonces, $|x - 2| < |2x + 3|$?

181. Si x y z son números negativos tales que $x < z$, demuestra que $x^2 > z^2$.

182. Utiliza la anterior propiedad para resolver la inecuación $|x - 8| \leqslant |2x + 1|$.

Se especifica que una parte exacta de un motor pequeño tiene un diámetro de 0,623 cm. Para que la parte encaje correctamente, su diámetro debe estar a 0,005 cm del diámetro especificado.



183. Escribe una inecuación con valor absoluto para representar los posibles diámetros de las partes que encajarán.

184. Determina el rango de valores de los posibles diámetros.

En cierta ciudad la temperatura T, en grados Celsius, está dada por la expresión

$$|3T - 15| < 10$$

185. Determina en qué rango se encuentra la temperatura de la ciudad.

186. Representa en la recta numérica el rango de la temperatura de la ciudad.

EJERCICIOS PARA REPASAR

Proposiciones

Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas teniendo en cuenta que:

p: Todo número entero cuya cifra de las unidades es 6 es par.

q: Si un número entero es divisible entre 3, entonces, es divisible entre 6.

r: Todo entero primo diferente de 2 es impar.

s: La suma de dos números pares es múltiplo de 4.

187. $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$

188. $(p \rightarrow s) \wedge (q \leftrightarrow r)$

189. $(\neg s \wedge p) \leftrightarrow \neg(r \vee q)$

190. $(q \wedge s) \rightarrow (\neg r \vee \neg p)$

Simboliza las siguientes proposiciones utilizando cuantificadores.

191. Una recta cuya gráfica es creciente tiene como pendiente un número positivo.

192. La ecuación $m^3 + 1 = 10$ posee soluciones en el conjunto de los números enteros.

193. En algunos paralelogramos las medidas de sus cuatro lados son iguales entre sí.

194. Si x es un número real positivo, entonces, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

Si la proposición $(p \rightarrow q) \vee [q \leftrightarrow (r \wedge \neg s)]$ es falsa, completa cada enunciado escribiendo verdadero o falso.

195. p es ______

196. q es ______

197. r es ______

198. $p \rightarrow q$ es ______

199. $\neg r \vee \neg s$ es ______

Simboliza la negación de cada proposición con cuantificadores. Luego, determina su valor de verdad.

200. Para cualquier número real x se cumple que $x^2 \geqslant 0$.

201. Existen números naturales m, n, p para los cuales se cumple que $m^2 + n^2 = p^2$.

Conjuntos

Realiza lo que se indica con los siguientes conjuntos.

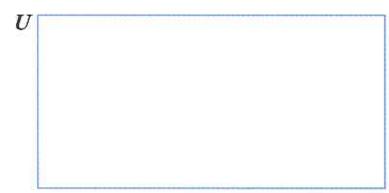
$U = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n \leqslant 30\}$

$A = \{n \in U \,/\, n \text{ es múltiplo de } 4\}$

$B = \{n \in U \,/\, n > 20\}$

$C = \{n \in U \,/\, n \text{ es múltiplo de } 6\}$

202. Representa en un diagrama de Venn los anteriores conjuntos.



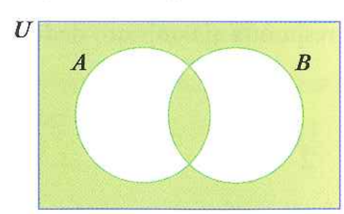
Determina por extensión los siguientes conjuntos.

203. $(A \cup B) \cap C = \{$ ______ $\}$

204. $(B - C)^C \cup A = \{$ ______ $\}$

205. $(B \,\Delta\, C) \cup A = \{$ ______ $\}$

Observa el siguiente diagrama de Venn.



206. Simboliza la operación entre conjuntos que representa la región sombreada.

Marca con un ✓ las proposiciones que son verdaderas.

207. Si $a \in A$, entonces, $a \in A \cup B$. ☐

208. Si $A \subseteq B$, entonces, $A \cup B^C = A$. ☐

209. Si $A \subseteq B$, entonces, $A^C \subseteq B^C$. ☐

210. Si $A \cap B = \varnothing$, entonces, $A \subseteq B^C$. ☐

Resuelve teniendo en cuenta los conjuntos M y N.

$$M = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x < 10\}$$

$$N = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 2 < x < 12\}$$

211. Utiliza los conjuntos M y N para comprobar que

$$(M \cup N) - (M \cap N) = (M - N) \cup (N - M)$$

212. Representa en un diagrama de Venn la operación $(M \cup N) - (M \cap N)$.

U

Números reales

213. Completa la siguiente tabla utilizando el símbolo $\in$ si el número pertenece al conjunto o $\notin$ en caso contrario.

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
4					
$-\frac{4}{5}$					
$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$					
-5					
$2,\overline{17}$					

Representa los siguientes intervalos en la recta numérica:

214. $[-3, 4]$

0

215. $\left(-\frac{5}{4}, 6\right]$

0

216. $(-\infty, 7)$

0

Relaciona cada inecuación cuadrática con su respectivo conjunto solución.

217. $x^2 + x - 6 \geqslant 0$ **a.** $(-\infty, 1) \cup (6, \infty)$

218. $x^2 - 9 < 0$ **b.** $\varnothing$

219. $x^2 - 7x + 6 > 0$ **c.** $(-3, 3)$

220. $x^2 - x - 2 \leqslant 0$ **d.** $(-\infty, \infty)$

221. $x^2 + x + 1 > 0$ **e.** $(-\infty, -3] \cup [2, \infty)$

222. $x^2 + 3 \leqslant 1$ **f.** $[-1, 2]$

223. Utiliza el método para resolver inecuaciones cuadráticas y desarrolla la siguiente inecuación.

$$\frac{6x^2 - x - 1}{2x^2 - 3x - 5} \geqslant 0$$

Determina el conjunto solución para cada una de las siguientes inecuaciones con valor absoluto.

224. $|x - 6| \leqslant 8$

225. $|5x + 1| \geqslant 3$

226. $|2x - 7| > 6$

227. $|3x + 4| < 2$

PROBLEMAS PARA REPASAR

Un granjero cuenta con 140 metros de malla para construir un corral en forma rectangular, con el fin de cuidar de sus animales.

¿Para qué valores del largo del corral, el área es mayor o igual que 825 metros cuadrados?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

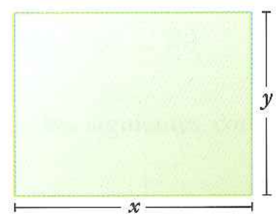
¿Para qué valores del largo del corral, el área es mayor o igual que 825 metros cuadrados?

¿Cuáles son los datos del problema?

Un granjero cuenta con 140 metros de malla para construir un corral con forma rectangular. Además, el área del corral debe ser mayor o igual que 825 metros cuadrados.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se realiza un esquema para representar la situación del problema. Luego, se asignan las variables correspondientes a las longitudes de los lados de acuerdo con los datos y las preguntas del problema.



x: largo del corral. y: ancho del corral.

Segundo, se busca una expresión matemática que relacione a la pregunta con los datos: para el problema se tienen el perímetro y el área del rectángulo.

El perímetro de un rectángulo es la suma de los lados, entonces, $2x + 2y = 140$ y el área del rectángulo es el producto de sus lados $A = xy$.

Tercero, se plantea una inecuación que dependa de una sola variable. Como el intervalo debe estar definido para el largo, entonces, se expresa el área en términos de x, así:

$$2x + 2y = 140$$

$$y = \frac{140 - 2x}{2} = 70 - x$$

$$A = xy = x(70 - x)$$

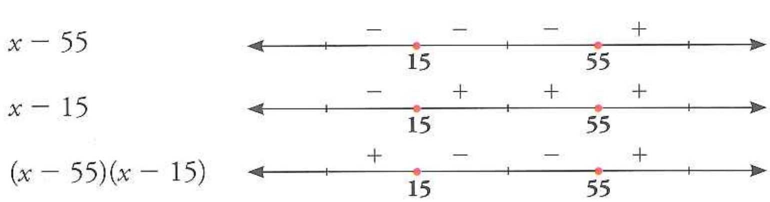
$$A = 70x - x^2$$

La inecuación que se obtiene es $70x - x^2 \geqslant 825$.

Luego, se resuelve la inecuación.

$x^2 - 70x + 825 \leqslant 0$ Se multiplica por -1 y se cambia la dirección de la inecuación.

$(x - 55)(x - 15) \leqslant 0$ Se factoriza.



Finalmente, la solución es [15, 55].

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que las operaciones sean correctas. Luego, para construir un corral con área mayor o igual que 825 metros, el largo debe ser mayor o igual que 15 metros y menor o igual que 55 metros.

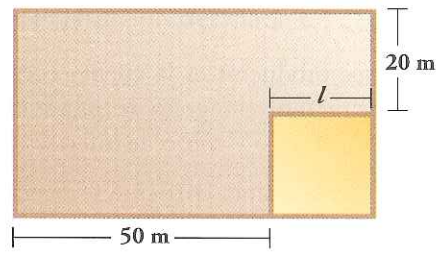
228. Una compañía de telefonía celular ofrece dos nuevos planes a sus usuarios. La tarifa en el plan A de 500 minutos al mes es \$88.600, más \$200 por cada minuto adicional. La tarifa por 500 minutos al mes del plan B es \$81.513, más \$250 por minuto adicional. ¿Cuántos minutos adicionales debe utilizar un usuario al mes, para que el plan B tenga un costo menor que el plan A?

229. La cantidad de kilómetros que recorre un vehículo particular por galón de gasolina, con una velocidad promedio de v kilómetros por hora, se representa mediante la ecuación $16 + 1{,}44v - 0{,}016v^2$, siempre que v esté entre 16 km/h y 120 km/h. ¿Para qué velocidades la cantidad de kilómetros recorridos por galón es 34 km/galón o más?

230. Se quiere sembrar flores en un terreno rectangular. Si la longitud del largo del terreno debe ser igual al triple de la longitud de su ancho, y el área encerrada debe ser mayor que 1.200 metros cuadrados, ¿qué intervalo del ancho puede tener el cultivo de flores?

231. En la manufacturación de cierto tipo de celulares, la dimensión promedio de la pantalla es 5,3 pulgadas. Para que la pantalla encaje sobre el dispositivo, la dimensión de la pantalla no debe diferir del promedio en más de 0,01 pulgadas. Plantea una desigualdad que contenga un valor absoluto que describa el intervalo de dimensiones posibles para la pantalla. Determina el rango de dimensiones que puede tener la pantalla.

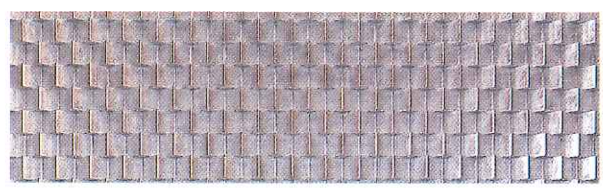
232. En un terreno en forma de cuadrado de lado l, se desea construir un restaurante de comidas rápidas. Para la comodidad de los clientes, la administración decide extender el territorio y resuelve construir un parqueadero aledaño al restaurante, donde uno de los lados del cuadrado se extiende 20 metros y el otro lado 50 metros, formando un terreno rectangular como muestra la figura:



Si el área total del terreno debe ser menor de 2.800 m^2, ¿cuál es el posible valor que puede tener la longitud l?

Resuelve las preguntas 233 y 234 de acuerdo con la siguiente información.

Una compañía fabrica láminas de aluminio de 0,05 pulgadas de espesor con una tolerancia de 0,003 pulgadas.



233. Determina una desigualdad con valor absoluto, que describa el intervalo de espesores posibles para la lámina de aluminio.

234. ¿Cuál es el intervalo de estos espesores?

...Para tomar decisiones relacionadas con los productos bancarios.

Galería de imágenes

Las desigualdades se aplican en diferentes ámbitos en la toma de decisiones. Así, por ejemplo, las inecuaciones se pueden utilizar para comparar los costos de ciertos productos bancarios, ofrecidos por diferentes entidades financieras.

Uno de esos productos es la cuenta corriente, que es aquella que permite el ingreso de fondos en tiempo real y es útil para el pago y cobro de intereses e impuestos.

El manejo de la cuenta corriente se puede realizar por medio de una tarjeta débito, chequera o talonario, con los cuales es posible efectuar retiros que tienen un costo diferente según la entidad bancaria o las necesidades de los clientes.

A continuación se muestran las tarifas de dos entidades bancarias de Colombia en el año 2012.

Entidad 1	
Servicio	**Costo en pesos**
Monto básico	9.350
Retiro cajero entidad	1.020
Retiro cajero externo	3.965
Costo cheque	3.400

Entidad 2	
Servicio	**Costo en pesos**
Monto básico	10.400
Retiro cajero entidad	1.040
Retiro cajero externo	3.500
Costo cheque	3.320

Por ejemplo, una persona natural quiere abrir una cuenta corriente en un banco para realizar transacciones con cheques, entonces, desea saber para qué número de cheques resulta más económico usar la entidad 1 sin importar los retiros por cajero.

Por tanto, si x es el número de cheques emitidos en el mes, entonces, el costo en la entidad 1 debe ser menor que en la entidad 2.

$$C_1 < C_2$$

El costo en la entidad 1 sin importar el número de retiros por cajero es la cuota fija más el producto del costo de cada cheque por el número de cheques.

$$C_1 = 9.350 + 3.400x$$

De igual forma se obtiene el costo en la entidad 2.

$$C_2 = 10.400 + 3.320x$$

Remplazando C_1 y C_2 la inecuación resultante es:

$$9.350 + 3.400x < 10.400 + 3.320x$$

Resolviendo la inecuación se tiene:

$$3.400x - 3.320x < 10.400 - 9.350$$

$$80 \cdot x < 1.050$$

$$x < \frac{1.050}{80}$$

$$x < 13{,}125$$

Es decir, para que a la persona le convenga la entidad bancaria 1, debe emitir como máximo 13 cheques por mes.

1. **¿Cómo se aplican las inecuaciones para elegir un producto ofrecido por una entidad bancaria?**
2. **Si una persona desea abrir una cuenta corriente dependiendo solamente del número de retiros que realiza en cajeros de la entidad durante el mes, ¿para cuántos retiros es más rentable utilizar la entidad 2?**
3. **Si una persona que viaja constantemente requiere una cuenta corriente que le permita realizar más de cinco retiros en el mes a menor costo, ¿qué entidad debe elegir?**
4. **Ingresa a las páginas de entidades bancarias del país y busca las tasas y tarifas que ofrece a sus clientes por cada servicio. Luego, plantea inecuaciones que permitan conocer la viabilidad de tomar alguno de los productos que ofrecen estas entidades y explícalas a tus compañeros de clase.**

Trabaja con AnallogicA

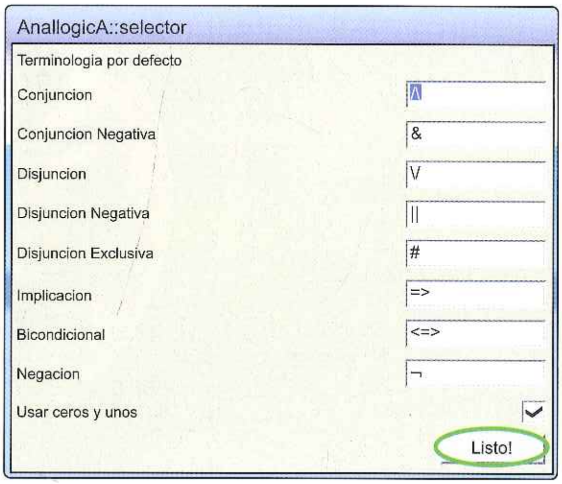
Objetivo: identificar las propiedades de las proposiciones simples en la solución de tautologías.

Descripción: aplicar las propiedades de las proposiciones simples y utilizar las tablas de verdad para reconocer una tautología de la siguiente proposición compuesta $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$.

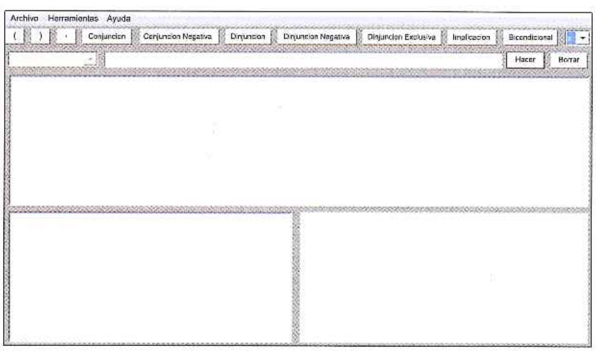
Para acceder a AnallogicA, ingresa y descarga el programa en: sourceforge.net/projects/anallogica/

1. Haz clic en **AnallogicA**.

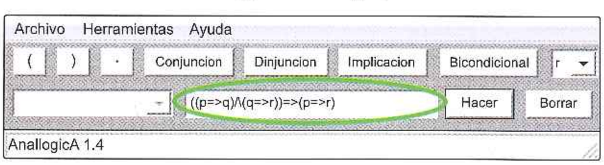
2. Observa la ventana que se despliega. Luego, haz clic en **Listo** para entrar a la opción edición.



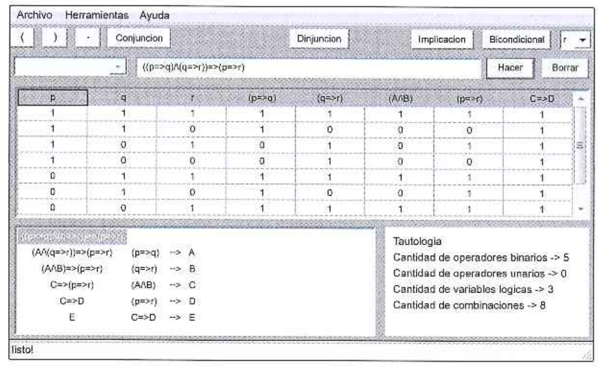
3. Observa la ventana que se despliega. Luego, identifica el área de trabajo y las herramientas asociadas a los operadores lógicos.



4. Ingresa $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ en el cuadro con la ayuda de la herramientas que se muestran en la figura. Luego, haz clic en **Hacer**.

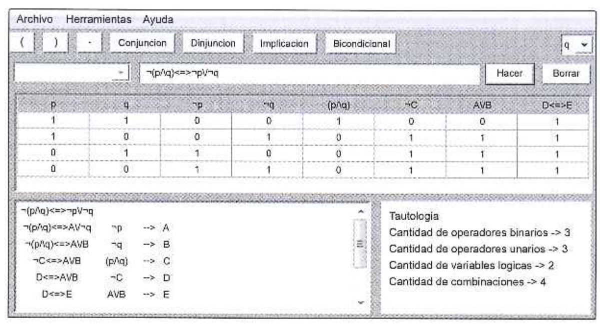


5. Observa la solución donde se muestra el desarrollo en una tabla de verdad y, en la parte de abajo, la explicación detallada de cada operación.



6. Ingresa $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.

   Luego, se comprueba que el resultado es una tautología.



7. Utiliza AnallogicA para identificar y analizar las siguientes proposiciones compuestas.

   Luego, verifica, en cada caso, si es una tautología.

   a. $((\neg p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)) \rightarrow r$

   b. $((p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)) \leftrightarrow q$

   c. $(p \wedge q) \rightarrow p \wedge (q \vee r)$

   d. $(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \rightarrow r))$

   e. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

2 Funciones

Estándar: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Reconocer el **concepto de función** y relacionarlo con situaciones de la vida real.
- Reconocer las características, la **representación gráfica** y la **clasificación de las funciones**.
- Resolver **operaciones entre funciones**.
- Determinar si una función es **inyectiva**, **sobreyectiva** y **biyectiva**.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño

5 Multimedia
1 Galería
6 Actividades
1 Audio
7 Imprimibles
2 Enlaces web

Lo que sabes...

1. Expresa, de forma algebraica y mediante una tabla, la función que asigna a:

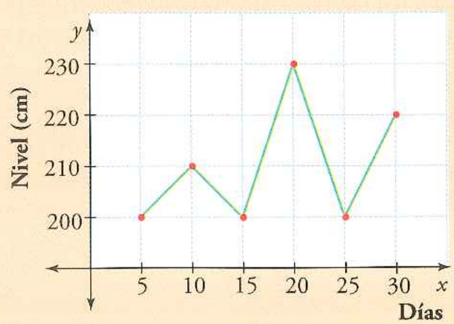
   a. Un número, su triple más cinco unidades.

   ____

   b. Un número, su cuadrado más una unidad.

   ____

2. La gráfica muestra el nivel de agua de un río medido cada cinco días. Expresa la relación mediante una tabla.



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

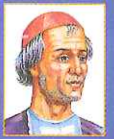
...Para calcular la distancia de frenado de un automóvil.

Una de las dificultades de la movilidad en Colombia son los choques causados por no conservar una distancia prudente entre los vehículos. En las ciudades, estos choques ocurren en las intersecciones o rotondas, mientras que en carretera se dan en tramos rectos, incorporaciones a la vía o salidas.

:: Lee más acerca de este tema en la página 82.

Cronología de las funciones

1325 d. C. — **Inglatera.** Thomas Bradwardine, en su obra el *Tractatus de proportionibus velocitatum*, abordó el concepto de función potencia.



1370 d. C. — **Francia.** Nicolás de Oresme dio a conocer la noción del concepto de función al relacionar dos variables entre sí, para explicar fenómenos naturales.

1633 d. C. — **Países Bajos.** René Descartes realizó trabajos sobre geometría donde se evidenció la idea sobre los conceptos de variable y función.

1692 d. C. — **Alemania.** Gottfried Leibniz dio a la palabra **función** un sentido matemático, donde se aprecia la claridad en la notación y en los cálculos.

1740 d. C. — **Suiza.** Leonhard Euler en sus escritos denotó la relación funcional como $f(x)$.

1755 d. C. — **Francia.** Nicolás de Condorcet mencionó que para definir una función no es necesaria una expresión explícita.

1837 d. C. — **Alemania.** Lejeune Dirichlet definió el concepto de función a partir de la creación de la teoría de conjuntos. Allí establecía la relación entre dos conjuntos, uno inicial y otro de llegada.

1. Funciones

Recurso imprimible

Mediante el trabajo en matemáticas se presentan diferentes conceptos que involucran operaciones, relaciones y otros tantos aspectos que están contenidos dentro del amplio mundo de esta ciencia. Una de las aplicaciones más importantes es el que se genera en torno al significado de las **funciones**.

1.1 Concepto de relación

Para la comprensión del concepto de función, primero se estudia la idea de relación. El significado cotidiano de la palabra relación indica que es una correspondencia o, por así decirlo, una conexión que se establece entre dos o más cosas.

Así por ejemplo, en la cotidianidad se pueden definir relaciones como "ser amigo de", "ser alumno de", "ser docente de", entre otras.

Una relación en matemáticas es una correspondencia que se establece entre los elementos de dos conjuntos. Así, la definición formal de relación es:

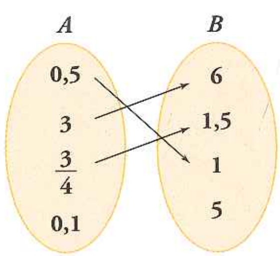


Figura 1.

Si A y B son conjuntos no vacíos, entonces, cualquier subconjunto no vacío R de $A \times B$ se llama una **relación** entre los conjuntos A y B.

Al conjunto A se le denomina **conjunto de partida** y al conjunto B, **conjunto de llegada**. Para nombrar las relaciones se utilizan letras mayúsculas como R, F, H, …

De este modo, en la relación G: "ser la mitad de" definida en los dos conjuntos que se muestran en el diagrama sagital (de la figura 1), se aprecia que:

- A es el conjunto de salida y B es el conjunto de llegada.
- Algunos elementos del conjunto A están relacionados con algunos elementos del conjunto B, por medio de la relación G.

En el diagrama, se muestra que: $0{,}5 \rightarrow 1$

Recuerda que…
El conjunto B también es denominado codominio de la relación.

Lo anterior, se interpreta como: 1 es la imagen de 0,5 y se escribe como la pareja ordenada (0,5; 1). Así, la relación G, se puede expresar como el conjunto de parejas ordenadas

$$G = \left\{(0,5;1),(3;6),\left(\frac{3}{4};1,5\right)\right\}$$

Los elementos del conjunto A que tienen imagen en B reciben el nombre de **dominio** de G; los elementos de B que son imagen de algún elemento de A reciben el nombre de **rango** de G.

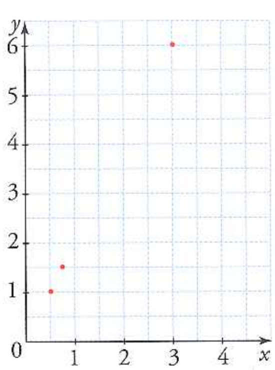


Figura 2.

Toda relación entre conjuntos de $\mathbb{R}$ tiene dos representaciones gráficas: el diagrama de flechas y la representación cartesiana:

- **Diagrama de flechas**: se emplean diagramas de Venn, tanto para el dominio, como para el codominio. Posteriormente, se emplean flechas para indicar los elementos de la relación, como se muestra en la figura 1.
- **Representación cartesiana**: en el eje horizontal, se ubican los elementos del conjunto de partida y en el eje vertical, los elementos del conjunto de llegada. En el plano se representan los puntos correspondientes a las parejas de la relación. La representación cartesiana de la relación G se muestra en la figura 2.

1.2 Concepto de función

Ampliación multimedia

Una relación puede considerarse funcional si a cada elemento del dominio le corresponde uno y solo un elemento del rango. Si una relación es funcional se dice que es una función.

Una **función** f de A en B es una relación en la que a cada elemento $a \in A$ le corresponde un único elemento $b \in B$.

Las funciones se nombran con letras minúsculas como $f, g, h, \dots$

En cálculo, el interés es considerar funciones en las que el dominio y el rango son conjuntos de números reales. Estas funciones se llaman *funciones de variable real* o *funciones reales*.

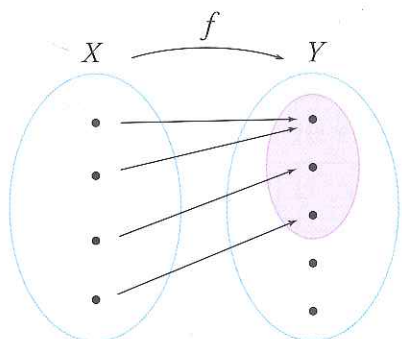
Para que una relación sea una función, debe cumplir las siguientes condiciones:

1. Cada elemento del conjunto A debe estar relacionado con un elemento del conjunto B.
2. Un elemento de A no puede relacionarse con dos o más elementos diferentes de B.

Gráficamente una relación es función, si cualquier recta paralela al eje y que corta a la gráfica de la función, lo hace en un solo punto.

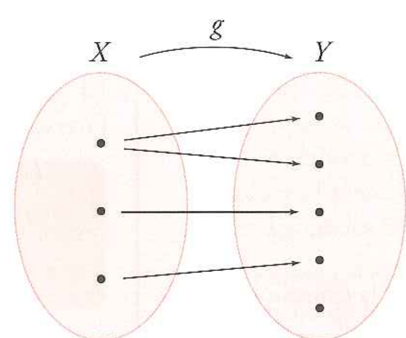
Los diagramas que se muestran a continuación describen una relación que es función y una relación que no es función.

Función



Dominio f Codominio f

No es función



Dominio g Codominio g

En el diagrama de la función, cabe anotar que no todos los elementos del codominio son imagen de algún elemento del dominio, así que en este caso, el rango de la función es un subconjunto del codominio.

Es importante recordar que en el desarrollo del álgebra y la trigonometría se ha trabajado con diferentes funciones de variable real, tales como:

- Función lineal $y = f(x) = mx + b$
- Función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$
- Función trigonométrica seno $y = f(x) = \text{sen } x$
- Función exponencial $y = f(x) = a^x$
- Función logaritmo natural $y = f(x) = \text{Ln } x$

Cada una de estas expresiones describe una relación entre una **variable independiente** x y una **variable dependiente** y.

Recurso imprimible

Historia de las matemáticas

Bernard Bolzano

Una de las ideas más fructíferas y de mayor aplicación en la matemática y en otras ciencias, es la de función.

Desde el siglo XVII, y con la ayuda de la simbología matemática, se hizo posible representar por medio de expresiones, relaciones entre magnitudes físicas del entorno.

En la primera mitad del siglo XIX, se realizó una investigación profunda acerca de los fundamentos del análisis matemático, utilizando los métodos y resultados de la teoría de conjuntos y la teoría de las funciones. Los principales méritos en este campo, corresponden a Bernard Bolzano.

Matemática*mente*

Cuando se compara una relación con una función:

- ¿Qué diferencia fundamental encuentras entre las relaciones f y g representadas en los diagramas sagitales?
- ¿El codominio de una función es el mismo rango de la función?

Explica tu respuesta.

Recurso imprimible

Historia de las matemáticas

Leonhard Euler

La noción moderna de función se desarrolló a partir de los estudios realizados por varios matemáticos de los siglos XVII y XVIII. Uno de ellos, y al que se le atribuye la notación $y = f(x)$, es Leonhard Euler.

1.3 Notación de función

Dado que una función es una correspondencia, esta se puede escribir de diferentes formas, donde cada una de ellas involucra la noción de función.

Para expresar que f es una función de X en Y se usan las siguientes notaciones:

$$f: X \rightarrow Y \text{ o } X \xrightarrow{f} Y$$

La notación $f(x)$ se utiliza para indicar el elemento que en el rango corresponde a x, por la función f, y se le llama el *valor de la función* f en x o la *imagen de* x *por* f. La expresión $f(x) = y$ se lee "f de x igual a y".

Por ejemplo, si $f(x) = -5x^2 + 3$, entonces, f envía x a $-5x^2 + 3$. Así, el valor de la función $f(x)$ cuando $x = -1$ es $f(-1) = -5(-1)^2 + 3 = -2$.

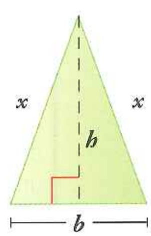
La notación funcional tiene la ventaja de identificar claramente la variable dependiente "y" y la variable independiente "x".

Una función se puede representar de las siguientes formas:

- Expresión algebraica.
- Tabla de valores.
- Gráfica.

EJEMPLOS

1. **Expresar el área de un triángulo isósceles en función de la longitud x de uno de los dos lados congruentes.**



El área de un triángulo está dada por la expresión

$$A = \frac{b \times h}{2}.$$

La altura sobre el lado de diferente longitud, lo divide en dos segmentos congruentes de longitud $\frac{b}{2}$.

La altura divide el triángulo isósceles en dos triángulos rectángulos congruentes. Luego, se tiene que:

$x^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ Se aplica el teorema de Pitágoras.

$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$ Se despeja h.

Luego, la expresión para el área se puede escribir como:

$$A(x) = \frac{b \times \sqrt{4x^2 - b^2}}{4}$$

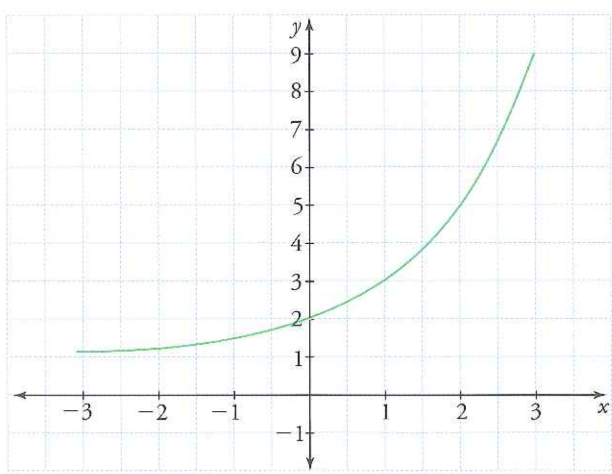
Es importante apreciar que la función del área está representada por una expresión algebraica, donde x es la variable independiente y b es una constante.

2. **Realizar la tabla de valores de $f(x) = 2^x + 1$, para el intervalo $-3 \leq x \leq 3$. Luego, trazar el bosquejo de la gráfica de la función.**

La posible tabla de valores de $f(x) = 2^x + 1$, en el intervalo $-3 \leq x \leq 3$ es:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1,125	1,25	1,5	2	3	5	9

Luego, se ubican las parejas ordenadas en el plano cartesiano y se traza la gráfica de la función así:



Afianzo COMPETENCIAS

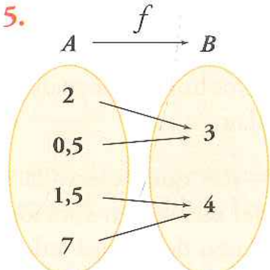
Interpreto • Argumento • Modelo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Responde. Explica con un ejemplo.

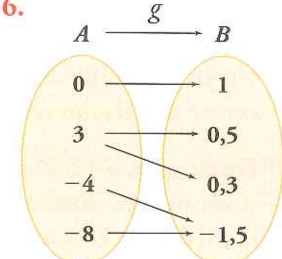
1. ¿Cómo se representa una relación?
2. ¿Cómo se distingue si una relación es una función a partir de su diagrama de flechas?
3. ¿Cómo se distingue si una relación es una función a partir de su representación cartesiana?
4. ¿Cuáles son las formas de representar una función?

Dados los conjuntos *A* y *B*, determina cuáles de las relaciones planteadas son funciones. Justifica tu respuesta.

5.



6.

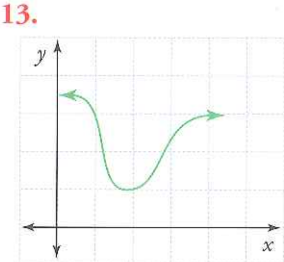


Escribe cuatro parejas ordenadas de cada función, si $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una función de los números naturales en los números naturales.

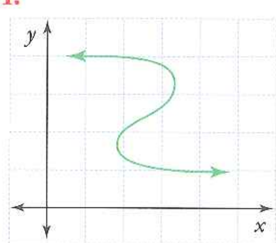
7. $f(x) = x$
8. $f(x) = 2x + 3$
9. $f(x) = x^3 + 1$
10. $f(x) = x + 1$
11. $f(x) = x + 3$
12. $f(x) = 4x^2 + 69$

Indica si las gráficas corresponden a funciones reales de variable real.

13.



14.



Lee y observa la forma como se determina la función $f(x) = x^2 + 1$. Luego, construye la tabla de valores correspondiente en cada caso y realiza la gráfica respectiva:

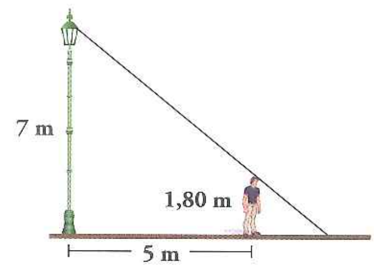
15. $f: R \rightarrow R$
16. $f: R^+ \rightarrow R^+$
17. $f: R^- \rightarrow R$
18. $f: R^- \rightarrow R^+$

Determina la función pedida en cada situación.

19. El área de un pentágono regular en función de la medida de su lado.
20. El área de un hexágono regular en función de la medida de su lado.

Lee y plantea la función que se indica en cada situación. Luego, responde.

Una farola tiene 7 m de altura. A 5 m de su base hay una persona de 1,80 m de altura que empieza a caminar en línea recta alejándose de la farola a una velocidad de 2 m/s.



21. Halla una función que exprese la longitud de la sombra en función del tiempo *t*, que se camina.

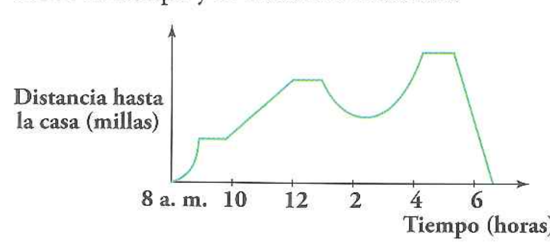
Un recipiente rectangular sin tapa tiene un volumen de 10 m³. El largo de la base de dicho recipiente es el doble que su ancho. Si se sabe que el material en el que se elabora la base cuesta $10.000 el metro cuadrado y el material con el que se elaboran las partes laterales cuesta $6.000 el metro cuadrado:

22. Expresa el costo de elaborar la caja en función del ancho de la base.
23. ¿Cuál es el costo si la longitud del ancho de la base es 5,2 m?

Lee y resuelve.

La siguiente gráfica representa la distancia a la que se encuentra un estudiante de su casa, como función de tiempo.

24. Describe con tus palabras lo que la gráfica indica sobre el tiempo y la distancia recorrida.



Actividad

Recurso imprimible

1.4 Dominio y rango de una función

Si f es una función de variable real, tal que $f(x) = y$, es posible analizar los valores que toma x (variable independiente) para luego, determinar los posibles valores que toma y (variable dependiente).

Dada la función $f: X \rightarrow Y$, se define el **dominio** de f como el conjunto de las primeras componentes de las parejas que están en f. Se simboliza Dom f. El **rango** de f es el conjunto de imágenes $f(x)$ de los elementos $x \in X$. Se simboliza Ran f.

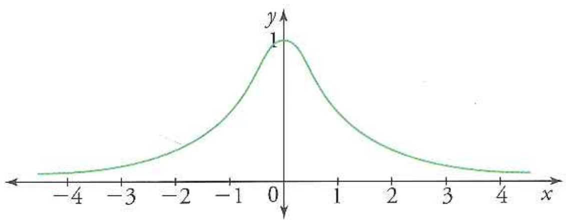
Las funciones de variable real se pueden representar geométricamente mediante una gráfica en el plano $x\,y$, donde el dominio de la función corresponde al eje x y el rango se asocia con los valores del eje y, tal que $y = f(x)$.

Para encontrar el dominio de una función se despeja la variable y y se buscan las restricciones que tiene x. Del mismo modo, para hallar el rango se despeja la variable x y se buscan las restricciones de y.

EJEMPLOS

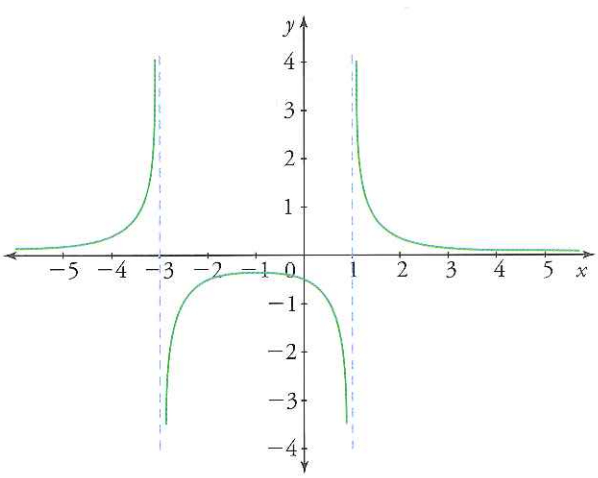
1. Hallar el dominio y rango de las funciones representadas.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$



Al observar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, se tiene: Dom $f = \mathbb{R}$ y Ran $f = (0, 1]$.

b. $g(x) = \dfrac{2}{x^2 + 2x - 3}$

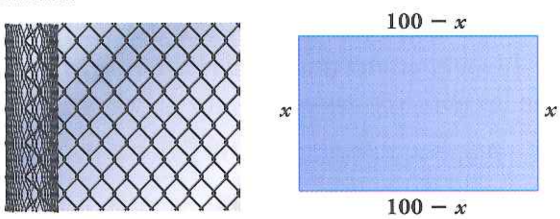


En la gráfica de la función $g(x) = \dfrac{2}{x^2 + 2x - 3}$ se tiene:

Dom $g = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$ y Ran $g = \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup (0, \infty)$.

2. Un granjero utiliza 200 metros lineales de malla para cercar un terreno rectangular.

a. Obtener una función $y = f(x)$ que exprese el área y, en metros cuadrados, del terreno en función de la medida x, en metros, de uno de los dos lados del terreno.



Primero, se indica por x la medida, en metros, de un lado del terreno, como el perímetro del terreno es 200 m, entonces, las otras dimensiones, en metros, son:

$$x \qquad (100 - x) \qquad (100 - x)$$

Finalmente, el área y del terreno está dada por:

$f(x) = (100 - x) \times x = -x^2 + 100x$

$y = -x^2 + 100x$

b. En el contexto del problema, ¿cuál es el dominio de la función obtenida en el punto anterior?

Sin considerar el contexto, Dom $f = \mathbb{R}$.

Sin embargo, en el contexto del problema, los valores de x se limitan a las posibles medidas de un lado del terreno.

Como el perímetro del terreno es 200 m, se tiene:

$$0 < x < 100$$

Por tanto, Dom $f = (0, 100)$.

Dominio y rango de funciones polinómicas

Las **funciones polinómicas** son de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$, donde los números $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son números reales que representan los coeficientes del polinomio y el número natural n expresa su grado (si $a_n \neq 0$).

Una función polinómica está definida para todo número real, por tanto, su dominio es el conjunto $\mathbb{R}$. Su rango es un subconjunto de $\mathbb{R}$, que corresponde con un intervalo, en particular si n es impar: Ran $f = \mathbb{R}$.

Matemáticamente

¿Cualquier función constante, función lineal y función de potencia son funciones polinomiales?

EJEMPLOS

Determinar el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones.

a. $y = f(x) = 3x + 1$.

Esta función polinómica es de grado uno. En particular es una función lineal. Por tanto, su dominio es Dom $f = \mathbb{R}$.

Para hallar el rango, se despeja x.

$y = 3x + 1$ Función dada.

$x = \dfrac{y-1}{3}$ Se despeja x.

Al analizar la nueva expresión, se observa que corresponde a un polinomio de grado uno respecto a la variable y. Por tanto, Ran $f = \mathbb{R}$, como se muestra en la figura 3.

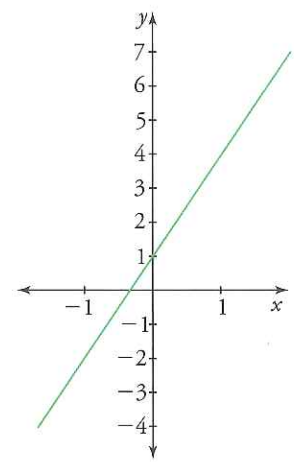


Figura 3.

b. $g(x) = 2x^2 + 8x + 3$

Esta función polinómica es de segundo grado, es decir, es una función cuadrática. Su representación en el plano es una parábola.

Luego, Dom $g = \mathbb{R}$, ya que x puede tomar cualquier valor de $\mathbb{R}$.

El rango de la función se puede hallar en forma algebraica así:

$g(x) = 2x^2 + 8x + 3$

$y = 2x^2 + 8x + 3$

$y = 2(x^2 + 4x) + 3$

$y = 2\left(x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) + 3 - 2\cdot\left(\frac{4}{2}\right)^2$

$y = 2(x + 2)^2 + 3 - 2 \cdot 4$

$y = 2(x + 2)^2 + 3 - 8$

$y = 2(x + 2)^2 - 5$

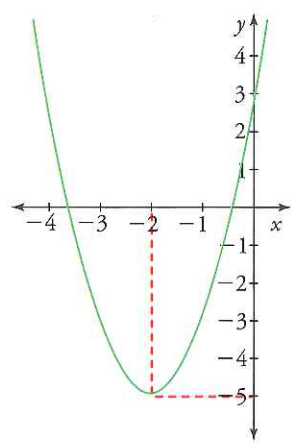
$y = 2(x + 2)^2 + (-5)$

Luego, el vértice de la función cuadrática es $(-2, -5)$.

Como la parábola abre hacia arriba, entonces:

Ran $g = [-5, \infty)$, como se muestra en la figura.

En general, al completar el cuadrado en la ecuación de una función cuadrática $f(x) = x^2 + bx + c$, se obtiene la expresión $y = a(x - h)^2 + k$, en la cual (h, k) es la coordenada del vértice.



Dominio y rango de funciones con alguna restricción

Actividad

Ampliación multimedia

En relación con las propiedades de los números reales, existen ciertas restricciones que se aplican tanto en el dominio como en el rango de una función. Estas restricciones dependen del lugar que ocupa la variable dentro de la expresión dada.

Las siguientes son algunas condiciones que se deben tener presentes en el momento de determinar el dominio de una función.

- El denominador de las expresiones racionales no puede ser igual a cero.
- Las expresiones con radicales cuyo índice es par, no pueden tener cantidades subradicales negativas.
- Los logaritmos solo están definidos para cantidades positivas.

EJEMPLOS

1. Encontrar el dominio de cada función.

a. $h(x) = \sqrt{3x + 2}$

Como las cantidades subradicales de raíces con índice par deben ser positivas o cero, se tiene que:

$3x + 2 \geqslant 0$

$3x \geqslant -2$

$x \geqslant -\frac{2}{3}$

Por tanto, Dom $h = \left[-\frac{2}{3}, \infty\right)$.

b. $g(x) = \text{Log}_3 (x - 5)$

Como los logaritmos están definidos para valores positivos, se realiza:

$x - 5 > 0$

$x > 5$

Por tanto, Dom $g = (5, \infty)$.

2. Hallar el rango de la función $f(x) = \frac{3x - 2}{x + 3}$.

Para hallar el rango, se despeja x, así:

$y = \frac{3x - 2}{x + 3}$

$y(x + 3) = 3x - 2$

$xy + 3y = 3x - 2$

$xy - 3x = -2 - 3y$

$x(y - 3) = -2 - 3y$

$x = \frac{-2 - 3y}{y - 3}$

Como $y - 3 \neq 0$, entonces, y no debe ser 3. Por tanto, Ran $f = R - \{3\}$.

3. Hallar el dominio y el rango de la función

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 1}.$$

Como el denominador de la expresión racional debe ser diferente de cero, se tiene que:

Como $x^2 - 1 = 0$ cuando $x = 1$ o $x = -1$, entonces, la función $f(x)$ no está definida en estos valores.

Por tanto, Dom $f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$.

Para hallar el rango se despeja x en $y = \frac{2}{x^2 - 1}$.

$y = \frac{2}{x^2 - 1}$

$yx^2 - y = 2$

$yx^2 = 2 + y$

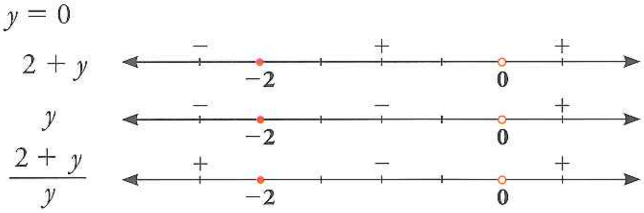
$x^2 = \frac{2 + y}{y}$

Entonces, $x = \pm\sqrt{\frac{2 + y}{y}}$.

Ahora, se resuelve $\frac{2 + y}{y} \geqslant 0$ utilizando la forma gráfica para solucionar desigualdades.

$2 + y = 0$, de donde $y = -2$

$y = 0$



Como $\frac{2 + y}{y} \geqslant 0$, entonces, la solución de la desigualdad es: $S = (-\infty, -2] \cup (0, \infty)$.

Por tanto, Ran $f = (-\infty, -2] \cup (0, \infty) = \mathbb{R} - (-2, 0]$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Modelo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

25. Explica mediante un ejemplo, las restricciones para hallar el dominio y el rango de funciones.

Halla el domino y el rango de cada una de las siguientes funciones.

26. $y = x^2 - 1$

27. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 1}$

28. $y = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

29. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

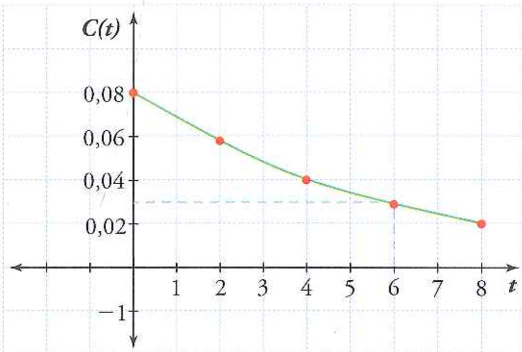
30. $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$

31. $y = x^3 + 2x^2 - 2$

32. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

33. $y = \dfrac{5}{\sqrt{x^3 - 8}}$

Observa la gráfica de la función $c(t)$. Luego, resuelve.

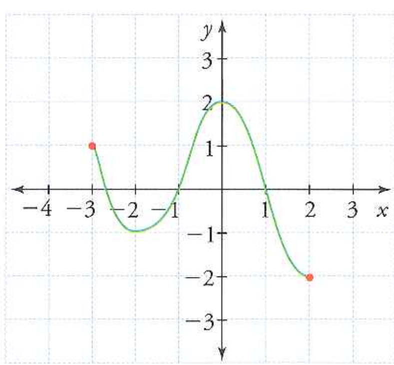


34. Escribe en forma de intervalo el dominio de la función.

35. Supón que Dom $C = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y la función sigue la misma tendencia, ¿cuál podría ser el posible rango de la función?

36. ¿Para qué valores de t el valor de $C(t)$ está entre 0,03 y 0,06?

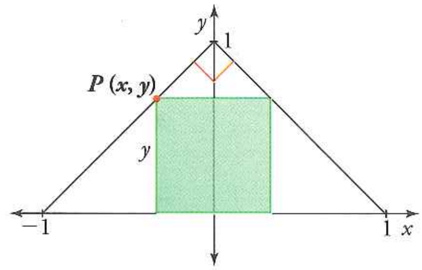
Observa y resuelve.



37. Calcula los valores de f, para $x = -2$ y $x = 2$.

38. Escribe las parejas $(x, f(x))$ para los valores enteros del dominio.

Observa la figura, donde se muestra un rectángulo inscrito en un triángulo rectángulo. Luego, resuelve.



39. Expresa el área del rectángulo en términos de y.

40. Halla el dominio y el rango de la función área.

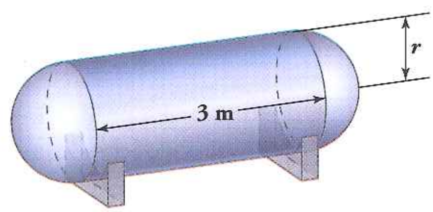
Lee y realiza lo indicado.

Se dispone de varios cubos de hielo en un vaso. Luego, se llena el vaso con agua a temperatura ambiente.

41. Describe la relacion entre la temperatura del agua y el tiempo. Luego, elabora una gráfica.

42. Determina el domino y el rango de la función.

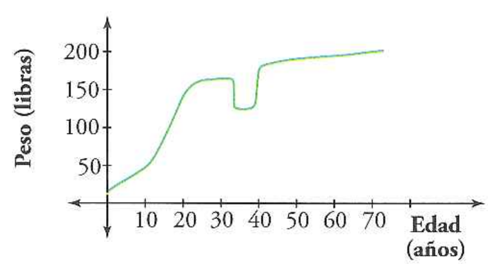
Para almacenar gas propano se desea fabricar un tanque de acero en forma de cilindro horizontal de 3 metros de largo con tapas semiesféricas.



43. Expresa el volumen V (en metros cúbicos) del depósito en función de r.

44. Halla el dominio y el rango de la función volumen.

La gráfica muestra el peso de una persona en relación con su edad.



45. Describe el comportamiento de la función en intervalos de 10 años.

2. Propiedades de las funciones

Actividad

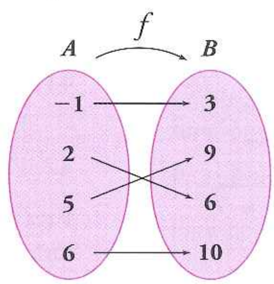
Las funciones se pueden clasificar según como se relacionen los elementos del dominio con los elementos del rango. Así, es necesario tener en cuenta que, en las funciones estudiadas anteriormente, no todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes de los elementos del dominio y, además, que dos o más elementos del dominio pueden tener la misma imagen. Según esto, algunas funciones se pueden clasificar en *inyectivas*, *sobreyectivas* y *biyectivas*.

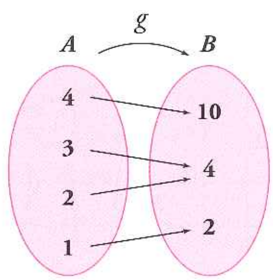
2.1 Función inyectiva

Una función $f: A \rightarrow B$ es **inyectiva** o uno a uno, si no existen dos elementos distintos de A con una misma imagen.

Es decir, $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ o $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Los siguientes diagramas sagitales muestran la representación de una función inyectiva y una función no inyectiva:





Se observa que la función g no es inyectiva, porque los valores 3 y 2 en el conjunto A tienen una misma imagen que es 4. Luego, $3 \neq 2$, pero $g(3) = g(2)$ con lo cual, no se verifica la definición de ser función inyectiva.

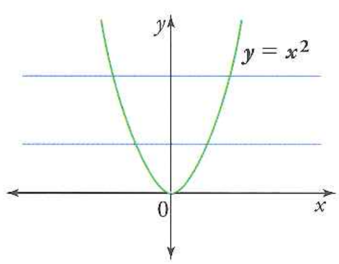
Es posible interpretar gráficamente el concepto de función inyectiva por medio de la prueba de la recta horizontal, la cual se presenta a continuación:

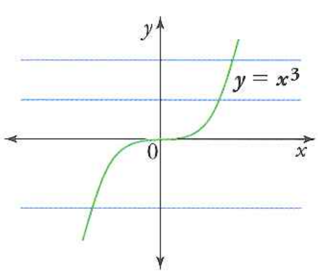
Una función es inyectiva o uno a uno si y sólo si, ninguna recta horizontal interseca su gráfica en más de un punto.

Por ejemplo, la función $y = x^2$ no es inyectiva y la función $y = x^3$ es inyectiva, como se muestra en las siguientes figuras.

Matemática*mente*

¿En qué punto de la gráfica de $y = x^2$ una recta la intersecará en un solo punto? Explica tu respuesta.





En la gráfica correspondiente a la función $y = x^2$ es posible observar que, al trazar una recta horizontal, esta cortará la función $y = x^2$ en más de un punto.

Mientras que en la gráfica correspondiente a la función $y = x^3$ se observa que al trazar una recta horizontal esta línea no cortará la función en más de un punto. Por tanto, la función es inyectiva.

2.2 Función sobreyectiva

Una función $f: A \rightarrow B$ es **sobreyectiva** cuando el rango es igual al codominio. Luego, todos los elementos del conjunto de llegada son imagen de, por lo menos, un elemento del dominio. Es decir, $f: A \rightarrow B$ es sobre $\Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A \,/\, y = f(x)$.

Para determinar si una función es sobreyectiva se debe explicitar cuál es el conjunto de llegada o codominio, para luego compararlo con el conjunto que resulte como rango.

Por ejemplo, para verificar si la función de variable real $f(x) = x^2 - 1$ es sobreyectiva, se identifica el codominio y el rango de la función así:

En este caso, el codominio de la función es el conjunto de los números reales.

Ahora, se halla el rango, como sigue:

$y = x^2 - 1$ Función dada.

$x^2 = y + 1$ Se suma 1 y se organiza.

$x = \pm\sqrt{y + 1}$ Se despeja x.

Como $y + 1 \geqslant 0$, entonces, $y \geqslant -1$.

Luego, el rango de f está determinado por el intervalo $[-1, \infty)$.

Finalmente, como el codominio de la función es $\mathbb{R}$ y el rango es $[-1, \infty)$, se concluye que la función no es sobreyectiva, como se muestra en la figura 4.

Recuerda que...

En una función de variable real o función real

$f(x) = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

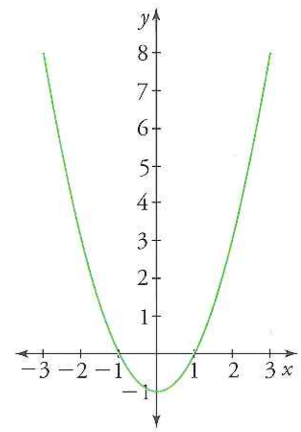


Figura 4.

2.3 Función biyectiva

Una función $f: A \rightarrow B$ es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva. Es decir, cuando todos y cada uno de los elementos del conjunto de llegada es imagen a lo sumo de un elemento del conjunto de partida.

Por ejemplo, para comprobar si la función de variable real $f(x) = x^3 - 2$ es biyectiva, se analiza si es inyectiva y sobreyectiva, como sigue.

Para determinar si es inyectiva:

$f(x_1) = f(x_2)$ Se aplica definición de función inyectiva.

$x_1^3 - 2 = x_2^3 - 2$ Se evalúa la función para x_1 y x_2.

$x_1^3 = x_2^3$ Se suma 2.

$x_1 = x_2$ Se extrae raíz cúbica.

Luego, la función $f(x) = x^3 - 2$ es inyectiva.

Para determinar si es sobreyectiva:

$y = x^3 - 2$ Se remplaza $y = f(x)$.

$x = \sqrt[3]{y + 2}$ Se despeja x.

Luego, Ran $f = \mathbb{R}$. De este modo la función es sobreyectiva.

Finalmente, la función es biyectiva, como se muestra en la figura 5.

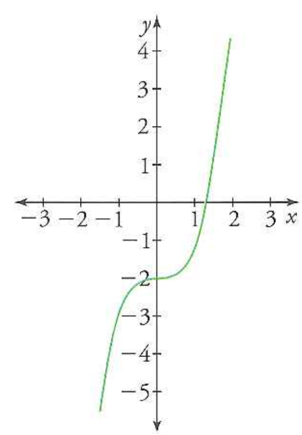


Figura 5.

Es importante tener en cuenta que hay casos en los cuales despejar la variable x es un trabajo dispendioso y complejo. Por tal razón, para verificar si una función es biyectiva se utiliza su representación gráfica.

Matemáticamente

Encuentra una situación diferente que se aplique para cada propiedad:

- Función inyectiva.
- Función sobreyectiva
- Función biyectiva

EJEMPLOS

1. En una biblioteca, todos los libros están catalogados por título, además de otros identificadores, igualmente existen títulos con más de una copia. Considerando la función *o* que tiene como dominio el conjunto de todos los ejemplares de la biblioteca y como codominio el conjunto de títulos de los libros catalogados en la biblioteca. Establecer si la función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

Como hay ejemplares con un mismo título, entonces, existen elementos distintos del dominio de la función *o*, que tienen la misma imagen. Por tanto, la función no es inyectiva.

Por definición, todos los libros de la biblioteca están catalogados por un título, esto significa que para cualquier título de libro catalogado por la biblioteca, existe por lo menos un ejemplar con ese título en la biblioteca. Es decir, cualquier elemento del codominio de la función, es la imagen de algún elemento de su dominio. Por tanto, la función es sobreyectiva.

Finalmente, la función no es biyectiva, ya que no es inyectiva.

2. Se quiere construir un acuario de 4 m³ de volumen y 1,25 m de altura, donde x representa el largo y y el ancho de la base del acuario.

a. Determinar la cantidad M de metros cuadrados de vidrio necesarios, como función de x. Luego, trazar el bosquejo de la gráfica de la función.

Como el volumen es 4 m³, entonces, se tiene:

$$V = 1{,}25 \cdot x \cdot y$$

$$4 = 1{,}25 \cdot x \cdot y$$

$$y = \frac{3{,}2}{x}$$

Ahora, la cantidad de metros cuadrados de vidrio necesarios, en términos de x es:

$$M(x) = xy + 2(1{,}25 \cdot y) + 2(1{,}25 \cdot x) = xy + 2{,}5y + 2{,}5x$$

$$M(x) = x\left(\frac{3{,}2}{x}\right) + 2{,}5\left(\frac{3{,}2}{x}\right) + 2{,}5x$$

$$M(x) = 3{,}2 + \frac{8}{x} + 2{,}5x = \frac{2{,}5x^2 + 3{,}2x + 8}{x}$$

La gráfica de la función $M(x) = \dfrac{2{,}5x^2 + 3{,}2x + 8}{x}$ se muestra en la figura 6.

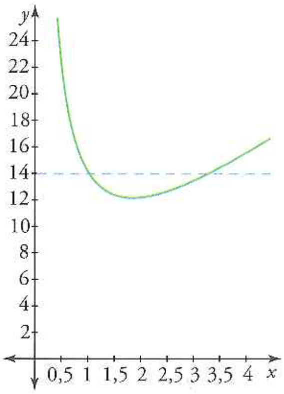


Figura 6.

b. Determinar si la función $M(x)$ es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva, dado que x y $M(x)$ al ser medidas de longitud y superficie, respectivamente, se les puede asignar cualquier número real positivo.

A partir de la gráfica de la función $M(x) = \dfrac{2{,}5x^2 + 3{,}2x + 8}{x}$ se aprecia que:

La función $M(x)$ no es inyectiva porque para un área de 14 m² es posible tener dos posibles valores diferentes $x_1 \neq x_2$, tales que $M(x_1) = 14$ y $M(x_2) = 14$.

Además, la función no es sobreyectiva porque $y = 1$ no es imagen de ningún x.

Finalmente, la función no es inyectiva, ni sobreyectiva, ni biyectiva.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde. Explica con un ejemplo.

46. ¿Cómo se identifica si una función es inyectiva, a partir de su representación gráfica?

47. ¿Cómo se determina si una función es sobreyectiva, a partir de su expresión algebraica?

Determina si cada función dada es inyectiva. Justifica tu respuesta.

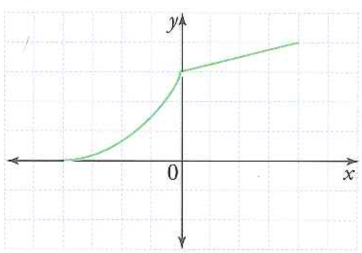
48.

x	0	−1	1	2	3
y	1	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2

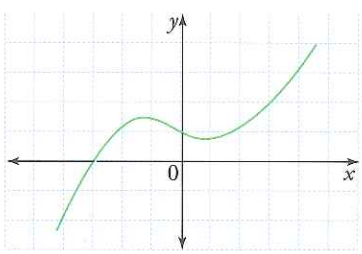
49.

x	−2	−1	0	1	2
y	1	0	1	4	9

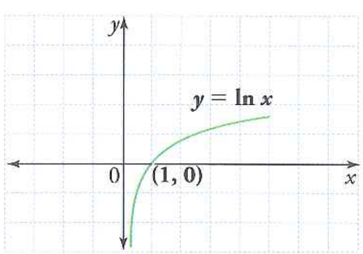
50.



51.



52.



Determina, en cada caso, si el enunciado es falso o verdadero. Justifica tu respuesta.

53. La función $f(x) = 8 - 4x$ es inyectiva. ( )

54. La función $g(x) = 7x^2 - 5$ es sobreyectiva. ( )

55. La función $h(x) = 2 \text{ Log } x$ es biyectiva. ( )

Escribe la expresión algebraica de una función que cumpla con las condiciones dadas.

56. Una función inyectiva tal que no sea sobreyectiva.

57. Una función sobreyectiva pero que no sea inyectiva.

58. Una función biyectiva.

Determina cuáles de las siguientes funciones son inyectivas. Para las funciones que no sean inyectivas, encuentra un ejemplo que muestre esta situación.

59. $h(x) = (x + 1)^2$

60. $f(x) = -2x^3 - 1$

61. $y = \dfrac{4}{x - 2}$

62. $f(x) = \sqrt{x + 6}$

63. $h(x) = \sqrt{4 - x}$

64. $g(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$

Determina cuáles de las siguientes funciones son sobreyectivas. Justifica tu respuesta.

65. $f(x) = x^3$

66. $f(x) = \sqrt{x}$

67. $f(x) = \text{sen } x$

68. $f(x) = \cos x$

Lee y resuelve.

69. Si el costo de una boleta para un concierto aumenta en x pesos, el incremento del beneficio en miles de pesos está dado por la función $g(x) = 24 - 5x + x^2$, $x > 8$. ¿Es posible afirmar dentro del contexto que la función es biyectiva? Justifica tu respuesta.

Lee y responde.

En una fábrica el costo de x camisas está dado por la siguiente expresión: $C(x) = 3x^2 + 5$.

70. ¿Cuánto valen 1.000 camisas?

71. ¿Cuál sería el dominio de la función costo para esta situación?

72. En este contexto, ¿la función es biyectiva? Justifica tu respuesta.

2.4 Simetría en funciones

Actividad

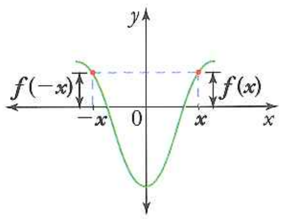


Figura 7.

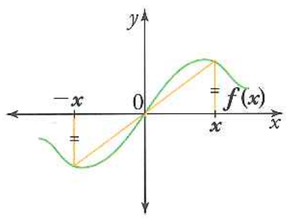


Figura 8.

La **simetría** es un rasgo característico de las formas geométricas, como los polígonos regulares, e incluso de algunos elementos de la naturaleza como las hojas de los árboles o el mismo rostro humano.

En cálculo, el concepto de simetría se relaciona directamente con la forma que tiene la gráfica de una función en el plano cartesiano. De esta forma, se determinan dos aspectos que definen algebraicamente la simetría en una función:

- Si la función es par.
- Si la función es impar.

Se dice que una función es par si es simétrica con respecto al eje y. Por ejemplo, la función que se muestra en la figura 7 es par, en ella se observa que el eje y es el eje de simetría.

Una función es **par** si para cualquier número real x en su dominio, el número $-x$ está también en su dominio y se cumple:

$$f(-x) = f(x)$$

En forma similar, se dice que una función es impar si es simétrica con respecto al origen; por ejemplo, la función que se muestra en la figura 8 es impar.

Una función es **impar** si para cualquier número real x en su dominio, el número $-x$ está también en su dominio y se cumple:

$$f(-x) = -f(x)$$

Matemáticamente

¿Una función puede ser simétrica respecto al eje x? Explica tu respuesta.

EJEMPLOS

1. Determinar si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos.

a. $f(x) = x^4 + 15$

$f(-x) = (-x)^4 + 15$

$\quad = x^4 + 15$

Como $f(-x) = f(x)$, entonces, $f(x)$ es par.

b. $g(x) = 5 \text{ sen } x + x$

$g(-x) = 5 \text{ sen } (-x) + (-x)$

$\quad = -5 \text{ sen } x - x = -(5 \text{ sen } x + x)$

$-g(x) = -(5 \text{ sen } x + x)$

Como $g(-x) = -g(x)$, entonces, $g(x)$ es impar.

c. $h(x) = 7x^3 + 2$

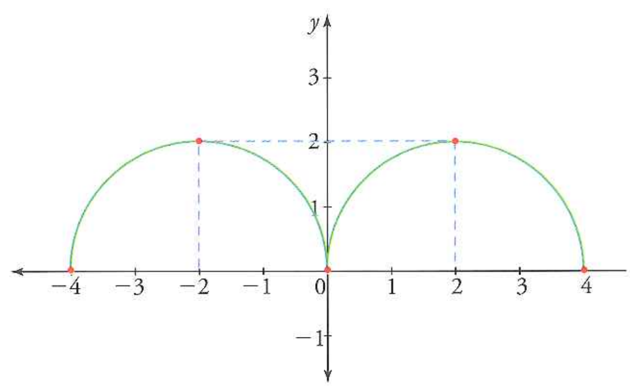
$h(-x) = 7(-x)^3 + 2$

$\quad = -7x^3 + 2$

$-h(x) = -7x^3 - 2$

Finalmente, como $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, entonces, la función $h(x)$ no es par ni impar.

2. Observar la gráfica de la función $c(x)$. Luego, clasificarla como par o impar o ninguna de las dos.



En la gráfica de la función se observa que para cualquier número real x en el dominio de la función, se tiene que:

- El número real $-x$ está en el dominio de la función.
- Además, $c(-x) = c(x)$.

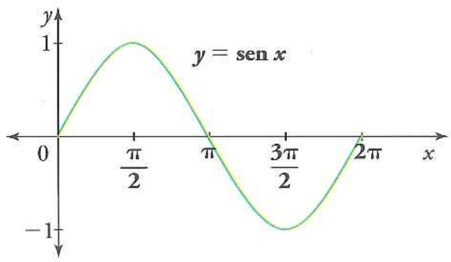
Finalmente, la función $c(x)$ es par.

2.5 Funciones crecientes y decrecientes

En el análisis de funciones es importante estudiar los intervalos donde la función es creciente o decreciente.

- Una función $f: A \to B$ es **creciente** en un intervalo I si para cualquier $x_1, x_2 \in I$ se tiene que: si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- Una función $f: A \to B$ es **decreciente** en un intervalo I si para cualquier $x_1, x_2 \in I$ se tiene que: si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Por ejemplo, la función que se muestra en la figura presenta diferencias en los intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ y $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.



En $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la función crece, porque a medida que aumentan los valores en el dominio, aumentan los valores en el rango.

En $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ la función decrece, porque a medida que aumentan los valores en el dominio, disminuyen los valores en el rango.

Por último, en $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ la función crece.

Es importante tener en cuenta que la función $f(x) = \text{sen } x$ es una función periódica, luego, este comportamiento es similar para cada 2π veces.

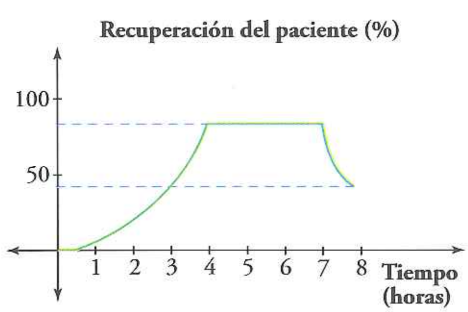
Recuerda que...

Una función es periódica si existe un número positivo, llamado p, tal que siempre que x esté en el dominio de f se puede afirmar que $x + p$ también está en el dominio de f y además:

$$f(x + p) = f(x)$$

EJEMPLO

El efecto de cierto medicamento en el cuerpo de un paciente, después de haber ingerido la primera dosis, se representa en la siguiente gráfica, que relaciona la recuperación del paciente con el tiempo de acción. Analizar el comportamiento de esta función.

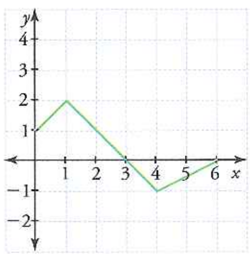


Desde que se ingiere el medicamento hasta la primera media hora se puede inferir que el efecto en el cuerpo es nulo, pues la función es constante. Es decir, no crece ni decrece.

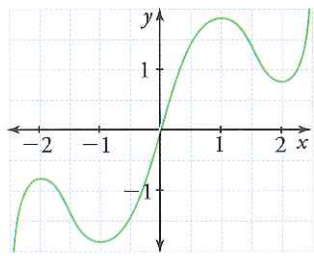
Entre la primera media hora y las cuatro horas, el medicamento inicia su efecto en forma creciente. Luego, la recuperación permanece constante hasta la hora siete después de haber sido ingerido, momento en el cual empieza a disminuir la recuperación en el paciente.

Determina si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos condiciones. Explica tu respuesta.

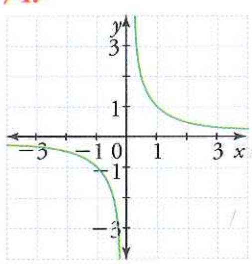
73.



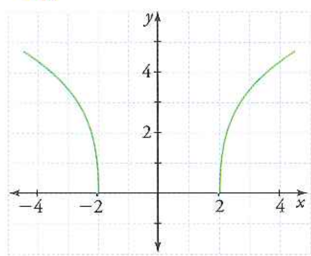
75.



74.



76.



Lee y resuelve.

Sea $f(x)$ una función tal que x y $-x$ están en su dominio, considera las funciones $E(x)$ y $O(x)$.

$$E(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \text{ y } O(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

77. Demuestra que $E(x)$ es una función par.

78. Demuestra que $O(x)$ es una función impar.

Determina, en cada caso, si la función es par, impar o ninguna de las dos.

79. $f(x) = 3x - 1$

80. $f(x) = x^3 - 3x$

81. $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$

82. $f(x) = \frac{1}{x}$

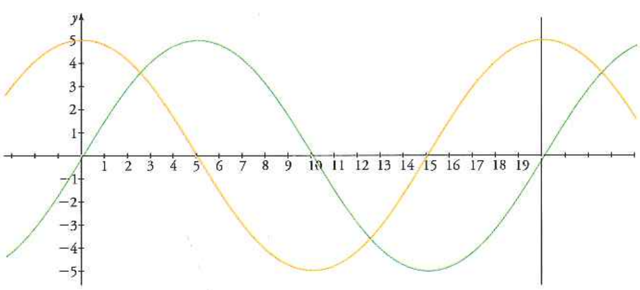
83. $f(x) = 1 - x$

84. $f(x) = x^2 + x$

85. $f(x) = x^2 - x$

86. $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

87. Determina los intervalos en los que cada función es creciente:



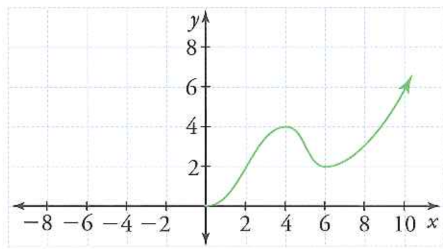
Elabora el dibujo de una gráfica de la función f en cada caso, a partir de las condiciones descritas.

88. Dom $f = [-3, 3]$, creciente en $[-3, -1]$; decreciente en $[-1, 1]$; constante en $[1, 3]$.

89. Dom $f = [-3, 3]$, decreciente en $[-3, -1]$; creciente en $[-1, 1]$; constante en $[1, 3]$.

90. Dom $f = [-3, 3]$, constante en $[-3, -1]$; decreciente en $[-1, 1]$; creciente en $[1, 3]$.

Lee, observa y resuelve. El dominio de la función que aparece en la gráfica es el intervalo $[-10, 10]$.



91. Completa la gráfica para f si es una función par.

92. Con respecto al ejercicio anterior, determina los intervalos donde la función crece.

93. Completa la gráfica para f si es una función impar.

94. Con respecto al ejercicio anterior, determina los intervalos donde la función decrece.

Lee y resuelve.

Una bacteria que invadió un organismo empieza a deteriorarlo hasta que este ingiere un antibiótico de alta efectividad. A las dos horas de ingerido el medicamento, la bacteria ha disminuido a la mitad; en las siguientes dos horas la bacteria se estabiliza, pero en la quinta hora, reacciona con mayor fuerza y crece al doble de lo que había antes de la primera dosis, manteniéndose constante hasta la octava hora. Después de ocho horas de la primera dosis, el organismo ingiere una segunda dosis que promueve un comportamiento similar al de la primera dosis.

95. Elabora una gráfica que describa la relación entre tiempo de eficacia del medicamento y comportamiento de la bacteria.

96. Determina los intervalos en los cuales la función crece, decrece o es constante.

97. Verifica si la función es par, impar o ninguna de las anteriores. Explica tu respuesta.

3. Clasificación de funciones

Cuando se estudian las diferentes funciones de variable real, se propone una clasificación de ellas, a partir de características similares en sus representaciones algebraica y gráfica. Así, en este tema se analizarán los siguientes tipos de funciones:

- Polinómicas: polinómica general, constante, lineal, cuadrática.
- Racionales.
- Radicales.
- Trascendentes: exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
- Especiales: a trozos, valor absoluto y parte entera.

3.1 Funciones polinómicas

Actividad

La forma general de una función polinómica es:

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

con $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Según el grado del polinomio planteado, dichas funciones se pueden clasificar en: constante, lineal, cuadrática, cúbica y polinómica general.

Una función **constante** es de la forma $f(x) = k$, donde $k \in \mathbb{R}$. En este caso, para cualquier número real x en el dominio de la función su imagen a través de la función es k. Por tanto, Dom $f = \mathbb{R}$ y Ran $f = \{k\}$.

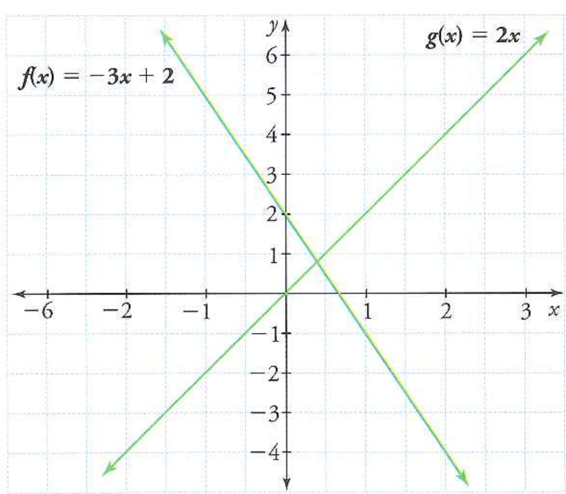
La gráfica de una función constante es una recta paralela al eje x, como se muestra en la figura.

Una función **lineal** es de la forma $f(x) = mx + b$, donde $m, b \in \mathbb{R}$ y $m \neq 0$.

La gráfica de una función lineal es una línea recta de pendiente m y que pasa por el punto $(0, b)$. El número b es el punto de corte con el eje y.

Si $m > 0$, entonces, la función es creciente; si $m < 0$ la función es decreciente. Además, Dom $f = \mathbb{R}$ y Ran $f = \mathbb{R}$.

Por ejemplo, para la función lineal $f(x) = -3x + 2$, se tiene que $m = -3$ y $b = 2$ y para $g(x) = 2x$, se tiene que $m = 2$ y $b = 0$. Luego, sus gráficas son:



Historia de las matemáticas

Euler fue el primero en diferenciar las funciones algebraicas de las trascendentes. Esta distinción fue de gran importancia en el análisis matemático. La diferencia básica manifestada por Euler es:

"Las funciones se dividen en algebraicas y trascendentes; las primeras están formadas únicamente a través de operaciones algebraicas y las segundas suponen en su formación operaciones trascendentes".

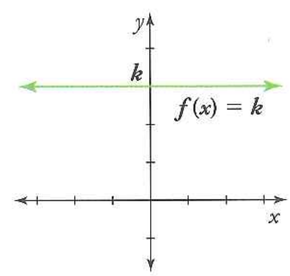


Figura 9.

Una función **cuadrática** es de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ donde } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0.$$

Una función cuadrática también se puede expresar como $f(x) = a(x - h)^2 + k$, donde (h, k) es la coordenada del vértice y $a \neq 0$.

La gráfica de una función cuadrática es una **parábola** que abre:

- Hacia arriba si $a > 0$.
- Hacia abajo si $a < 0$.

Además, el vértice de la parábola cuya ecuación es $f(x) = ax^2 + bx + c$ también se puede encontrar mediante la expresión $V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

Si f es una función cuadrática, Dom $f = \mathbb{R}$ y su rango está determinado así:

- Si $a > 0$, Ran $f = \left[f\left(-\frac{b}{2a}\right), \infty\right)$.
- Si $a < 0$, Ran $f = \left(-\infty, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]$.

Matemáticamente

Explica cómo hallar el vértice (h, k) de la parábola que representa a la función $f(x) = x^2 + 4x + 6$, sin utilizar la expresión:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

EJEMPLO

Determinar el dominio, el rango de la función $f(x) = x^2 - 6x + 9$. Luego, trazar el bosquejo de la gráfica de la función.

Como la función es polinómica, Dom $f = \mathbb{R}$.

Para hallar el rango se encuentra el vértice, así:

$a = 1, b = -6$ y $c = 9$ Se identifican los valores de a, b y c.

$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2(1)} = 3$ Se aplica la expresión para el vértice.

$f(3) = (3)^2 - 6(3) + 9 = 0$ Se halla la imagen de $x = 3$.

Luego, el vértice es $V = (3, 0)$.

Como $a > 0$, entonces, la parábola abre hacia arriba y Ran $f = [0, \infty)$.

Los puntos de corte con el eje x, es decir, las raíces de la función $f(x) = x^2 - 6x + 9$ están determinados por la solución de la ecuación cuadrática $x^2 - 6x + 9 = 0$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$$

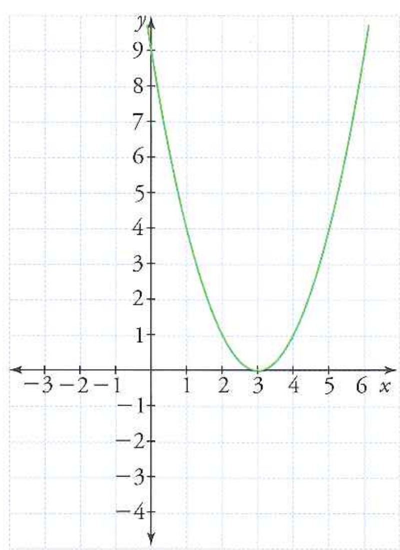
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm 0}{2}$$

$$x = 3$$

De este modo, la parábola cuya función es $f(x) = x^2 - 6x + 9$ corta el eje x en $x = 3$.

Finalmente, la gráfica de la función es:



3.2 Funciones racionales

Una función f es **racional** si es de la forma $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x) \neq 0$.

El dominio de f está formado por todos los números reales excepto los ceros del polinomio que está en el denominador.

Por ejemplo, las funciones definidas como $f(x) = \dfrac{5x-2}{7-x}$ y $g(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-4x}$ son funciones racionales, donde sus respectivos dominios son:

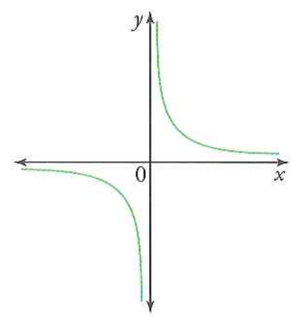
$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{7\} \text{ y Dom } g = \mathbb{R} - \{-2, 0,2\}.$$

Un caso particular de las funciones racionales, con aplicación en diversas áreas, es la función de proporcionalidad inversa, cuya expresión analítica es $f(x) = \dfrac{k}{x}$, donde la constante k es diferente de cero.

En la función $f(x) = \dfrac{k}{x}$, el dominio y rango están determinados por $\mathbb{R} - \{0\}$.

En este caso, a la variable x se le pueden asignar valores muy cercanos a cero tanto negativos como positivos. Es decir, por la izquierda como por la derecha de cero.

Para la función $f(x) = \dfrac{k}{x}$, la recta con ecuación $x = 0$ es una asíntota vertical de $f(x)$. En forma similar, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal de $f(x)$. La gráfica de la función se muestra en la figura.



Para realizar la gráfica de una función racional, se determinan las raíces o ceros del numerador y del denominador, es decir, los valores de x para los cuales la función $f(x) = 0$ y $f(x)$ no está definida. Luego, se identifican las asíntotas verticales y horizontales.

Dada la función $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0}$

Las asíntotas se determinan, así:

Asíntotas verticales

Si $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes, la recta $x = b$ es una asíntota vertical de $f(x)$ si b es un número tal que $Q(b) = 0$.

Asíntotas horizontales

- Si $n < m$, entonces, la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal.
- Si $m = n$, entonces, la recta $y = \dfrac{a_n}{b_n}$ es una asíntota horizontal.
- Si $n > m$, entonces, la función no tiene asíntota horizontal.

Asíntotas oblicuas

Si $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factores comunes y el grado de $P(x)$ es uno más que el grado de $Q(x)$, se dice que la recta $y = ax + b$ es una asíntota oblicua de $f(x)$, la cual se obtiene al realizar el cociente entre los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$.

El tema de las asíntotas oblicuas se tratará con mayor detalle en la unidad de aplicaciones de la derivada.

Matemáticamente

- ¿Qué significado geométrico tiene el término asíntota de una función?
- ¿Existe alguna función racional que no tenga asíntotas?

EJEMPLOS

1. **Realizar la gráfica de la función $h(x) = \dfrac{x-1}{x^2-9}$.**

Primero, se determina el dominio de la función.

Como $x^2 - 9 = 0$, cuando $x = -3$ o $x = 3$, entonces, $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

De lo anterior se deduce que $x = -3$ y $x = 3$ son asíntotas verticales de $h(x)$.

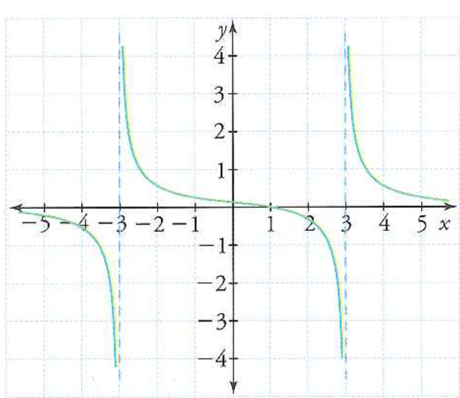
En $h(x) = \dfrac{x-1}{x^2-9}$ se tiene que el mayor exponente del polinomio en el numerador es 1 y el mayor exponente del polinomio en el denominador es 2, entonces, $y = 0$ es una asíntota horizontal de la función.

Luego, se realiza una tabla de valores con números a lado y lado de las asíntotas verticales.

x	$h(x)$
-4	$-0{,}71$
-2	$0{,}6$
-1	$0{,}25$
0	$0{,}11$
1	0
2	$-0{,}2$
4	$0{,}42$

Finalmente, para realizar la gráfica, se trazan primero las rectas que hacen las veces de asíntotas.

Luego, se ubican los puntos encontrados en la tabla de valores y se traza el bosquejo de la gráfica de la función $h(x) = \dfrac{x-1}{x^2-9}$, como se muestra en la figura.



2. **Analizar el comportamiento de la expresión $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$. Elaborar la gráfica de la función.**

Primero, se determina el dominio de la función. Como $x - 1 = 0$, cuando $x = 1$, entonces, $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{1\}$.

De lo anterior, se deduce que $x = 1$ es una asíntota vertical de la función $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.

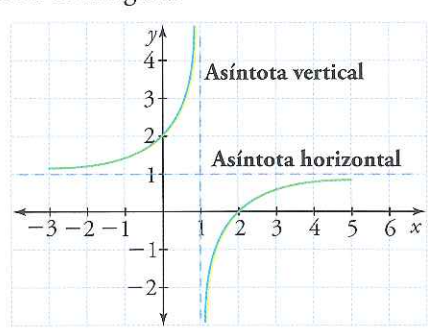
Luego, en la función se puede observar que el mayor exponente del polinomio en el numerador es 1; en forma similar, el mayor exponente del polinomio en el denominador es 1. Luego, la función tiene una asíntota horizontal en el cociente de los términos que tienen el mayor exponente: $y = \dfrac{1}{1} = 1$

Entonces, para $y = 1$ se tiene una asíntota horizontal.

Teniendo en cuenta que 1 no está en el dominio de $f(x)$, se elabora una tabla de valores para conocer algunos puntos de la gráfica, así:

x	$f(x)$
-1	$1{,}5$
0	2
$0{,}5$	3
$1{,}5$	-1
2	0
3	$0{,}5$
4	$0{,}6$

Finalmente, para elaborar la gráfica, se trazan primero las dos rectas que hacen las veces de asíntotas. Luego, se ubican los puntos encontrados en la tabla de valores y se traza el bosquejo de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$, como se muestra en la figura.



3.3 Funciones radicales

Enlace web

Una **función radical** es una función que contiene raíces de variables.

Por ejemplo, las funciones definidas como: $f(x) = \sqrt{8 - 3x}$, $g(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 5x}$, $h(x) = 2x^3 - 5x^{\frac{1}{4}}$ y $k(x) = \dfrac{8x + 4}{\sqrt{2x - 1}}$ son funciones radicales.

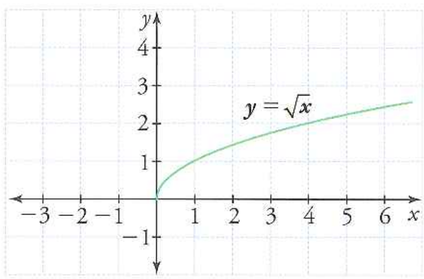
El dominio de una función radical depende del índice de la raíz.

- Si el índice es par, la función no está definida para valores de x para los cuales el radicando es negativo, o los que generen restricciones en el mismo.
- Si el índice es impar, la función está definida para todos los números reales, excepto los valores de x que generen restricciones en el radicando.

Por ejemplo, en la función radical $f(x) = \sqrt{x}$, el dominio y el rango son:

$$\text{Dom } f = [0, \infty) \text{ y Ran } f = [0, \infty).$$

La gráfica de esta función es:



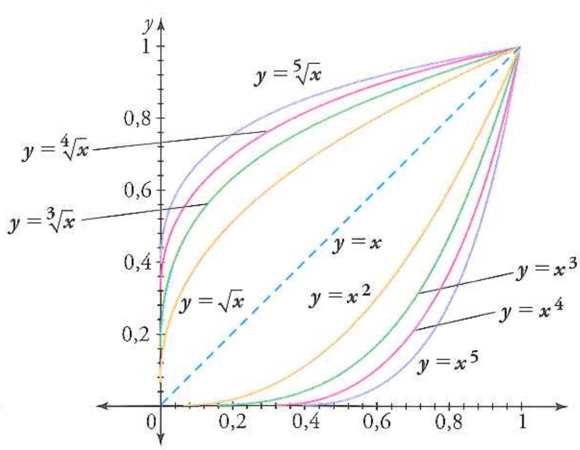
Las gráficas de las funciones radicales $g(x) = \sqrt[3]{x}$ y $h(x) = \sqrt{3 - x}$, se muestran en la figura 10 y en la figura 11, respectivamente.

La gráfica de la función $g(x) = \sqrt[3]{x}$ se diferencia de la gráfica $f(x) = \sqrt{x}$, ya que su dominio no tiene ninguna clase de restricción. Es decir, $\text{Dom } g = \mathbb{R}$.

En la gráfica de $h(x) = \sqrt{3 - x}$ se puede observar que la curva tiene una semejanza a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, sin embargo, su dominio es $\text{Dom } h = (-\infty, 3]$.

Las funciones de la forma $f(x) = x^a$, donde a es un número real se les llama **funciones de potencia**.

Las gráficas de las funciones $y = x$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = x^4$, $y = \sqrt[4]{x}$, $y = x^5$, $y = \sqrt[5]{x}$, se muestran en la siguiente figura en el intervalo [0, 1].



Recuerda que...

Los exponentes racionales se pueden escribir como radicales y los radicales se pueden escribir como exponentes racionales.

Así, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Además, en la radicación se tienen los siguientes elementos:

$$\underbrace{n}_{\text{Índice}} \quad \sqrt[n]{a} = b \qquad a: \text{Radicando} \qquad b: \text{Raíz } n\text{-ésima}$$

Actividad

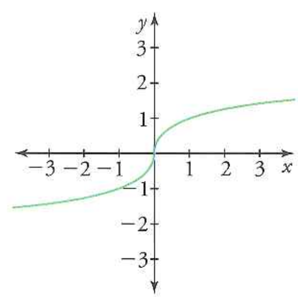


Figura 10.

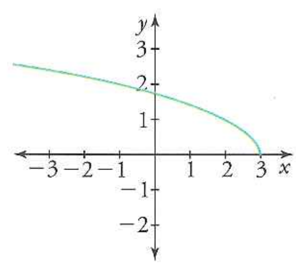


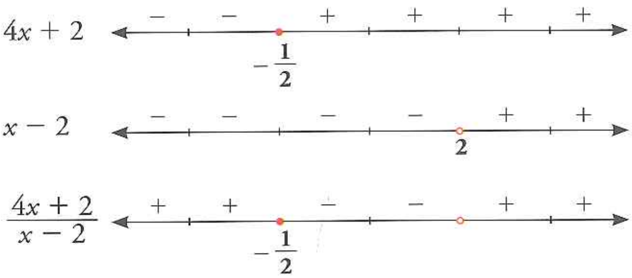
Figura 11.

EJEMPLOS

1. Trazar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{\dfrac{4x+2}{x-2}}$.

Como el índice es par, entonces, el radicando no debe ser negativo, y además el denominador no debe ser cero.

Luego, se resuelve la desigualdad $\dfrac{4x+2}{x-2} \geq 0$, teniendo en cuenta que.



Como la solución de la desigualdad es $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup (2, \infty)$, entonces, se tiene que:

$$\text{Dom } f = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup (2, \infty).$$

Además, las asíntotas son:

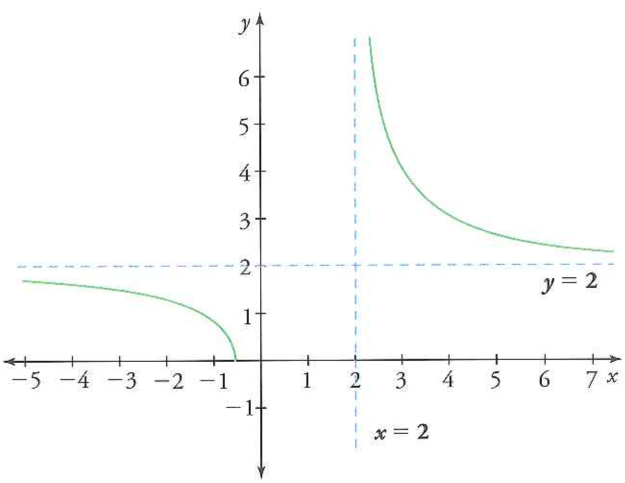
$x = 2$ es una asíntota vertical.

$y = 2$ es una asíntota horizontal.

La tabla de valores muestra lo que ocurre con las imágenes de la función.

x	-4	-3	-2	-1	3	4	5
$f(x)$	1,52	1,41	1,22	0,81	3,7	3	2,7

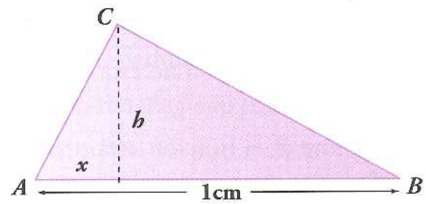
La gráfica de la función es:



Al observar la gráfica se tiene que:

$$\text{Ran } f = [0, \infty) - \{2\}$$

2. Considerar el triángulo rectángulo ABC, representado en la siguiente figura, donde x es la distancia del vértice A al pie de la perpendicular trazada desde C al lado AB.



a. Encontrar la función h que determina la longitud de la altura del triángulo en función de x.

Primero, se identifica que la altura h divide el $\triangle ABC$ en dos triángulos rectángulos semejantes.

Luego, por la proporcionalidad entre los lados correspondientes, se tiene que:

$$\frac{h}{x} = \frac{1-x}{h}$$

$$h^2 = x - x^2$$

$$h = \pm\sqrt{x - x^2}$$

$$h = \sqrt{x - x^2}$$

Por tanto, la función es $h(x) = \sqrt{x - x^2}$

b. Hallar el dominio de la función resultante.

El índice es par. Luego, el radicando no debe ser negativo. Es decir, $x - x^2 \geq 0$.

Al resolver la desigualdad, se obtiene que: $x \geq 0$ y $x \leq 1$.

Finalmente, Dom $h = [0, 1]$.

3. La ley de Kepler sobre el movimiento de los planetas, dice que: los cuadrados de los períodos de revolución (T) de los planetas son proporcionales a los cubos de su distancia promedio al Sol (R). Expresar la distancia promedio al Sol, en términos del período de revolución.

Primero, se expresa en forma matemática la ley de Kepler:

$$T^2 = kR^3$$

Donde, T es el período de revolución, R es la distancia promedio al Sol y k es la constante de proporcionalidad.

$$T^2 = kR^3$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{T^2}{k}}$$

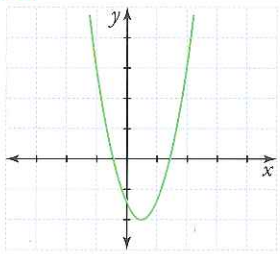
Finalmente, la función es: $R(T) = \sqrt[3]{\dfrac{T^2}{k}}$.

Afianzo COMPETENCIAS

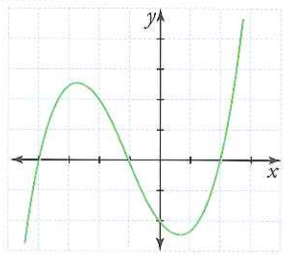
Interpreto • Argumento • Modelo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Determina el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones. Si las funciones representadas son polinómicas, indica el grado que puede tener cada una de ellas. Justifica tu respuesta.

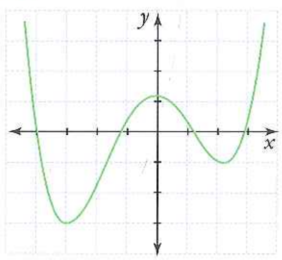
98.



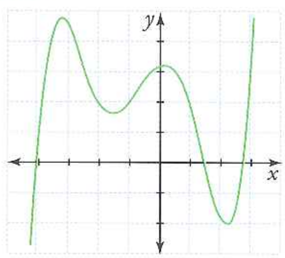
100.



99.



101.



Halla el dominio y el rango de las siguientes funciones. Luego, realiza la gráfica de cada una.

102. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

103. $f(x) = 3x + 1$

104. $f(x) = x^2 - x + 1$

105. $f(x) = -\dfrac{5}{2}x + \dfrac{1}{2}$

106. $f(x) = x^2 - 4x + 3$

107. $f(x) = -4x - 3$

108. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

109. $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 5$

Dibuja la función polinómica que corresponde a cada tabla de valores. Luego, escribe una posible expresión algebraica para cada función:

110.

x	$-0{,}5$	0	-1	1	-2
y	0	1	1	9	9

111.

x	1	0	2	-1	3
y	-9	-8	-8	-5	-5

Halla el dominio de las siguientes funciones. Determina cuáles de ellas tienen asíntotas y sus respectivas ecuaciones.

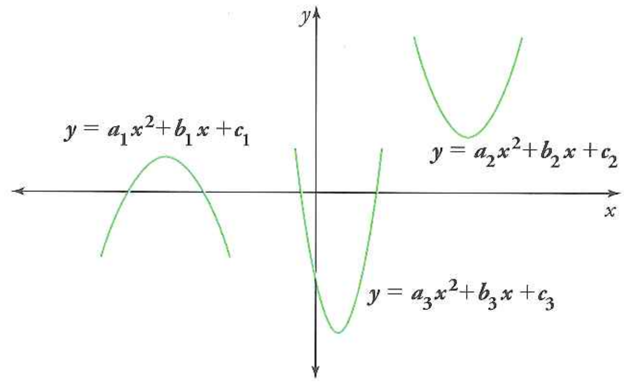
112. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{x + 2}$

113. $f(x) = \sqrt{x + 2}$

114. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3}{x^2 - 1}$

115. $f(x) = \sqrt{-x + 2}$

116. Observa las siguientes funciones cuadráticas. Luego, explica sus diferencias y sus semejanzas.



Escribe V si el enunciado es verdadero o F, si es falso. Justifica tu respuesta.

117. Toda función polinómica de tercer grado es impar. ( )

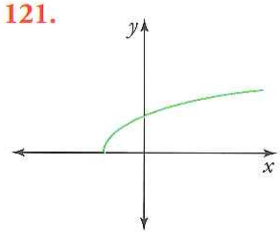
118. Todas las funciones polinómicas de cuarto grado tienen como rango un intervalo de los números reales. ( )

119. Toda función racional tiene asíntota. ( )

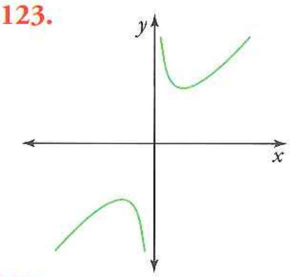
120. El rango de toda función polinómica de grado impar es el conjunto de los números reales. ( )

Relaciona cada gráfica con su respectiva función.

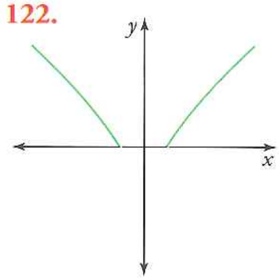
121.



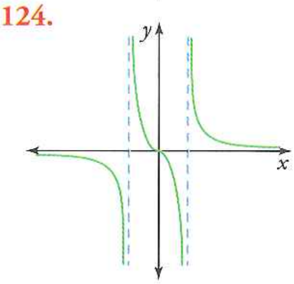
123.



122.



124.



a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

b. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

c. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

d. $y = \sqrt{x + 2}$

R **Resuelve, si $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-x-6}$.**

125. Simplifica la función.

126. Halla las asíntotas, de la función.

127. Elabora una tabla de valores teniendo en cuenta el dominio de la función.

128. Realiza el bosquejo de la gráfica de la función.

129. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función.

130. Analiza si la función es par, impar o ninguna de las dos.

R **Escribe funciones con las siguientes características. Luego, realiza la posible gráfica de cada función.**

131. Una parábola que corte al eje x en $x = 3$ y $x = 5$.

132. Una parábola que corte al eje x en $x = 2$, solo una vez.

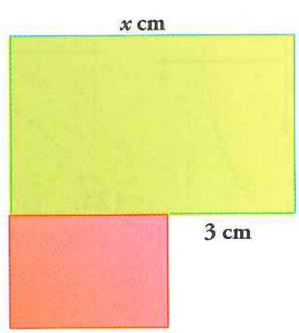
133. Una función cúbica que corte al eje x en $x = -3$, $x = -1$ y $x = 1$.

134. Una función cúbica que corte una vez al eje x, en el punto $x = 5$.

135. Una función polinómica de cuarto grado que corte al eje x en $x = -1$, $x = 3$, $x = 4$ y $x = 5$.

S **Lee, observa y resuelve.**

La siguiente figura tiene un área de 40 cm^2 de superficie y está formada por dos rectángulos, además, el área del rectángulo rojo es de 10 cm^2.



136. Muestra que el perímetro de la figura en función del lado del rectángulo verde está dado por la expresión analítica $f(x) = 2x + \dfrac{60}{x} + \dfrac{20}{x-3}$.

137. Expresa f como función racional de la forma $\dfrac{p(x)}{q(x)}$.

S **Lee, observa y resuelve.**

La altura de un chorro de agua en metros, relativa desde el suelo, está dada por una función que depende de la distancia horizontal x, en metros, por la función:

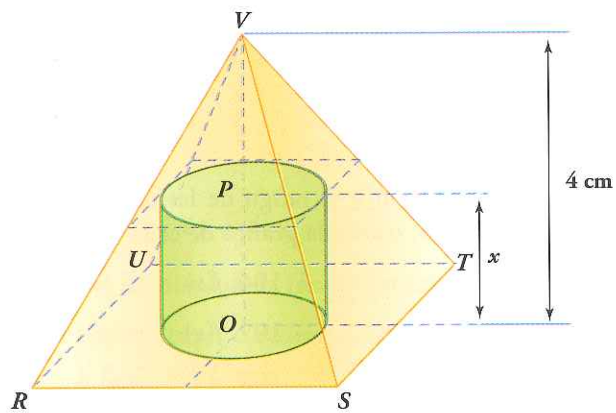
$$h(x) = -\frac{5}{2}x^2 + 5x$$

138. Determina la altura máxima y el alcance máximo del chorro de agua.

139. Calcula la distancia horizontal, entre dos puntos para los cuales la altura del chorro es igual a 0,9 metros.

S **Lee, observa y resuelve.**

En la figura se muestra una pirámide de base cuadrada, con un cilindro inscrito, donde el área de la base de la pirámide es 16 cm^2. El eje del cilindro coincide con la altura de la pirámide.



140. Expresa el volumen del cilindro como una función que depende de x. Luego, halla el dominio de la función.

141. ¿Entre qué valores deben variar los valores de x de manera que el volumen del cilindro sea mayor que 2π?

S **Lee y resuelve.**

La altura en metros de un árbol t años después de haber sido sembrado, está dada por $h(t) = \dfrac{8t+1}{t+2}$.

142. ¿Cuál era la altura del árbol cuando fue sembrado?

143. Determina analíticamente cuánto tiempo le llevó el árbol alcanzar los cinco metros de altura.

144. ¿El árbol llegará a tener una altura superior a 9 metros? Justifica tu respuesta.

3.4 Funciones trascendentes

Las **funciones trascendentes** tienen la particularidad que la variable independiente toma las veces de exponente, está afectada por un logaritmo o por una función trigonométrica. Así, las siguientes son funciones trascendentes:

- Función exponencial.
- Función logarítmica.
- Funciones trigonométricas.

Función exponencial

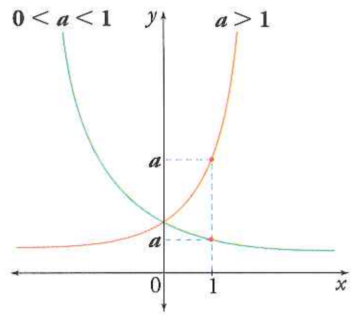
Ampliación multimedia

Una **función exponencial** es de la forma $f(x) = a^x$, donde a es un número real positivo diferente de 1.

En una función exponencial $f(x) = a^x$ se tiene Dom $f = \mathbb{R}$ y Ran $f = \mathbb{R}^+$.

La función exponencial tiene las siguientes características:

- Si $0 < a < 1$, la función es decreciente.
- Si $a > 1$, la función es creciente.



El punto de corte con el eje y es el punto $(0, 1)$, ya que $f(0) = a^0 = 1$.

La función pasa por el punto $(1, a)$, ya que $f(1) = a^1 = a$.

$y = 0$ es una asíntota horizontal.

Un caso especial de la función exponencial se presenta cuando a es el número irracional, $e = 2{,}7182\ldots$

En la figura 12 se muestran las gráficas de las funciones exponenciales:

$h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $f(x) = e^x$ y $g(x) = 2^x$.

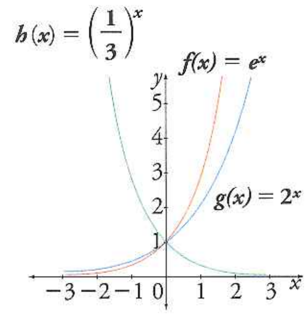


Figura 12.

Función logarítmica

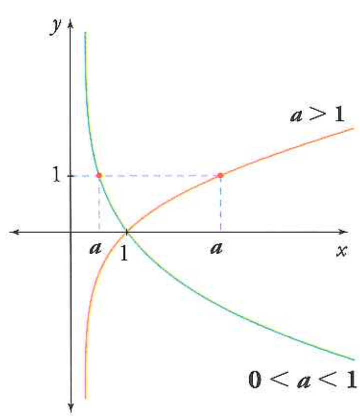
Ampliación multimedia

Una **función logarítmica** es de la forma $f(x) = \text{Log}_a\, x$ donde $a \in \mathbb{R}^+$ y $a \neq 1$.

En una función logarítmica $f(x) = \text{Log}_a\, x$ se tiene Dom $f = \mathbb{R}^+$ y Ran $f = \mathbb{R}$.

La función logarítmica tiene las siguientes características:

- Si $0 < a < 1$, la función es decreciente.
- Si $a > 1$, la función es creciente.



El punto de corte con el eje x es el punto $(1, 0)$, ya que $f(1) = \text{Log}_a\, 1 = 0$.

La función pasa por el punto $(a, 1)$, ya que $f(a) = \text{Log}_a\, a^1 = 1$.

$x = 0$ es una asíntota vertical.

En la figura 13 se muestran las gráficas de las funciones logarítmicas:

$h(x) = \text{Log}_{\frac{1}{3}}\, x$, $f(x) = \text{Ln}\, x$ y $g(x) = \text{Log}_2\, x$.

Recuerda que...

La expresión Log A representa el logaritmo en base 10 de A y la expresión Ln B representa el logaritmo en base e de B, donde $e \approx 2{,}718281$.

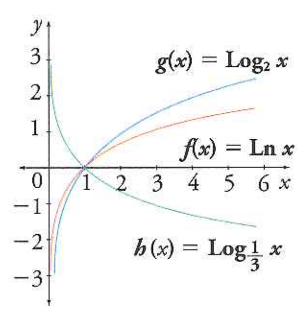
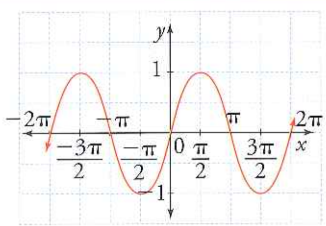
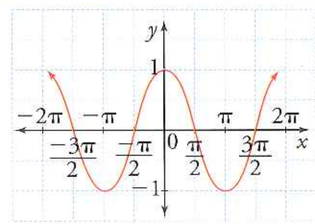
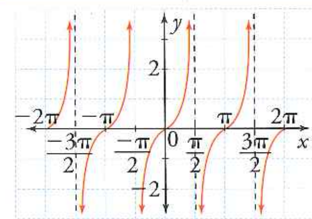


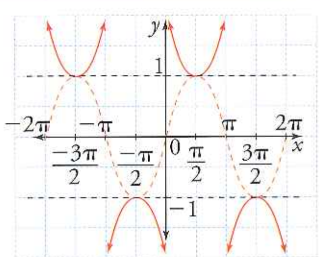
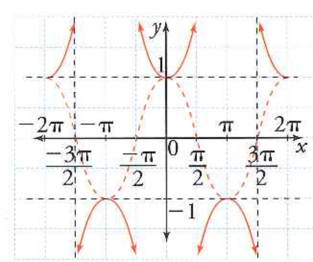
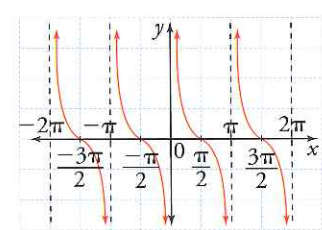
Figura 13.

Funciones trigonométricas

Enlace web

Las **funciones trigonométricas** son:

$f(x) = \text{sen } x$	$f(x) = \cos x$	$f(x) = \tan x$
		
Dom $f = \mathbb{R}$ Ran $f = [-1, 1]$ Período: 2π, ya que $\text{sen } x = \text{sen } (x + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Es una función impar. Interceptos con los ejes: $x = n\pi$, para n entero. $y = 0$	Dom $f = \mathbb{R}$ Ran $f = [-1, 1]$ Período: 2π, ya que $\cos x = \cos (x + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Es una función par. Interceptos con los ejes: $x = \frac{n\pi}{2}$, para n entero impar. $y = 1$	Dom $f = \mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{2}; n \text{ entero impar}\right\}$ Ran $f = \mathbb{R}$ Período: π Es una función impar. Asíntotas verticales $x = \frac{n\pi}{2}$, n entero impar. Interceptos $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$; $y = 0$.

$f(x) = \csc x$	$f(x) = \sec x$	$f(x) = \cot x$
		
Dom $f = \mathbb{R} - \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$ Ran $f = \mathbb{R} - (-1, 1)$ Período: 2π Es una función impar. Asíntotas verticales $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Interceptos No corta a los ejes.	Dom $f = \mathbb{R} - \left\{\frac{n\pi}{2}; n \text{ entero impar}\right\}$ Ran $f = \mathbb{R} - (-1, 1)$ Período: 2π Es una función par. Asíntotas verticales $x = \frac{n\pi}{2}$, n entero impar. Interceptos No corta al eje x, $y = 1$.	Dom $f = \mathbb{R} - \{n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$ Ran $f = \mathbb{R}$ Período: π Es una función impar. Asíntotas verticales $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Interceptos $x = \frac{n\pi}{2}$, n entero impar. No corta al eje y.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Modelo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Escribe las características de las siguientes funciones.

145. Función exponencial.

146. Función logarítmica.

147. Funciones seno y coseno.

Relaciona cada función con su respectiva gráfica. Explica tu elección.

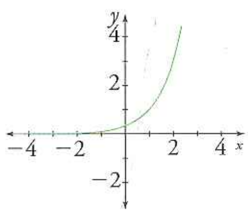
148. $f(x) = 3^x - 1$

149. $f(x) = -\text{Log}_3 x$

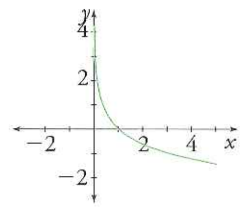
150. $f(x) = 3^{x-1}$

151. $f(x) = -\text{Log}_3 (x - 1)$

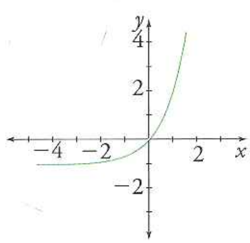
a.



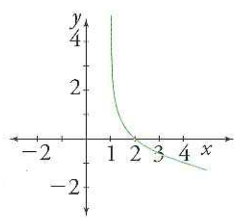
c.



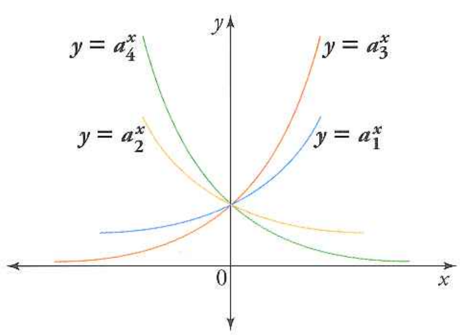
b.



d.



152. **Observa la figura. Luego, ordena de menor a mayor las bases de cada función exponencial.**



Escribe V, si la afirmación es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

153. La función $g(x) = \left(\frac{5}{8}\right)^{-x}$ es decreciente. ( )

154. Si f es una función exponencial, entonces, $f(-3 + 7) = f(-3)f(7)$. ( )

155. La función $p(x) = \cos x + e^x - e^{-x}$ es par. ( )

156. El rango de cualquier función trigonométrica es el conjunto de los números reales. ( )

Realiza la gráfica de las siguientes funciones.

157. $f(x) = \text{sen } 2x$

158. $f(x) = \cos \frac{1}{2}x$

159. $f(x) = 4e^{2x}$

160. $f(x) = \text{Log}_6 x$

161. $f(x) = \cot \frac{x}{3}$

162. $f(x) = \cos^2 x$

Lee y resuelve.

La cicatrización normal de una herida se puede obtener por medio de la función exponencial. Si A_0 es el área original de la herida y A es el área después de n días, entonces, la expresión $A = A_0e^{-0{,}35n}$ describe el área de dicha herida en el n-ésimo día después de ocurrida la lesión.

163. Supón que una herida tenía inicialmente 81 cm^2. ¿Qué tan grande será el área de la herida después de 3 días?

164. ¿Qué tan grande será la herida después de 10 días?

En la teoría de los biorritmos, $f(t) = 100 \text{ sen } \omega t$ se usa para medir el porcentaje del potencial de una persona en el tiempo t (t se mide en días y $t = 0$ determina el nacimiento de la persona).

Por lo general, se miden tres características:
Potencial físico: período de 23 días.
Potencial emocional: período de 28 días.
Potencial intelectual: período de 33 días.

165. Determina el valor de ω para cada característica. Luego, realiza su respectiva gráfica.

166. Encuentra los tiempos para los cuales cada función alcanza el 100% de potencial. Justifica tu respuesta.

La población de aves en una región es inicialmente 1.000 individuos. A medida que aumenta la población, las plantas que constituyen su alimento, desaparecen y esto hace que la población empiece a disminuir por muertes o migración.

El número $N(t)$ de aves en función del tiempo, en meses, viene dado por la expresión

$$N(t) = \frac{6.000}{1 + 5e^{-0{,}3t}}$$

167. ¿Cuál es la población de aves dos meses después de que el primer grupo se radicara en la región?

168. ¿Cuál es la población máxima de aves que se alcanza en la región?

3.5 Funciones especiales

Ampliación multimedia

Algunas funciones no están descritas solamente por una expresión algebraica o algunas otras no presentan una gráfica con un trazo continuo, tales funciones requieren un tratamiento especial por lo cual se estudian de manera independiente. Este tipo de funciones son:

- Funciones a trozos.
- Valor absoluto.
- Parte entera.

Función a trozos

Una función formada por la unión de dos o más funciones, cada una de ellas definida en intervalos disyuntos, recibe el nombre de **función segmentada o función a trozos**.

Así, una función a trozos presenta diferentes expresiones algebraicas en determinados intervalos; en forma general, una función a trozos es de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) \text{ si } x \in I_1 \\ g_2(x) \text{ si } x \in I_2 \\ \dots \\ g_n(x) \text{ si } x \in I_n \end{cases}$$

donde $I_i \cap I_j = \varnothing$ si $i \neq j$

La gráfica de $g(x)$ está formada por todas las partes $g_i(x)$. El dominio y el rango de $g(x)$ es la unión de los dominios y los rangos de cada una de las partes que la forman.

EJEMPLO

Determinar la gráfica, el dominio y el rango de la siguiente función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Primero, se identifican los intervalos en los que se define la función $f(x)$.

Para $x \leqslant 1$. Es decir, el intervalo $(-\infty, 1]$, se realiza la tabla de valores con $f(x) = x^2$, la cual corresponde a una parte de una parábola.

x	1	0	−1	−2
y	1	0	1	4

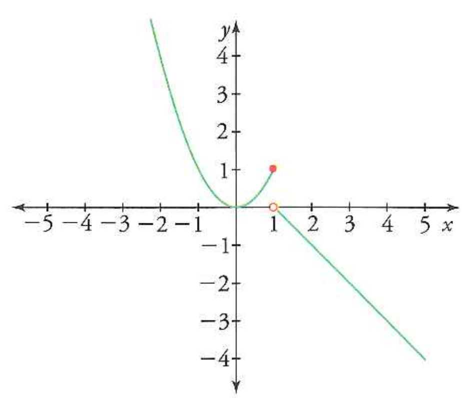
Para el intervalo $(1, \infty)$, se realiza la tabla de valores con $f(x) = 1 - x$, que corresponde a una línea recta.

x	1,5	2	3	4
y	−0,5	−1	−2	−3

Luego, se realiza la grafica de la función de acuerdo con las funciones que la componen.

Se debe tener en cuenta que el valor 1 del dominio se encuentra incluido en el primer intervalo.

Finalmente, la gráfica de la función es:



De acuerdo con la gráfica se puede concluir que:

Dom $f = \mathbb{R}$ y Ran $f = \mathbb{R}$

Función valor absoluto

La **función valor absoluto** se puede considerar como una función definida a trozos. Esta función asigna a cada número real del dominio su valor absoluto, y está definida por:

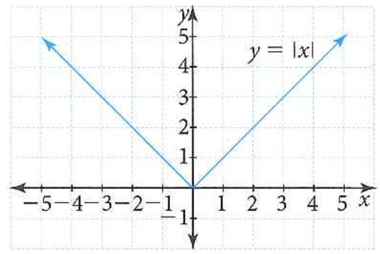
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } -x < 0 \end{cases}$$

El dominio de la función es el conjunto de los números reales:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}.$$

El rango de la función es el conjunto de los números reales no negativos. Es decir, $\text{Ran } f = [0, \infty)$.

La gráfica de la función valor absoluto es:



EJEMPLOS

Realizar la gráfica de cada función. Luego, indicar el dominio y el rango.

a. $f(x) = |x - 4| + 2x - 6.$

Primero, se estudia la variación del signo de $|x - 4|$, a partir de la definición de la función valor absoluto, así:

Dado que $x - 4$ es negativo, para valores menores que 4, se tiene:

$|x - 4| = -(x - 4) = -x + 4$ si $x < 4$.

Ahora, como $x - 4$ es positivo, para valores mayores que 4 y se anula en 4 se tiene:

$|x - 4| = x - 4$ si $x \geqslant 4$.

Segundo, se escribe $f(x) = |x - 4| + 2x - 6$ como una función a trozos, como sigue:

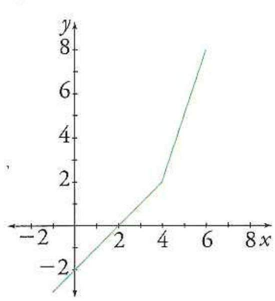
$$f(x) = \begin{cases} (-x + 4) + 2x - 6 & \text{si } x < 4 \\ (x - 4) + 2x - 6 & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

Es decir,

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x < 4 \\ 3x - 10 & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases}$$

Luego, se grafica cada parte de acuerdo con la definición.

La gráfica de la función es:



Finalmente, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ y $\text{Ran } f = \mathbb{R}$.

b. $g(x) = |2x + 4| + |x - 5| - 2x$

Primero, se eliminan los valores absolutos de la función, para tal fin se usa el siguiente diagrama:

-2 $\quad$ 5 $\quad$ x

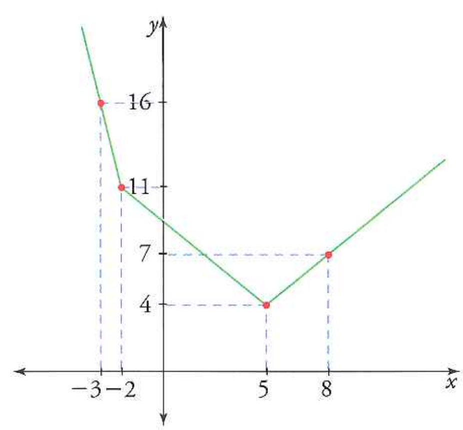
$\lvert 2x + 4\rvert \rightarrow$	$-2x - 4$	$2x + 4$	$2x + 4$
$\lvert x - 5\rvert \rightarrow$	$-x + 5$	$-x + 5$	$x - 5$
$-2x \rightarrow$	$-2x$	$-2x$	$-2x$
$g(x) \rightarrow$	$-5x + 1$	$-x + 9$	$x - 1$

Segundo, se escribe $g(x) = |2x + 4| + |x - 5| - 2x$ como una función a trozos, así:

$$g(x) = \begin{cases} -5x + 1 & \text{si } x < -2 \\ -x + 9 & \text{si } -2 \leqslant x < 5 \\ x - 1 & \text{si } x \geqslant 5 \end{cases}$$

Luego, se grafica cada parte de acuerdo con la definición.

La gráfica de la función es:



Finalmente, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ y $\text{Ran } f = [4, \infty)$

Función parte entera

La función que asigna a cada elemento del dominio el mayor entero, menor o igual que él, recibe el nombre de **función parte entera**. Es decir,

$$f(x) = \|x\| = n \text{ si } n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \leq x < n + 1$$

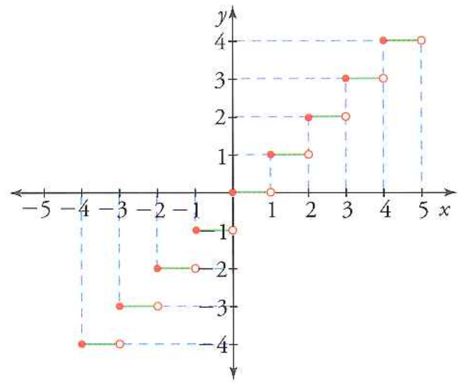
Esta función se define de los números reales a los números enteros, es decir, Dom $f = \mathbb{R}$ y Ran $f = \mathbb{Z}$.

Algebraicamente, la función parte entera se define así:

$$f(x) = \|x\| = \begin{cases} -2 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

En forma similar para todos los números reales.

La gráfica de la función parte entera es:



EJEMPLOS

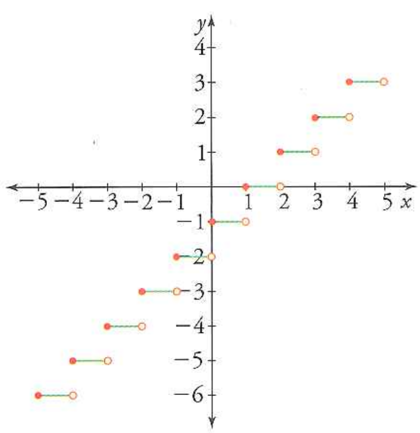
1. Realizar la gráfica de la siguiente función. Luego, hallar su dominio y rango.

$$h(x) = \|x - 1\|$$

Primero, se construye una tabla de valores y se analiza su comportamiento.

x	$-2{,}5$	$-1{,}5$	$-0{,}5$	$0{,}5$	1	$1{,}5$
y	-4	-3	-2	-1	0	0

Luego, la gráfica de la función es:



Finalmente, en la gráfica se muestra que el dominio y el rango de la función h es:

$$\text{Dom } h = \mathbb{R} \text{ y Ran } h = \mathbb{Z}.$$

2. Una compañía de telefonía celular cobra \$240 solamente por marcar un número internacional, de ahí en adelante, cada minuto que dure la llamada genera un incremento de \$240. Encontrar una expresión algebraica para la situación planteada. Luego, realizar la gráfica de la expresión planteada.

Primero, se identifican las variables:

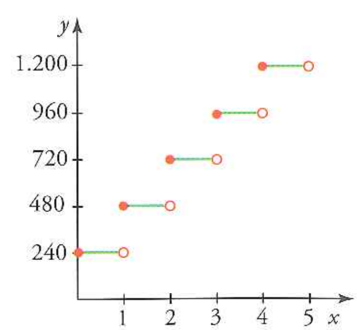
x: duración de la llamada en minutos.

y: valor de la llamada en pesos.

Luego, se representan en una tabla algunos valores según el tiempo de la llamada.

x	0	0,5	1,5	2,5	3	4,5
y	240	240	480	720	960	1.200

Finalmente, el valor de la llamada se puede expresar con la siguiente función: $y = 240\|x + 1\|$.



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Responde. Explica con un ejemplo.

169. ¿Cómo se define una función a trozos?

170. ¿Qué aplicaciones tienen las funciones a trozos?

Elabora la gráfica de cada función.

171. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

172. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

173. $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{2}{x-3} & \text{si } 0 < x \leqslant 4;\, x \neq 3 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

174. $f(x) = |x - 2|$

175. $f(x) = |x^2 - 1|$

176. $f(x) = \| x - 1 \|$

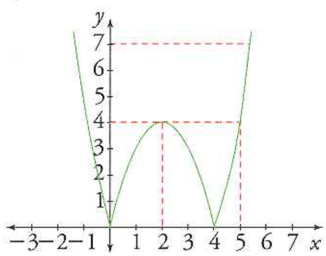
177. $f(x) = |x^2|$

178. $f(x) = \left| \dfrac{1}{x} \right|$

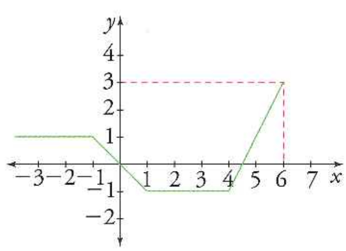
179. $f(x) = \| 2x \|$

Determina una expresión algebraica que describa cada una de las siguientes funciones. Explica tu respuesta.

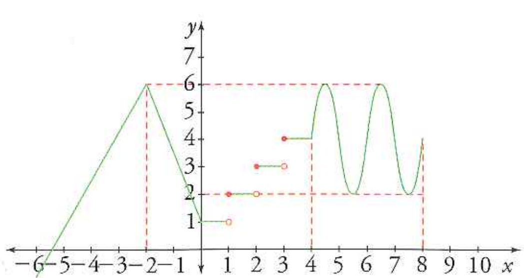
180.



181.



182.



Expresa cada función como una función definida a trozos. Luego, realiza la gráfica de la función.

183. $y = |x| + |x + 2|$

184. $y = |x + 1| - |1 - x|$

185. $y = |2x + 1| - |2 - x|$

186. $y = |x^2 - 4x + 5|$

Lee y resuelve.

En ingeniería es posible encontrar funciones que corresponden a estados de sí o no, o bien activo o inactivo. Por ejemplo, una fuerza externa que actúa sobre un sistema mecánico o una tensión eléctrica aplicada a un circuito, se puede suspender en cierto tiempo. Por ejemplo, la función Heaviside, es una función definida a trozos cuyo valor es 1 para los reales no negativos y 0 en cualquier otro caso.

187. Escribe una expresión algebraica para la función de Heaviside.

188. Elabora la gráfica de dicha función.

Un supermercado ofrece 5 puntos por cada $4.000 de compra.

189. Expresa mediante una función el importe recibido en puntos, dependiendo de la compra realizada.

El costo C de enviar una carta por correo en relación con el peso p de dicha carta viene dado por una función escalonada que se describe a continuación:

$$C(p) = \begin{cases} 0{,}32 & \text{si } 0 < p \leqslant 1 \\ 0{,}55 & \text{si } 1 < p \leqslant 2 \\ 0{,}78 & \text{si } 2 < p \leqslant 3 \\ 1{,}01 & \text{si } 3 < p \leqslant 4 \end{cases}$$

190. Elabora la gráfica de la función costo.

191. Escribe un párrafo interpretando el significado de esta función.

Una empresa de transporte cobra $30.000 por encomiendas cuyo peso en kg esté en el intervalo (0, 25]. A partir de ese peso, cobra $20.000 por cada 25 kg (o fracción de 25 kg) de peso extra.

192. Representa la gráfica del costo de envío de encomiendas hasta 150 kg.

4. Operaciones entre funciones

Las funciones pueden combinarse por medio de las operaciones aritméticas de adición, sustracción, multiplicación y división para obtener nuevas funciones.

Sean f y g funciones cuyos dominios son A y B, respectivamente, entonces se definen las siguientes funciones:

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ Dom $(f+g) = A \cap B$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ Dom $(f-g) = A \cap B$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ Dom $(f \cdot g) = A \cap B$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$ y Dom $\left(\frac{f}{g}\right) = A \cap B$

Las operaciones entre funciones se desarrollan en forma similar a las operaciones entre expresiones algebraicas.

Matemáticamente

¿Por qué el dominio de las funciones que se definen a partir de las operaciones aritméticas es la intersección de los dominios de las funciones dadas?

EJEMPLOS

1. Si $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ y $g(x) = -5x^2 + x$, hallar:

a. $(f+g)(-2)$

Como $f(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 + 1 = -15$ y $g(-2) = -5(-2)^2 + (-2) = -22$, entonces, se tiene:

$(f+g)(-2) = f(-2) + g(-2) = (-15) + (-22) = -37$

b. $(f-g)(-2)$

Como $f(-2) = -15$ y $g(-2) = -22$, entonces, se tiene:

$(f-g)(-2) = f(-2) - g(-2) = (-15) - (-22) = 7$

c. $(f \cdot g)(-2)$

Como $f(-2) = -15$ y $g(-2) = -22$, entonces, se tiene:

$(f \cdot g)(-2) = f(-2) \cdot g(-2) = (-15) \cdot (-22) = 330$

2. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ encontrar: $(f+g)(x)$ y $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$. Luego, realizar la gráfica de cada una y determinar sus respectivos dominios.

Para $(f+g)(x)$, se tiene: $(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x^2}$

Como, Dom $f = [0, \infty)$ y Dom $g = [-2, 2]$, entonces, Dom $(f+g) = [0, 2]$.

En la figura 14 se muestra la gráfica de $(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x^2}$.

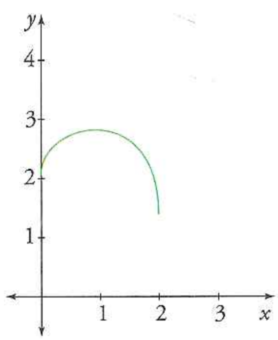


Figura 14.

Para $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, se tiene: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4 - x^2}}$.

Como $g(x) \neq 0$, entonces, $\sqrt{4 - x^2} \neq 0$. Es decir, $x \neq -2$ y $x \neq 2$.

Finalmente, Dom $\left(\frac{f}{g}\right) = [0, 2)$.

En la figura 15 se muestra la gráfica de $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4 - x^2}}$.

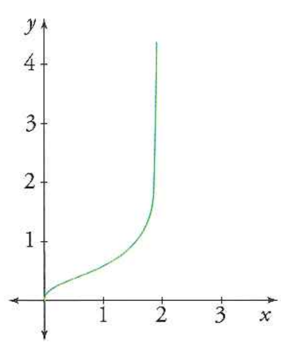


Figura 15.

4.1 Composición de funciones

Recurso imprimible

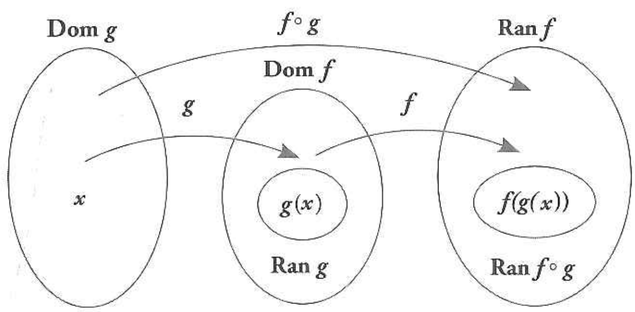
Existe otra forma de combinar funciones para obtener una nueva función:

Si f y g son dos funciones, se define una nueva función $f \circ g$, que se lee f compuesto g (o composición f y g) como:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Donde el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de los números reales x del dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

Esta definición se representa mediante diagramas de Venn, así:



En general, dadas dos funciones arbitrarias g y f, si se toma un número x en el dominio de g, se obtiene su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ pertenece al dominio de f, entonces, se puede calcular $f(g(x))$.

Recuerda que...

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ significa aplicar primero f y después g.

Mientras que

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ significa aplicar primero g y después f.

EJEMPLOS

1. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 1$ hallar:

a. $(f \circ g)(x)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ Definición de composición.

$= f(x^2 - 1)$ Se aplica $g(x)$.

$= \sqrt{x^2 - 1}$ Se halla la imagen de $(x^2 - 1)$ por $f(x)$.

Para encontrar el dominio de $f \circ g$, se resuelve $x^2 - 1 \geqslant 0$ pues toda raíz de índice par debe tener el radicando mayor o igual a cero.

Finalmente, Dom $(f \circ g) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ y Ran $(f \circ g) = [0, \infty)$.

b. $(g \circ f)(x)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ Definición de composición.

$= g(\sqrt{x})$ Se aplica $f(x)$.

$= (\sqrt{x})^2 - 1$ Se halla la imagen de $\sqrt{x}$ por $g(x)$.

$= |x| - 1$ Se aplica $(\sqrt{x})^2 = |x|$.

Finalmente, como Dom $f = [0, \infty)$ y Ran $f = [0, \infty)$, luego, Dom $(g \circ f) = [0, \infty)$. Además, se tiene que aunque la operación algebraica $|x| - 1$ está definida para todo número real, por efecto de la función composición el dominio se ve restringido, como se muestra en la figura 16.

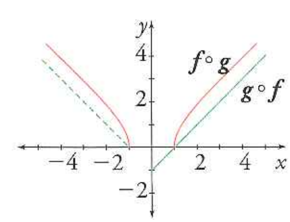


Figura 16.

2. **Si $f(x) = x^2$, determinar la función $g(x)$ tal que $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$.**

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$	Definición de composición.
$f(g(x)) = 4x^2 - 12x + 9$	Se remplaza $(f \circ g)(x)$ por $4x^2 - 12x + 9$.
$[g(x)]^2 = 4x^2 - 12x + 9$	Se halla la imagen de $g(x)$ por $f(x)$.
$[g(x)]^2 = (2x - 3)^2$	Se factoriza.
$g(x) = \pm(2x - 3)$	Se despeja $g(x)$.

Finalmente, $g(x) = 2x - 3$ o $g(x) = -2x + 3$.

3. **La distancia d recorrida, en kilómetros, por un avión con una velocidad de crucero, t horas después de estabilizar la velocidad, está dada por $d(t) = 910t$, $t \geqslant 0$.**

A partir del momento que entra en velocidad de crucero, la cantidad de combustible q, en litros, del depósito del avión está dada, en función de la distancia recorrida d, por $q(d) = 200.000 - 14{,}05d$, $d \geqslant 0$.

a. **Determinar la cantidad de combustible en el tanque del avión en el momento que entra en la velocidad de crucero.**

En el momento en que la aeronave llega a la velocidad de crucero, la distancia recorrida es 0 km. Luego, se tiene:

$q(d) = 200.000 - 14{,}05d$

$q(0) = 200.000 - 14{,}05 \cdot 0 = 200.000$

Por tanto, la cantidad de combustible en el tanque del avión en ese momento es 200.000 litros.

b. **Determinar la distancia recorrida por el avión durante los primeros 90 minutos, después de llegar a la velocidad crucero. ¿Cuál es la cantidad de combustible que queda después de estos 90 minutos?**

Primero, se halla la distancia recorrida en 90 minutos, así:

90 min = 1,5 h

$d(t) = 910t$

$d(1{,}5) = 910 \cdot 1{,}5 = 1.365$

Segundo, se calcula la cantidad de combustible con $d = 1.365$ km.

$q(d) = 200.000 - 14{,}05d$

$q(1.365) = 200.000 - 14{,}05 \cdot 1.365 = 180.821{,}75$

Finalmente, el avión recorre 1.365 km durante los primeros 90 min y la cantidad de combustible que queda en el tanque es 180.821,75 L.

c. **Encontrar una expresión que permita calcular la cantidad de combustible en el tanque del avión después de t horas de alcanzar la velocidad de crucero.**

Para encontrar la expresión, se determina $(q \circ d)(t)$.

$q(d(t)) = q(910t) = 200.000 - 14{,}05 \cdot (910t) = 200.000 - 12.785{,}5t$

Finalmente, la expresión es $q(t) = 200.000 - 12.785{,}5t$, $t \geqslant 0$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Modelo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Responde.

193. ¿Cómo se pueden formar nuevas funciones a partir de funciones?

194. ¿Qué otro tipo de combinación diferente a las expuestas conoces, para formar nuevas funciones?

Dadas las funciones f, g, h, r y t, halla:

$$f(x) = 2x^2 - x - 3 \qquad g(x) = \sqrt{x+5} \qquad h(x) = \frac{1}{x}$$

$$r(x) = x^3 - 1 \qquad t(x) = \frac{x}{x+5}$$

195. $(f + g)(x)$
196. $(h + r)(x)$
197. $(r - t)(x)$
198. $(f \cdot r)(x)$
199. $\left(\frac{t}{h}\right)(x)$
200. $(f + g)(2)$
201. $(h + r)(2)$
202. $(r - t)(-1)$
203. $(f \cdot r)(3)$
204. $\left(\frac{t}{h}\right)(-1)$

Dadas las funciones f y g, encuentra $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ en cada caso:

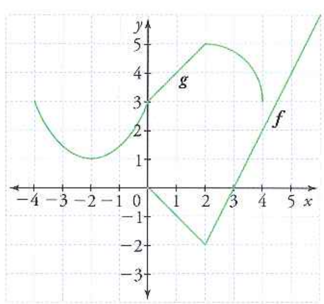
205. $f(x) = 2x^2 - x$ $\qquad g(x) = 3x + 2$

206. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad g(x) = x^3 + 2x$

207. $f(x) = \sqrt{x - 1}$ $\qquad g(x) = x^2 + 1$

208. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ $\qquad g(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

Lee, observa y resuelve. A continuación, se presentan las gráficas de dos funciones, f y g:



Con base en las dos funciones, evalúa las siguientes expresiones. En caso de no estar definidas explica la razón.

209. $f(g(2))$
210. $(f \circ g)(0)$
211. $(g \circ g)(-2)$
212. $g(f(0))$
213. $(g \circ f)(6)$
214. $(f \circ f)(4)$

Lee y resuelve. La composición entre tres funciones se define como $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$.

Con base en lo anterior determina en cada caso la función $(f \circ g \circ h)(x)$.

215. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2 + 2$

216. $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = \dfrac{1}{x}$

Lee y resuelve. Cada una de las siguientes funciones está dada de la forma $(f \circ g)(x)$. Luego, determina cuáles son las funciones f y g que dieron origen a dicha función.

217. $(f \circ g)(x) = (x - 9)^5$

218. $(f \circ g)(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$

219. $(f \circ g)(x) = \sqrt{\tan x}$

Lee y resuelve. Dadas las funciones f y g, halla:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ |x| & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \frac{x+1}{x-4}$$

220. $f(g(x))$
221. $g(f(x))$

Explica de qué manera hay que componer las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4} \qquad g(x) = 5x + 1 \qquad h(x) = \frac{2}{x+1}$$

para obtener las siguientes funciones:

222. $j(x) = 5\sqrt{x^2 + 4} + 1$

223. $k(x) = 25x + 6$

224. $l(x) = \dfrac{x + 11}{x + 1}$

Lee y resuelve.

En un experimento de laboratorio se calienta una placa cuadrada durante 30 segundos. El lado de la placa antes de iniciar el experimento medía 1 cm. Durante los 30 segundos del experimento, el lado de la placa aumenta a una razón de 0,1 cm/s.

225. Determina la longitud del lado de la placa 10 s después de comenzar el experimento. Luego, calcula el área de la placa en ese momento.

226. Escribe una expresión que permita, en cualquier instante del experimento, calcular el área de la placa.

Inversa de una función

Recurso imprimible

> **Recuerda que...**
> Con frecuencia se representa la inversa de una función f mediante f^{-1}, esta notación no debe confundirse con un exponente. Es decir,
> $f^{-1}(x) \neq [f(x)]^{-1}$
> pues $[f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)}$.

Si $f: A \to B$ es una función biyectiva, existe $f^{-1}: B \to A$ y se define como:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y, \forall y \in B$$

La **inversa de una función** cumple las siguientes propiedades:

f^{-1} es una función biyectiva.

$\text{Dom}\, f^{-1} = \text{Ran}\, f$ y $\text{Ran}\, f^{-1} = \text{Dom}\, f$.

La gráfica de f^{-1} es la reflexión de la gráfica de f con respecto a la recta $y = x$.

Para hallar la inversa de una función se utiliza el siguiente procedimiento:

Primero, se escribe $y = f(x)$.

Segundo, se verifica que la función es biyectiva.

Tercero, se despeja x de la ecuación $y = f(x)$ en términos de y, para obtener una ecuación de la forma $x = f^{-1}(y)$.

Cuarto, se intercambia y por x en la nueva función. Así se obtiene $f^{-1}(x)$.

Finalmente, se verifica que:

$(f \circ f^{-1})(x) = x$ y $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

EJEMPLOS

1. **Hallar la inversa de la función $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{5}$. Luego, trazar la gráfica de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.**

Como la función está de la forma $y = f(x)$, se verifica si es biyectiva. En este caso, la función $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{5}$ es una función lineal. Luego, la función es biyectiva.

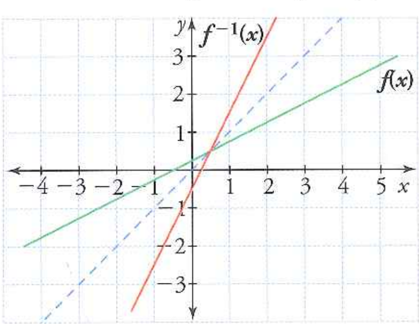
Ahora, se halla la inversa de $y = f(x)$; despejando x se tiene que:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{5} \text{ de donde } x = 2y - \frac{2}{5}$$

Después, se intercambian las variables: $y = 2x - \frac{2}{5}$.

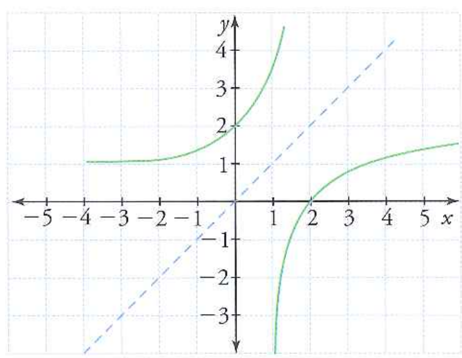
Finalmente, la inversa de la función $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{5}$ es $y = f^{-1}(x) = 2x - \frac{2}{5}$.

En la figura se muestra la gráfica de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.



2. **Realizar la gráfica de las funciones $f(x) = e^x + 1$ y $g(x) = \text{Ln}\,(x - 1)$. Luego, comprobar que $g(x)$ es la inversa de $f(x)$.**

En la siguiente figura se muestra la gráfica de las funciones $f(x) = e^x + 1$ y $g(x) = \text{Ln}\,(x - 1)$.



Para comprobar que $g(x)$ es la inversa de $f(x)$, se realiza lo siguiente:

$(g \circ f)(x) = \text{Ln}\,[(e^x + 1) - 1] = \text{Ln}\, e^x = x.$

$(f \circ g)(x) = e^{\text{Ln}\,(x-1)} + 1 = (x - 1) + 1 = x.$

Como $(g \circ f)(x) = x$ y $(f \circ g)(x) = x$, entonces, $g(x)$ es la inversa de $f(x)$ y además se dice que $f(x)$ es la inversa de $g(x)$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Modelo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Responde.

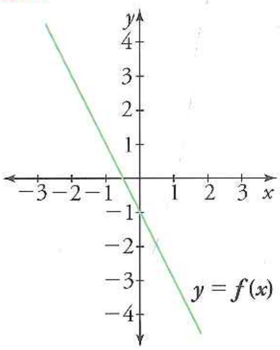
227. ¿Cuál es la condición para que exista la inversa de una función?

228. ¿Cómo se halla la inversa de una función?

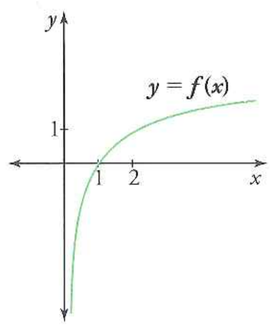
229. ¿Qué condición debe cumplir la función y su inversa respecto a la composición de funciones?

Realiza la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de la función de f.

230.

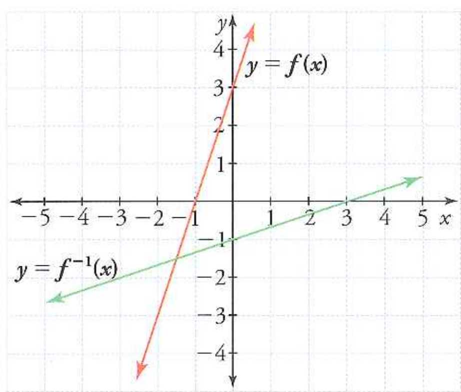


231.

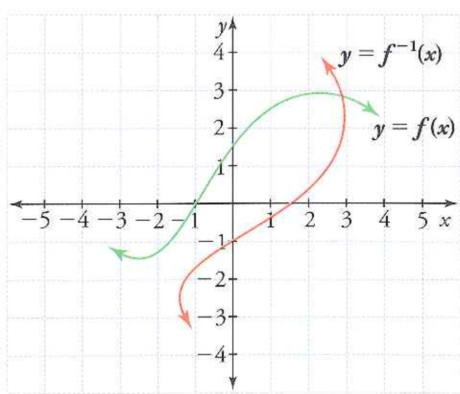


Determina cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función $f(x)$ y a su inversa.

232.



233.



Responde las siguientes preguntas. Justifica tu respuesta.

234. Si $f(x)$ es invertible y creciente, ¿es $f^{-1}(x)$ una función creciente?

235. Si $f(x)$ es una función invertible y cóncava hacia arriba, ¿es $f^{-1}(x)$ una función cóncava hacia arriba?

Considera $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ y $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

236. Demuestra que $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$.

237. Determina $f^{-1}(x)$ y $g^{-1}(x)$.

Determina la inversa de cada función.

238. $y = 5 - 8x$

239. $y = x^3 - 4$

240. $y = \sqrt{x - 3}$

241. $y = 2^x - 1$

242. $y = \text{Log}_3 x$

243. $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$ $x \neq -1$

244. $y = \text{Ln}\,|4x - 5|$

245. $y = \sqrt[5]{x - 3} + 1$

246. $y = \dfrac{5 + 3x}{2}$

247. $y = e^{3x + 7}$

Lee y resuelve. ¿Cuáles de las siguientes funciones son la inversa de sí mismas? Justifica tu respuesta.

248. $y = 2x$

249. $y = \dfrac{5}{x}$

250. $y = \dfrac{x}{1 - x}$

251. $y = \dfrac{x}{1 + x}$

252. $y = \dfrac{x}{3}$

253. $y = 4x + 4$

254. $y = \dfrac{2}{x - 2}$

255. $y = -\dfrac{4}{x + 4}$

Lee, observa y resuelve.

Al colocar un objeto en el platillo de una balanza analógica, el puntero describe un arco de medida, en grados, directamente proporcional al peso del cuerpo. Para 1 kilogramo el puntero describe un arco de 36°.

256. Escribe una ecuación que exprese el desplazamiento del puntero en función del peso corporal x de un objeto, con $x < 10$.

257. Escribe una ecuación que exprese el peso en kilogramos de un objeto colocado en la balanza, como una función del desplazamiento x del puntero, con $x < 360°$.

258. ¿Cuál es la relación entre las funciones obtenidas en los puntos anteriores?

Funciones

Observa los conjuntos M y N. Luego, resuelve.

$$M = \{-2, 0, 2, 3, 4\} \text{ y } N = \{0, 1, 4, 5, 9, 16\}$$

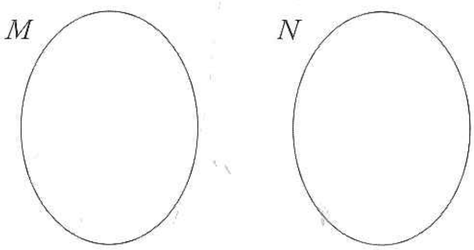
259. ¿Es $R = \{(-2, 4), (0, 0), (2, 4), (3, 9), (4, 16)\}$ una relación? Justifica tu respuesta.

____

260. Determina R por comprensión.

____

261. Representa a R en los siguientes diagramas de Venn.



Calcula $f(x)$ a partir del valor de x dado.

262. $f(x) = 2x^2 + x - 1$, para $x = -\frac{1}{4}$.

263. $f(x) = 3x^3 - 4$, para $x = -3$.

264. $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$, para $x = \frac{1}{8}$.

Halla el dominio y el rango de las siguientes funciones.

265. $f(x) = \frac{x}{x - 1}$

Dom f = {______________________}

Ran f = {______________________}

266. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

Dom f = {______________________}

Ran f = {______________________}

267. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

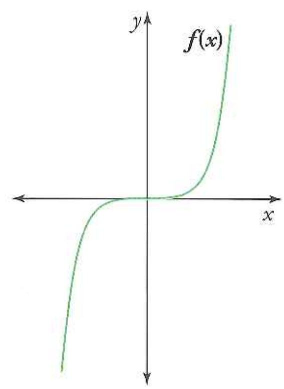
Dom f = {______________________}

Ran f = {______________________}

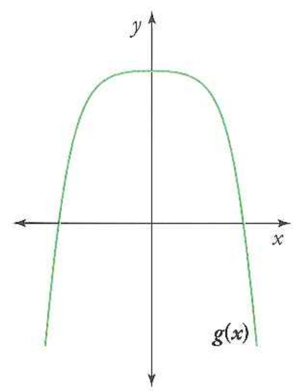
Propiedades de las funciones

Determina cuáles de las siguientes funciones son uno a uno. Justifica tu respuesta.

268.



269.



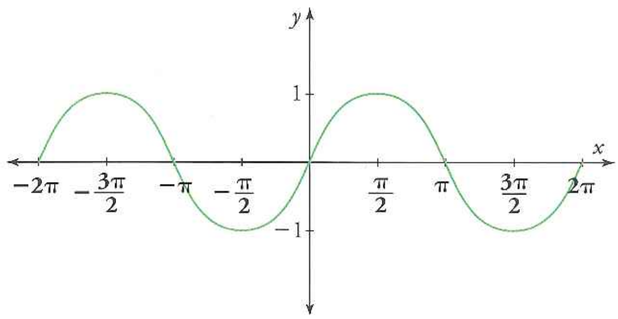
____

____

270. Explica por qué la siguiente función no es par ni impar.

$$f(x) = x^5 - 3x + 4$$

Observa la gráfica de la función $f(x) = \text{sen } x$.



271. Escribe el período de f.

____

272. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

____

Clasificación de las funciones

Determina si cada una de las siguientes funciones es racional, radical, polinómica o trascendente. Luego, determina su dominio.

273. $m(x) = \dfrac{x}{x^2 + 9}$

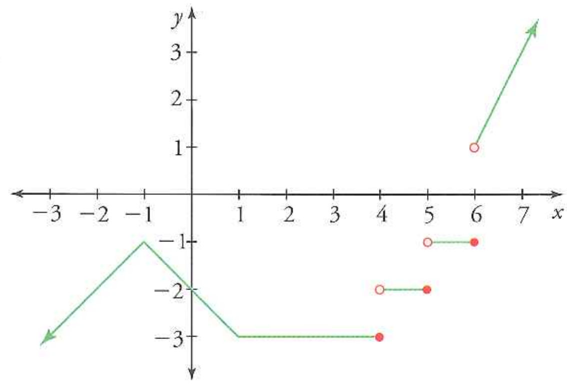
274. $h(x) = \sqrt{x - 1}$

275. $f(x) = 2x^3 - 1$

276. $g(x) = \text{Log}_2\left(\dfrac{x - 1}{3 + x}\right)$

277. $s(x) = 4 \text{ sen } (2x)$

Escribe la ecuación de la siguiente función a partir de su gráfica. Luego, determina el rango de la función.



278. Ecuación: ______________________________

279. Ran f = {______________________________}

Operaciones con funciones

Calcula el valor de la operación correspondiente teniendo en cuenta las siguientes funciones.

$$f(x) = 4x - 1 \text{ y } g(x) = x^2 + 2$$

280. $(f \cdot g)(-3)$

281. $g(f(2))$

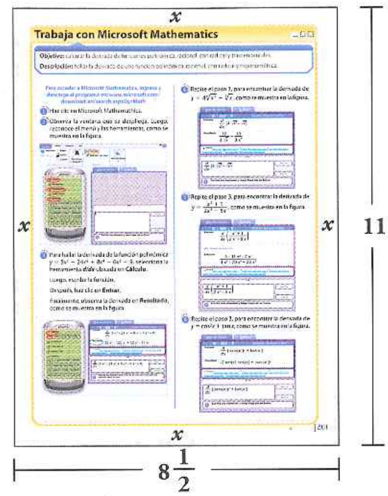
282. **Determina $f \circ g^{-1}$ teniendo en cuenta que:**

$$f(x) = e^{x+1} \text{ y } g(x) = \text{Ln}\left(\dfrac{x - 2}{x + 3}\right)$$

PROBLEMAS PARA REPASAR

Una página con dimensiones de $8\frac{1}{2}$ por 11 pulgadas tiene un margen de ancho uniforme x rodeando su parte impresa, como se muestra en la imagen.

¿Cuál es el dominio y el rango de la función $A(x)$ que permiten calcular el área de la parte impresa de la página?, ¿cuál es el área de la parte impresa para una margen de 1,2 pul?



Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál es el dominio y el rango de la función $A(x)$ que permiten calcular el área de la parte impresa de la página?, y ¿cuál es el área de la parte impresa para una margen de 1,2 pul?

¿Cuáles son los datos del problema?

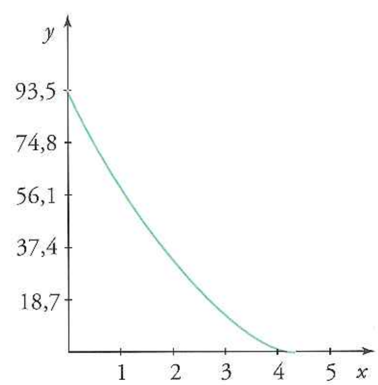
Las dimensiones de la página son de $8\frac{1}{2}$ por 11 pulgadas y la margen tiene un ancho uniforme x.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se halla la expresión algebraica que representa la función $A(x)$. Como el ancho de la margen es x, entonces, el ancho de la parte impresa es $8\frac{1}{2} - 2x$, y el largo es $11 - 2x$, de donde la función correspondiente es:

$$A(x) = \left(8\frac{1}{2} - 2x\right)(11 - 2x) = 4x^2 - 39x + 93{,}5$$

Segundo, se determina el dominio y el rango de $A(x)$. Para esto, se debe tener en cuenta el contexto del problema, de tal forma que el área máxima de la parte impresa es el área de la página, es decir, $(8{,}5)(11) = 93{,}5$ pul^2. De igual forma, el valor máximo del ancho de la margen es igual a la mitad del ancho de la página, es decir, 4,25 pul, porque el área de la parte impresa debe ser mayor que cero.



Luego, se tiene que el dominio de A es el intervalo $[0; 4{,}25)$ y el rango es $(0; 93{,}5]$. Además, se puede observar que la gráfica es decreciente, ya que cuando aumenta la medida x de la margen, la medida de la parte impresa $A(x)$ disminuye, como se muestra en la gráfica.

Finalmente, se remplaza $x = 1{,}2$ y se realizan las operaciones.

$A(1{,}2) = 4(1{,}2)^2 - 39(1{,}2) + 93{,}5 = 52{,}46$

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que el dominio y el rango de la función se ajusten al contexto del problema. Luego, se comprueba que $A(1{,}2) = 52{,}46$. Por tanto, el dominio y el rango de la función que permite calcular el área de la parte impresa es:

$$\text{Dom } A = \{x \,/\, 0 \leq x < 4{,}25\} \text{ y Ran } A = \{y \,/\, 0 < y \leq 93{,}5\}$$

Además, el área de la parte impresa cuando la margen es de 1,2 pul es de 52,46 pul^2.

283. Expresa el área de un triángulo rectángulo isósceles como función de la longitud x de uno de sus lados congruentes.

284. Un avión realiza un vuelo de reconocimiento alrededor de una ciudad que se encuentra situada sobre una frontera recta en la dirección oeste-este. La frontera separa dos países. El avión efectúa el vuelo describiendo un círculo de 20 km de radio, de forma que medio vuelo lo realiza en su propio país y medio vuelo en el país vecino. Escribe las funciones correspondientes y realiza un bosquejo de sus gráficas.

285. Una compañía de energía eléctrica cobra a sus clientes \$577 por kilovatio/hora (kWh) por los primeros 1.000 kWh que se consumen, luego, cobra \$532 por los siguientes 4.000 kWh y \$511 por cualquier kWh mayor que 5.000. Determina la expresión que permite calcular el costo C en función de la cantidad x de kWh consumidos. Luego, halla su dominio y su rango.

Responde las preguntas 286 y 287 de acuerdo con la siguiente información.

El IVA es el impuesto que se paga por la compra de algunos artículos, bienes o servicios. Este valor es aproximadamente del 16% del precio del producto adquirido.

286. Si el precio de un producto es x y no tiene IVA incluido, ¿cuál es la expresión que permite calcular el precio real que debe pagar el cliente?

287. Halla el valor que debe pagar un cliente por un computador que cuesta \$1.850.000 y que no tiene incluido el IVA.

Responde las preguntas 288 a 290 de acuerdo con la siguiente situación.

Un avión realiza un viaje con una velocidad constante de 500 millas por hora. El costo C, en dólares, por el tiquete de una pasajera que desea realizar este viaje viene dado por la función:

$$C(x) = 100 - \frac{x}{10} + \frac{36}{x}$$

Donde x es la velocidad con respecto al suelo (velocidad del avión $\pm$ velocidad del viento).

288. ¿Cuál es el costo de trasportar una pasajera en condiciones climáticas tranquilas?

289. ¿Cuál es el costo por pasajero al presentarse un viento en contra de 50 millas por hora?

290. ¿Cuál es el costo por 15 pasajeros si hay viento a favor con velocidad de 100 millas por hora?

291. Si un objeto pesa m libras al nivel del mar, entonces su peso w en libras a una altura de h millas sobre el nivel del mar está dado aproximadamente por la expresión:

$$w(h) = m\left(\frac{4.000}{4.000 + h}\right)^2$$

Calcula el peso de una mujer en un lugar que está ubicado a 14.110 pies sobre el nivel del mar, si su peso al nivel del mar es de 120 libras.

292. Una persona se encuentra a x_0 metros de la base de un edificio de altura h. En el instante $t = 0$, la persona empieza a alejarse del edificio con una velocidad v. Encuentra la función $l(t)$ que relaciona la distancia entre la persona y la parte más alta del edificio para cualquier instante $t \geqslant 0$.

Galería de imágenes

...Para calcular la distancia de frenado de un automóvil.

En la actualidad, una de las dificultades de la movilidad en Colombia son los choques causados por no conservar una distancia prudente entre los vehículos. En las ciudades, estos choques ocurren en las intersecciones o rotondas, mientras que en carretera se dan en tramos rectos, incorporaciones a la vía o salidas.

Solo mensualmente, en el país, se presentan cerca de 150 accidentes por esta causa. Los choques de este tipo están estrechamente relacionados con la velocidad del vehículo, tiempo de reacción al frenar y la distancia de frenado. A partir de estas variables las autoridades de tránsito pueden determinar la culpabilidad en un choque.

Existe una relación funcional entre la distancia de frenado, medida en metros y el cuadrado de la velocidad que llevaba el vehículo, medida en kilómetros por hora. Esta función es:

$$d = \frac{v^2}{170}$$

Donde d es la distancia de frenado, v es la velocidad que lleva el vehículo y 170 es un valor aproximado que depende de la masa del automóvil, la gravedad y la fricción de los neumáticos con el terreno.

Esta expresión permite conocer la distancia a la que debe ir un automóvil para evitar un choque.

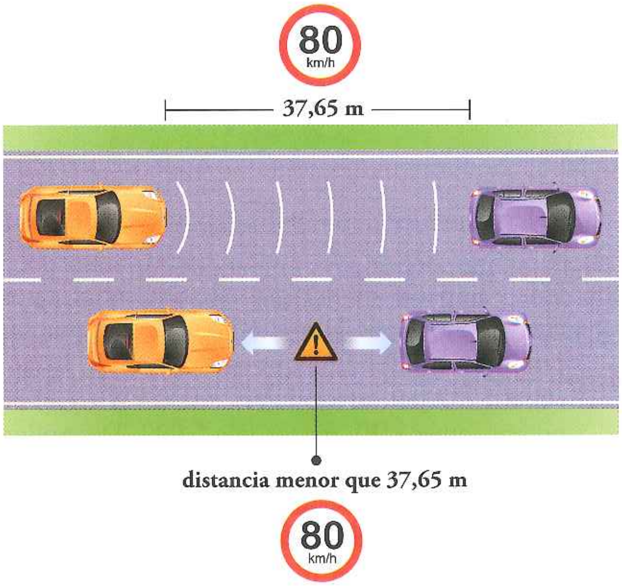
Por ejemplo, cuando un vehículo va a 80 km/h por una autopista, se puede obtener la distancia segura remplazando el valor de la velocidad en la expresión, así:

$$d = \frac{80^2}{170}$$

Resolviendo la expresión se obtiene que:

$$d \approx 37{,}65 \text{ m}$$

Lo que indica que la distancia que debe conservar el vehículo con respecto a otro cuando viaja a una velocidad de 80 km/h es de 37,65 metros aproximadamente. Una distancia menor en este caso, se considera insegura y por tanto puede generar un choque.



1. **Completa la siguiente tabla. Luego, responde.**

v (km/h)	5	10		50		100
d (m)			4		72,25	

   a. ¿Cómo es la gráfica de la función que relaciona la distancia de frenado con la velocidad del vehículo?

   b. ¿Qué tipo de función es?

   c. ¿Cuál es el dominio y el rango de la función?

2. **Si se conduce un automóvil de tal forma que su distancia de frenado es de 70 metros con respecto a otro vehículo próximo, ¿a qué velocidad debe ir el automóvil?**

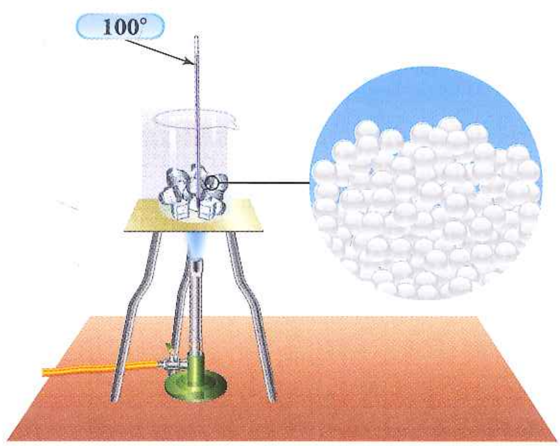
3. **Consulta la velocidad límite reglamentaria en el territorio nacional. Luego, calcula la distancia de frenado a la que debe ir un automóvil para evitar un accidente.**

...También sirve para analizar las gráficas de calor y temperatura de los cuerpos.

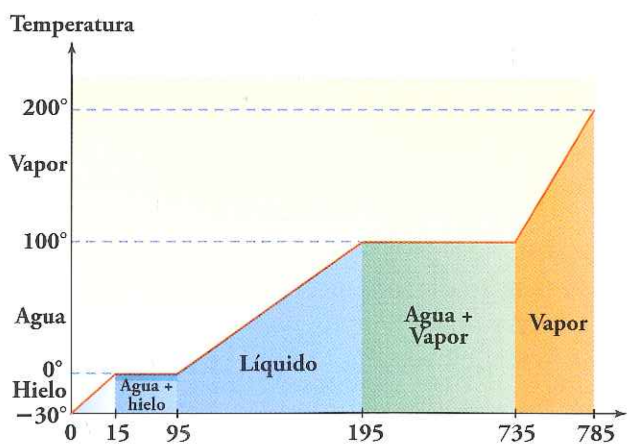
Cuando hay transferencia de calor a un cuerpo, la reacción que se produce es el incremento de su temperatura.

Esto implica que la relación entre calor y temperatura generalmente sea lineal, pero esto no siempre es así. Existen situaciones en los que el aumento de energía en forma de calor genera un incremento en la temperatura que no es lineal, como por ejemplo los cambios de estado de sólido a líquido y de líquido a gaseoso.

Esto se puede mostrar mediante un experimento en donde se mide la temperatura y el calor transferido a un cuerpo determinado. Así, en la siguiente figura se muestra un recipiente con hielo al que se le transfiere calor por medio de un mechero y se mide su temperatura en cada momento con el termómetro.



La gráfica que se obtiene de la temperatura del agua en función del calor (medido en calorías), que produce el mechero es:



Como se puede evidenciar, la gráfica tiene cinco tramos donde la temperatura no se comporta del todo linealmente a medida que se incrementa la energía cedida.

En el tramo de 0 a 15 calorías, la temperatura aumenta linealmente a medida que se cede calor.

De 15 a 95 calorías se sigue agregando calor pero su temperatura se mantiene constante mientras el hielo se transforma en líquido.

Cuando se incrementa el calor de 95 a 195 la temperatura vuelve a incrementarse linealmente hasta llegar al punto de ebullición.

Posteriormente, de 195 a 735 la temperatura se mantiene constante hasta que el agua se transforma completamente en vapor.

Finalmente, para valores mayores de 735 calorías la temperatura del vapor de agua continúa aumentando linealmente.

1. **Indica si la gráfica corresponde a una función inyectiva. Justifica tu respuesta.**
2. **Escribe la expresión algebraica que representa la relación de la temperatura en función del calor, a partir de la gráfica.**
3. **Indica el dominio y el rango de la función.**
4. **La energía normalmente se mide en julios. Una caloría equivale a 4,184 julios. Realiza la gráfica correspondiente a la función que relaciona la temperatura y el calor medido en julios.**
5. **Averigua cómo es la gráfica de temperatura en función del tiempo para los cambios de estado del agua. Luego, explica las similitudes que hay con la gráfica de la temperatura en función de la energía.**

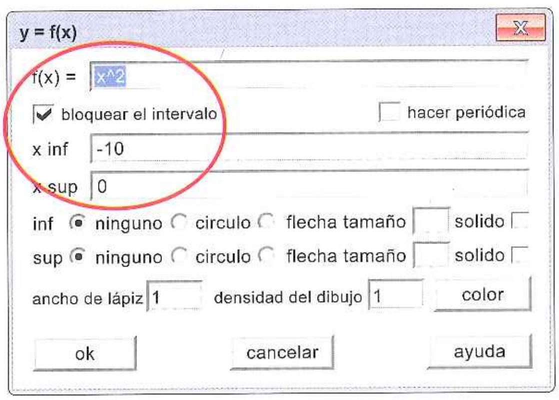
Trabaja con Winplot

Objetivo: analizar la restricción de dominio de una función que no es inyectiva, para hallar su función inversa. Además, determinar la gráfica de la operación entre dos funciones.

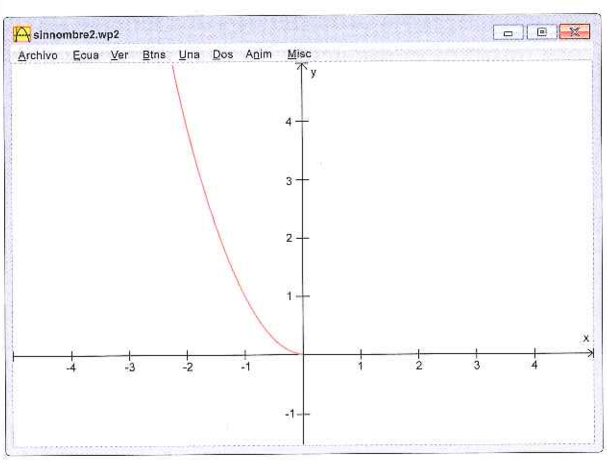
Descripción: restringir el dominio de una función cuadrática en Winplot y trazar su gráfica. Luego, obtener la gráfica de su inversa reflejándola sobre la recta $y = x$. Finalmente, hallar la gráfica de la composición de dos funciones y de su producto.

Para acceder a Winplot, ingresa y descarga el programa en: winplot.softonic.com/.

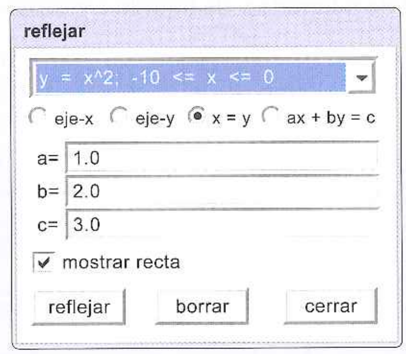
1. Haz doble clic en el ícono **wplotsp.exe**.
2. Activa la opción **Ventana** y selecciona **2−dim**.
3. Haz clic en **Ecua** y selecciona **Explícita**. Luego, digita la ecuación $y = x^2$. Como esta función no es inyectiva, entonces para hallar la función inversa se puede restringir su dominio. Para esto, escribe -10 en ***x* inf** y 0 en ***x* sup** después de hacer clic en **bloquear intervalo**.



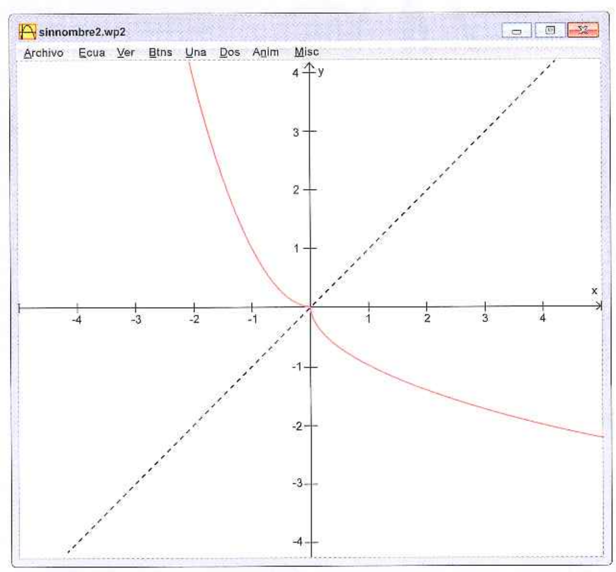
4. Selecciona **ok** y aparecerán dos ventanas: una que se denomina **inventario** en la que está su ecuación y otra con la siguiente gráfica.



5. Ingresa en el menú **Una** y selecciona **Reflejar...** y aparecerá la ecuación de la parábola con su dominio restringido. Luego, elige la opción $x = y$ y haz clic en el cuadro **mostrar recta**.



6. Haz clic en **Reflejar...** y aparecerá la gráfica de la función inversa, como se muestra a continuación. Además, se muestra la recta $y = x$ punteada sobre la que se refleja la función.

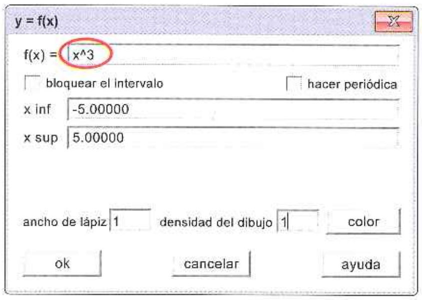


7. Restringe el dominio de las siguientes funciones y utiliza Winplot para trazar la gráfica de la función inversa.

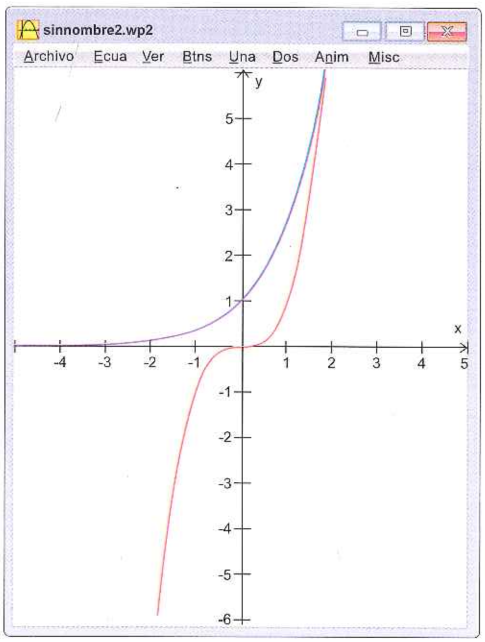
   a. $f(x) = x^2 + 5x + 6$

   b. $g(x) = -x^4 + 4$

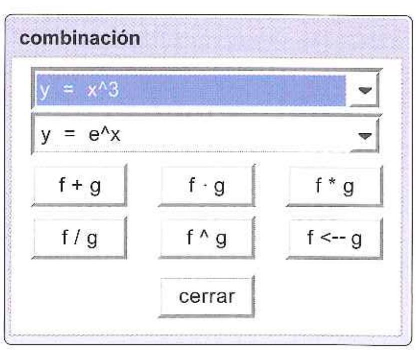
8 Selecciona **Archivo** y haz clic en **Nuevo**. Luego, abre nuevamente la ventana **Explícita** en el menú **Ecua** y digita la función $y = x^3$.



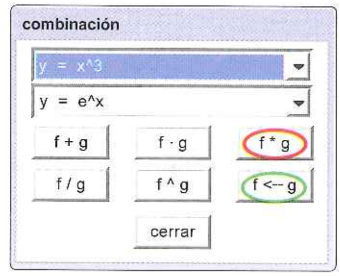
9 Haz clic en **ok** y aparecerá la gráfica de $y = x^3$. Luego, repite el paso anterior para trazar la gráfica de la función $y = e^x$, como se muestra a continuación.



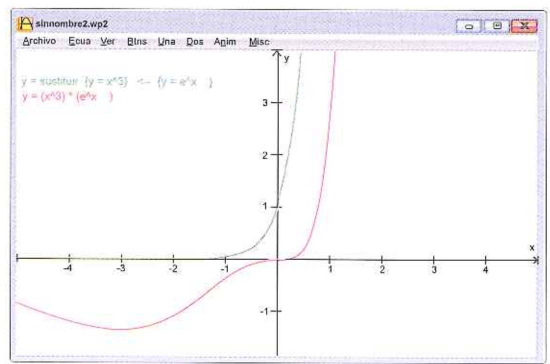
10 Haz clic en el menú **Dos** y selecciona **Combinación.** Aparecerá la siguiente ventana, con las operaciones entre funciones.



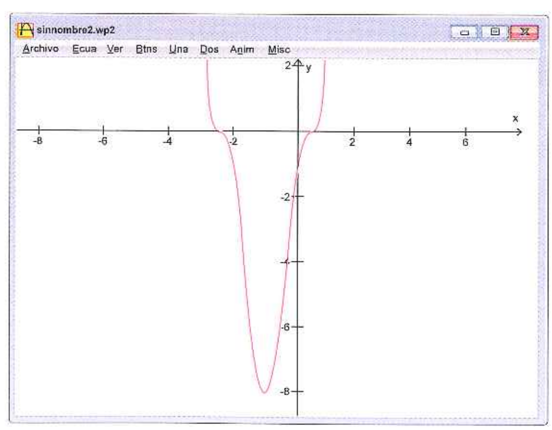
11 Haz clic en el botón ***f* <−−*g*** de la parte inferior derecha de esta ventana y aparecerá la gráfica de la función compuesta $f(g(x))$, de tal forma que $f(x) = x^3$ y $g(x) = e^x$. Luego, selecciona el botón ***f* * *g*** y aparecerá la gráfica del producto de ambas funciones.

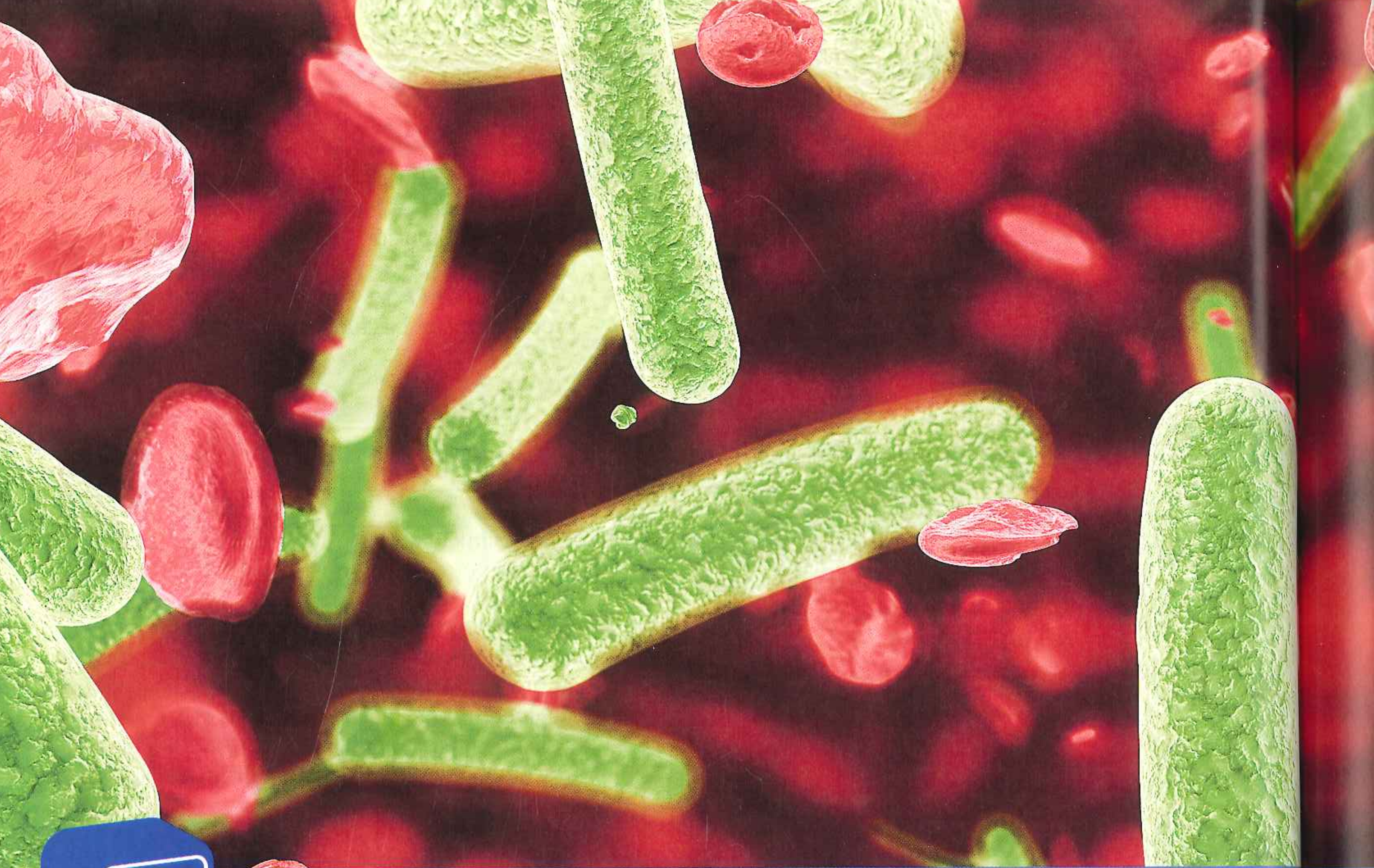


12 En la ventana **inventario** selecciona la función $y = x^3$ y haz clic en el botón **gráfico** para ocultar su gráfica. Luego, oculta la gráfica de $y = e^x$. Finalmente, para que aparezcan las ecuaciones de la función compuesta y del producto de las funciones, selecciona cada función y haz clic en el botón **Ecuación.**



13 Utiliza Winplot para determinar la composición de las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 - 2$ y $h(x) = x + 1$, si su gráfica es la siguiente.





3 Límites y continuidad

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Comprender el **concepto**, las **características** y las **propiedades de los límites**.
- Determinar adecuadamente los **límites de funciones**.
- Establecer la **continuidad de una función** y relacionarla con sus límites.
- **Resolver problemas que involucran límites y continuidad.**

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ De competencias

- **9** Multimedia
- **1** Galería
- **5** Actividades
- **1** Audio
- **6** Imprimibles
- **4** Enlaces web

Lo que sabes...

1. Realiza las siguientes operaciones.

a. $(3y^2 - 7)(-4y + 2y^3)$

b. $\left(\frac{1}{5}(3x - 2)\right) - 2 + \frac{4}{7}x$

2. Factoriza los polinomios.

a. $5y - 10$

b. $x^2 + 5x + 6$

c. $2m^2 + 5m - 3$

d. $9t^2 - 81$

3. Grafica las siguientes funciones.

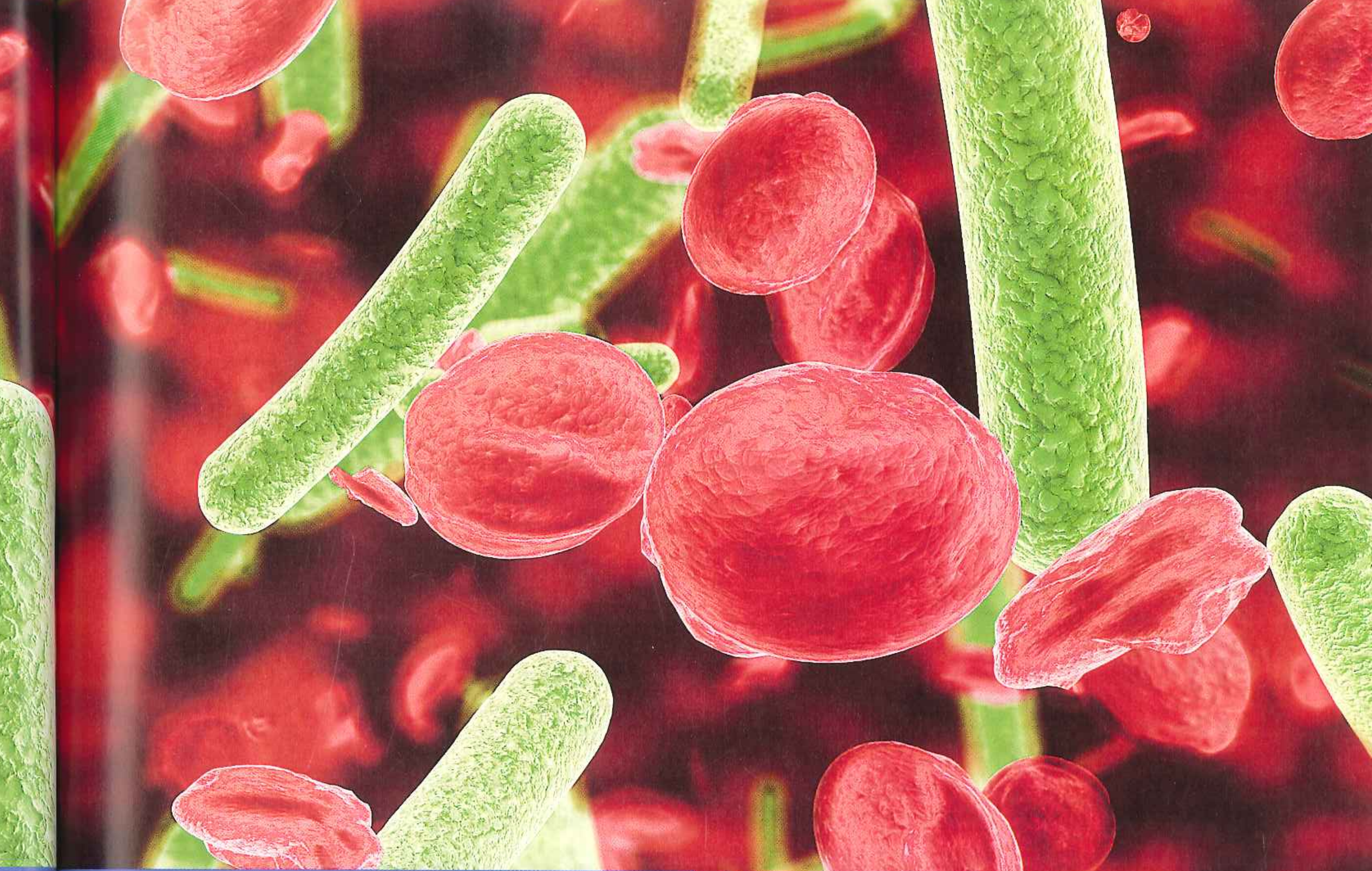
a. $f(x) = 3x - 2$

b. $f(x) = x^2 + 2$

c. $f(x) = \frac{x - 1}{x}$

d. $f(x) = \sqrt{x - 4}$

e. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, \text{si } x < 1 \\ x^2 - 1, \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

... Para conocer el crecimiento de un cultivo de bacterias.

Los microorganismos son seres vivos, en su gran mayoría unicelulares, cuya reproducción depende de las condiciones en las que habitan. Entre los microorganismos cuya reproducción es importante controlar están las bacterias. Así, el control adecuado del crecimiento de un cultivo de bacterias permite obtener alimentos de calidad y conocer la situación de una epidemia en una población.

Lee más acerca de este tema en la página 126.

Cronología del estudio de los límites

350 a. C. — **Grecia.** Eudoxo de Cnidos formuló un lema conocido como axioma de Arquímedes que involucra el trabajo con infinitesimales.

300 a. C. — **Grecia.** Demócrito postuló teoremas sobre el volumen de un cono y una pirámide que los obtuvo a partir del método de aproximación infinitesimal.

230 a. C. — **Grecia.** Arquímedes trabajó en una de las primeras nociones de límite, mediante un método de aproximación de áreas.

1700 d. C. — **Londres.** John Wallis formuló la primera definición de límite que fue aceptada por la comunidad matemática del siglo XVII.

1815 d. C. — **Francia.** Augustin Louis Cauchy fundamentó el análisis infinitesimal a partir del concepto de límite.

1857 d. C. — **Alemania.** Karl Weierstrass propuso la definición formal de límite, continuidad y derivada de una función.

1908 d. C. — **Inglaterra.** Godfrey Harold Hardy expuso por primera vez la notación para límites en su libro *A course of pure mathematics*.

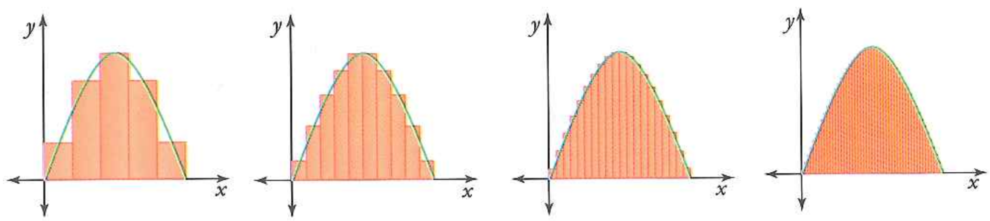
1. Límite de una función

Ampliación multimedia

A finales del siglo XVIII y comienzos del XIX se inició el desarrollo de la teoría de límites para fundamentar el análisis matemático. Sin embargo, desde la Antigüedad se aplicó el concepto de límite para resolver diversos problemas. Uno de ellos es el de hallar el área de la superficie limitada por una función positiva, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Este problema se resuelve mediante la suma de áreas de rectángulos, de tal forma que si el número de rectángulos es cada vez mayor, entonces la suma de las áreas de los rectángulos se aproximará cada vez más al área buscada, como se muestra en la siguiente figura.

Así, el área de la región es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos.



Historia de las matemáticas

Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783)

Cuando Isaac Newton y G. W. Leibniz crearon el cálculo, basaron sus ideas en cantidades "infinitesimales", las cuales eran cada vez más pequeñas sin llegar a ser iguales a cero. Más adelante el matemático francés D'Alembert propuso cambiar la idea de cantidades infinitesimales por el concepto de límite, para formalizar el cálculo de la época.

1.1 Idea intuitiva de límite

Encontrar el límite de una función f significa hallar el valor al cual se aproxima $f(x)$ cuando x tiende a tomar un valor determinado.

La función $f(x)$ tiende hacia el límite L cuando x tiende hacia a, si es posible hacer que $f(x)$ se aproxime tanto a L como se quiera, siempre y cuando x esté lo suficientemente cerca de a, sin tomar el valor de a. Esto se expresa como:

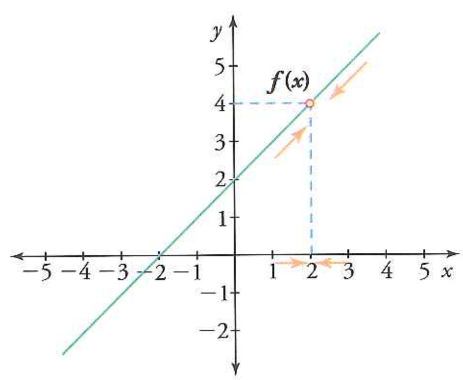
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Y se lee: el límite cuando x tiende hacia a de $f(x)$ es igual a L.

Por ejemplo, si $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 2 se puede determinar calculando algunos valores de $f(x)$ para valores de x cercanos y menores que 2 y para valores cercanos y mayores que 2 como se muestra en las siguientes tablas.

x	1	1,7	1,9	1,999
$f(x)$	3	3,7	3,9	3,999

x	3	2,5	2,1	2,001
$f(x)$	5	4,5	4,1	4,001



Así cuando los valores de x se aproximan a 2, los valores de $f(x)$ se aproximan a 4, como se muestra en la gráfica. Por tanto, se tiene que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

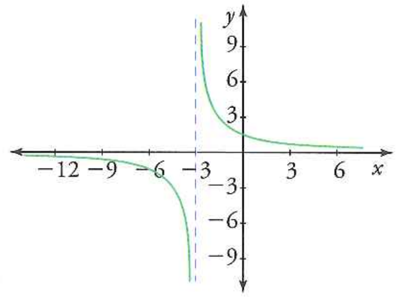
EJEMPLOS

1. Utilizar tablas de valores para determinar si $\lim_{x \to -3} \frac{4}{x+3}$ existe.

Se realizan las siguientes tablas de valores.

Con valores de x que se aproximan a -3, tales que $x < -3$.

x	-4	$-3{,}1$	$-3{,}001$	$-3{,}00001$
$f(x)$	-4	-40	-4.000	-400.000



Con valores de x que se aproximan a -3, tales que $x > -3$.

x	-2	$-2{,}9$	$-2{,}9999$	$-2{,}99999$
$f(x)$	4	40	40.000	400.000

En la primera tabla se puede observar que cuando x se aproxima a -3 y $x < -3$, los valores de $f(x)$ se pueden hacer más pequeños que cualquier cantidad negativa N. En cambio, en la segunda tabla se puede observar que cuando x se aproxima a -3 y $x > -3$, los valores de $f(x)$ se pueden hacer más grandes que cualquier cantidad positiva P.

Por tanto, en este caso $\lim_{x \to -3} f(x)$ no existe.

2. Determinar $\lim_{x \to 0} f(x)$ si $f(x)$ es la siguiente función por partes.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\pi x & \text{si } x < 0 \\ 10 \operatorname{sen} \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ 15 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Primero, se realizan las tablas con valores mayores y menores que cero, que se aproximen cada vez más a este número. Para esto se remplaza cada valor de x en la parte de la función que corresponde y se utiliza la calculadora (en modo radianes) para calcular cada valor y:

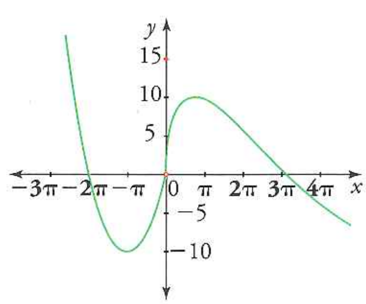
Con valores menores que cero

x	$-0{,}5$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$
y	$-2{,}89$	$-0{,}62$	$-0{,}063$	$-0{,}0063$

Con valores mayores que cero

x	$0{,}5$	$0{,}1$	$0{,}001$	$0{,}00001$
y	$6{,}5$	$3{,}1$	$0{,}316$	$0{,}03$

Luego, se tiene que cuando los valores de x tienden a cero, los valores de $f(x)$ también tienden a cero y por tanto $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, como se muestra en la siguiente gráfica.



Finalmente, se tiene que $f(0) = 15$ es diferente al valor del límite de la función cuando x tiende a cero.

Recuerda que...

Para una función f, tal que $a \in \text{Dom } f$ se tiene que $f(a)$ puede ser diferente a $\lim_{x \to a} f(x)$.

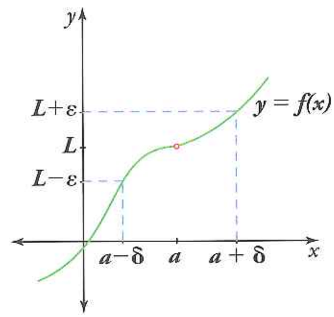
1.2 Definición formal de límite

Enlace web

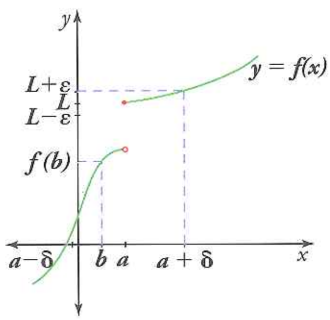
La definición formal de límite se plantea de la siguiente forma:

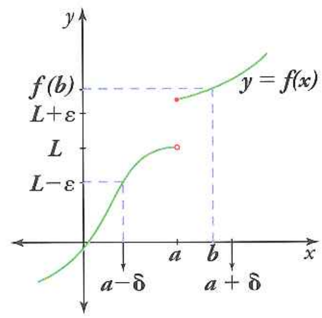
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para todo x, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces, $|f(x) - L| < \varepsilon$.

En la definición se establece que el límite existe y es el número L, si para cualquier intervalo alrededor de L (con radio ε), siempre es posible determinar un intervalo alrededor de a (con radio δ), tal que para todo $x \in (a - \delta, a + \delta)$ con $x \neq a$ su imagen $f(x)$ está en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, como se muestra en la figura.



Cuando es posible obtener un ε tal que para algún x que pertenece al intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, su imagen $f(x)$ no pertenece al intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, entonces, el límite no existe, puesto que se contradice la definición, como se muestra en las siguientes gráficas.





En las gráficas se muestra que $b \in (a - \delta, a + \delta)$, pero $f(b) \notin (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, por lo que en este caso el límite no existe.

Historia de las matemáticas

Karl Weierstrass (1815-1897)

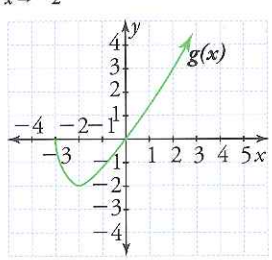
Fue un matemático alemán considerado el padre del análisis moderno, ya que dio las definiciones actuales de continuidad, límite y derivada de una función. En particular Weierstrass fue quien propuso la definición formal de límite en términos de ε y δ.

Recurso imprimible

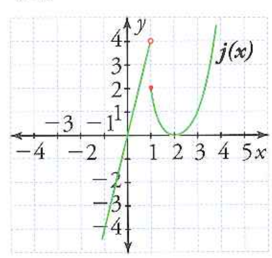
EJEMPLOS

1. Determinar si el límite planteado existe a partir de cada gráfica.

a. $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$



b. $\lim\limits_{x \to 1} j(x)$

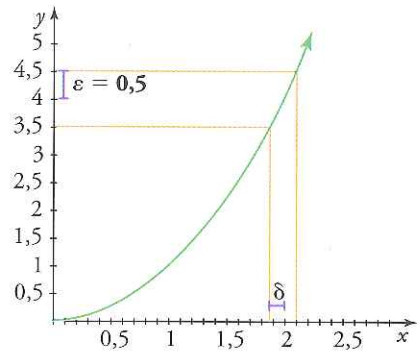


En la gráfica **a**, el límite de $g(x)$ cuando x tiende a -2 es igual a -2. En cambio, en la gráfica **b**, el límite de $j(x)$ cuando x tiende a 1 no existe, porque para valores cercanos y menores que 1 se tiene que $j(x)$ toma valores cercanos a 4, mientras que para valores cercanos y mayores que 1 se tiene que $j(x)$ toma valores cercanos a 2.

2. **Encontrar un δ positivo que verifique la definición de límite.**

a. $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$ y $\varepsilon = 0{,}5$

Primero, se realiza la gráfica de la función $y = x^2$ y se ubican en el eje y los valores $L + \varepsilon = 4 + 0{,}5 = 4{,}5$ y $L - \varepsilon = 4 - 0{,}5 = 3{,}5$, como se muestra en la siguiente figura.



Segundo, se determinan los valores de x_1 y x_2. Para esto, se tiene que:

$x_1^2 = 3{,}5$ $\qquad$ $x_2^2 = 4{,}5$

$x_1 = \sqrt{3{,}5} \approx 1{,}87$ $\qquad$ $x_2 = \sqrt{4{,}5} \approx 2{,}12$

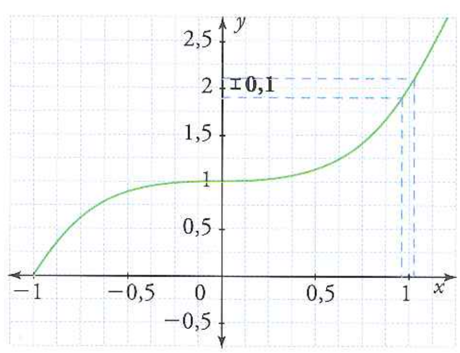
Luego, como la función es creciente se determina qué valor es más cercano a $x = 2$, así:

$|2 - x_1| = |2 - 1{,}87| = 0{,}13$ y $|2 - 2{,}12| = 0{,}12$

Finalmente, se tiene que $x_2 = 2{,}12$ está más cerca a $x = 2$, de donde $\delta = 0{,}12$ y, por tanto, si $0 < |x - 2| < 0{,}12$ entonces $|x^2 - 4| < 0{,}5$.

b. $\lim\limits_{x \to 1} x^3 + 1 = 2$ y $\varepsilon = 0{,}1$

Primero, se realiza la gráfica de la función $y = x^3 + 1$ y se ubican sobre el eje y los siguientes valores:



$L = 2$

$L - \varepsilon = 2 - 0{,}1 = 1{,}9$

$L + \varepsilon = 2 + 0{,}1 = 2{,}1$

Segundo, se determinan los valores x_1 y x_2 para los cuales $f(x_1) = 1{,}9$ y $f(x_2) = 2{,}1$.

$f(x_1) = 1{,}9$ $\qquad$ $f(x_2) = 2{,}1$

$x_1^3 + 1 = 1{,}9$ $\qquad$ $x_2^3 + 1 = 2{,}1$

$x_1^3 = 0{,}9$ $\qquad$ $x_2^3 = 1{,}1$

$x_1 \approx 0{,}965$ $\qquad$ $x_2 \approx 1{,}032$

Luego, se determina cuál de los dos valores es más cercano a $x = 1$.

$|1 - x_1| = 0{,}035$ y $|1 - x_2| = 0{,}032$

Finalmente, como $x_2 = 1{,}032$ es más próximo a $x = 1$, entonces, $\delta = 0{,}032$, por tanto, si $0 < |x - 1| < 0{,}032$, entonces $|(x^3 + 1) - 2| < 0{,}1$.

Matemáticamente

Demuestra que $\lim\limits_{x \to a} 7 = 7$ para cualquier valor real a.

Recurso imprimible

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • E Ejercito • R Razono

Responde cada una de las siguientes preguntas.

1. Intuitivamente; ¿qué significa la expresión $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$?
2. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, ¿entonces $f(a)$ necesariamente existe?

E Completa las siguientes tablas y, con base en ellas, determina si el límite propuesto existe o no existe.

3. $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$

x	0,9	0,99	0,999	1,1	1,01	1,001
$f(x)$						

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

4. $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

x	1,9	1,99	1,999	2,1	2,01	2,001
$g(x)$						

$\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

5. $h(x) = \dfrac{\sqrt{2 - x}}{x}$

x	−0,1	−0,01	−0,001	0,01	0,001
$h(x)$					

$\lim\limits_{x \to 0} h(x)$

6. $j(x) = \dfrac{2 + \sqrt[3]{x}}{8 + x}$

x	−8,1	−8,01	−8,001	−7,9	−7,999
$j(x)$					

$\lim\limits_{x \to -8} j(x)$

7. $k(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x}{2x - 2} & \text{si } x < -2 \\ 4x - 5 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

x	−2,01	−2,001	−1,99	−1,999
$k(x)$				

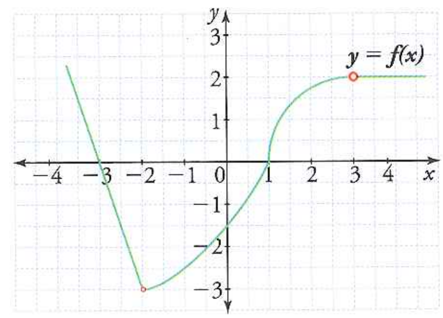
$\lim\limits_{k \to -2} k(x)$

Construye en cada caso una tabla para justificar o refutar la proposición.

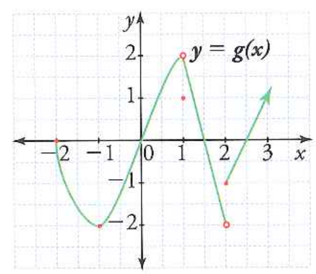
8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x} = 1$

9. $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen} x = 0$

E Con base en las gráficas determina si los límites existen.



10. $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$
11. $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$
12. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$
13. $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$



14. $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$
15. $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$
16. $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$
17. $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

R Para cada función y el ε dado, encuentra un valor δ > 0 que satisfaga la definición de límite.

18. $f(x) = 3x + 1$; $\varepsilon = 0{,}01$; $\lim\limits_{x \to -2} (3x + 1) = -5$
19. $g(x) = 3x^2$; $\varepsilon = 0{,}1$; $\lim\limits_{x \to 1} 3x^2 = 3$
20. $h(x) = \dfrac{x + 3}{x}$; $\varepsilon = 0{,}01$; $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 3}{x} = -2$

21. **Demuestra, utilizando la definición de límite, que**

$$\lim_{x \to a} 2x = 2a.$$

R Considera la función $y = f(x) = x^2$.

22. Construye una tabla de valores para valores cercanos a $x = 1$, $x = -2$ y $x = 3$.
23. Con respecto a las tablas del ejercicio anterior, ¿qué se puede afirmar sobre el comportamiento de la función en los puntos indicados?
24. ¿Cuánto vale $\lim\limits_{x \to a} x^2$?

1.3 Límites laterales

Actividad

Las aproximaciones que se realizan para determinar el límite de una función se relacionan con el concepto de **límite lateral**.

Los límites laterales se representan de dos formas distintas, según si la aproximación se realiza por la izquierda o por la derecha.

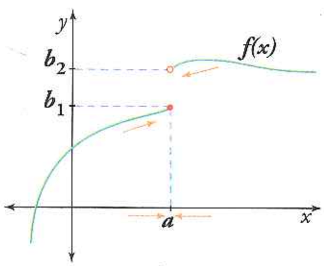
$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ significa que el límite, cuando x tiende a a **por la derecha** es igual a L.

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ significa que el límite, cuando x tiende a a **por la izquierda** es igual a L.

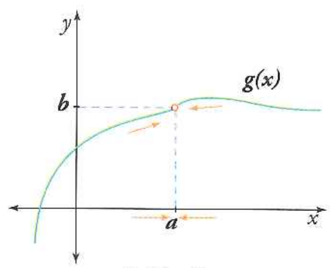
La existencia o no existencia del límite de una función depende de los límite laterales, ya que si los límites laterales existen y son iguales, entonces el límite de la función existe y es igual al valor de los límites laterales. En cambio, si los límites laterales no existen o son diferentes, entonces, el límite de la función no existe. Por tanto, se tiene que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ si y sólo si } \lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ y } \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Por ejemplo, en la gráfica 1 que se muestra a continuación, se tiene que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = b_1$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b_2$, de donde se deduce que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe. Por otra parte, en la gráfica 2, se tiene que $\lim\limits_{x \to a^-} g(x) = b$ y $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = b$, de donde se deduce que $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existe y es igual a b.



Gráfica 1

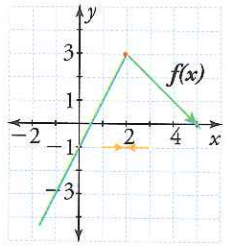


Gráfica 2

EJEMPLOS

1. **Determinar el límite indicado en cada caso a partir de la gráfica.**

a. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$



Primero, se determina el límite por la izquierda.

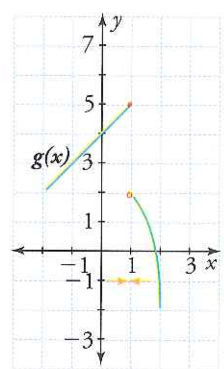
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$$

Luego, se halla el límite para la derecha.

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$$

Finalmente, se tiene que $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existe y es igual a 3.

b. $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$



Primero, se determina el límite por la izquierda.

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = 5$$

Luego, se halla el límite por la derecha.

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = 2$$

Finalmente, se tiene que

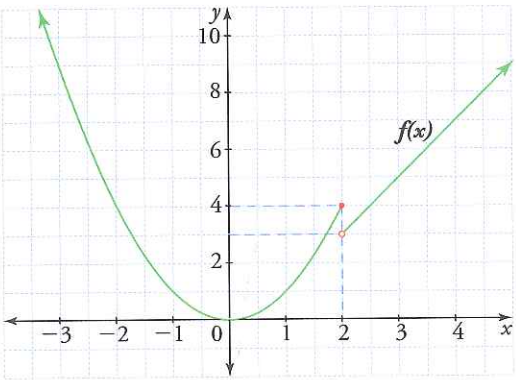
$\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ no existe porque los límites laterales son diferentes.

2. Realizar la gráfica de cada función. Luego, determinar los límites que se indican.

a. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

Primero, se realiza la gráfica de la función.



Luego, se determinan los límites laterales.

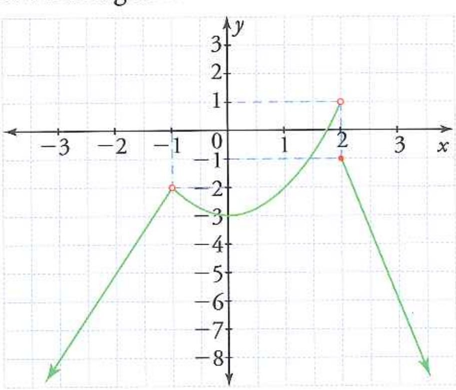
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4 \text{ y } \lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$$

Finalmente, se tiene que $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe porque los límites laterales son diferentes.

b. $h(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 3 & \text{si } -1 < x < 2 \\ 9 - 5x & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -1} h(x)$ $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$

Primero, se traza la gráfica.



Luego, se calculan los límites laterales en cada punto.

$\lim\limits_{x \to -1^-} h(x) = -2$ $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to -1^+} h(x) = -2$ $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = -1$

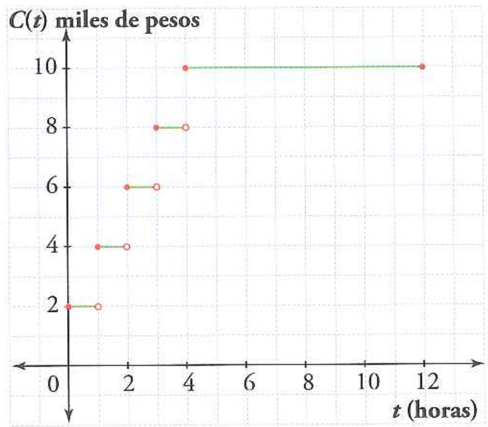
Finalmente, se tiene que $\lim\limits_{x \to -1} h(x)$ existe y es igual a -2 porque los límites laterales son iguales. En cambio, $\lim\limits_{x \to 2} h(x)$ no existe porque los límites laterales son diferentes.

3. En el siguiente cartel se muestra el sistema de cobro en un parqueadero.

> **Parqueadero**
>
> Horario 10 a. m. a 10 p. m.
>
> **Tarifas**
>
> - Cada hora o fracción: $2.000
> - Más de 5 horas: $10.000
>
> **Estancia máxima 12 horas.**

a. Realizar la gráfica del costo C en función del tiempo t en horas.

La función C es por partes, por tanto, su representación gráfica es la siguiente:



b. Calcular el valor de los límites laterales de la función C para tiempos cercanos a una hora e interpretar los resultados.

Primero, se calcula el límite por la izquierda de 1.

$$\lim_{t \to 1^-} C(t) = 2.000$$

Luego, se determina el límite por la derecha de 1.

$$\lim_{t \to 1^+} C(t) = 4.000$$

Finalmente, se tiene que, para aparcamientos cercanos e inferiores a una hora, el valor a pagar es $2.000 y, para aparcamientos cercanos y superiores a una hora, el valor a pagar es de $4.000.

c. Determinar el valor de los límites laterales en $t = 4$ y en $t = 5$.

Los límites laterales para $t = 4$ y $t = 5$ son:

$\lim\limits_{t \to 4^-} C(t) = 8.000$ $\lim\limits_{t \to 5^-} C(t) = 10.000$

$\lim\limits_{t \to 4^+} C(t) = 10.000$ $\lim\limits_{t \to 5^+} C(t) = 10.000$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Determina si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa, justifica tu respuesta.

25. Si el $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, entonces, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ también existe.

26. Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existen, entonces, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

27. Si $f(a)$ no está definida, entonces, los límites laterales de f en a no existen.

28. $\lim\limits_{x \to 0^-} (3x + 1) = \lim\limits_{x \to 0^+} (3x + 1) = 1$

Considera la función dada por la siguiente expresión

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 6 & \text{si } x \leqslant -3 \\ 3x & \text{si } -3 < x < 1 \\ 5 & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ x^2 - 4 & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

29. Realiza la gráfica de f.

Determina, en caso de existir, el valor de los siguientes límites.

30. $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x)$

31. $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$

32. $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$

33. $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$

34. $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$

35. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

36. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

37. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

38. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$

39. $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

Elabora, en cada caso, la gráfica de una función que cumpla las condiciones propuestas.

40. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 3$;
$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 3$;
$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2$; $f(0) = 0$; $f(-2) = 1$; $f(1) = 2$

41. $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) < \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$;
$f(-3) = 3$

42. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = 3$; $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = 4$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no existe, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) > \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

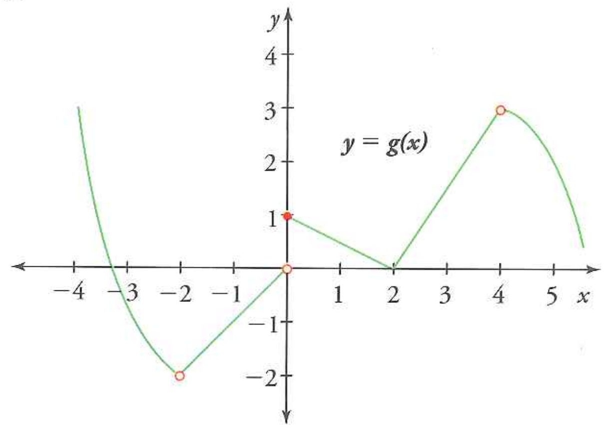
Considera la función parte entera $f(x) = [\![x]\!]$.

43. Si $n \in \mathbb{Z}$, ¿cuánto valen los límites laterales de f en n?

44. ¿Existe $\lim\limits_{x \to n} [\![x]\!]$ con $n \in \mathbb{Z}$?

45. Si $m \notin \mathbb{Z}$, ¿qué ocurre con los límites $\lim\limits_{x \to m^-} [\![x]\!]$ y $\lim\limits_{x \to m^+} [\![x]\!]$?

Determina el valor de los límites de acuerdo con la gráfica.



46. $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$

47. $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$

48. $\lim\limits_{x \to -2} g(x)$

49. $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x)$

50. $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$

51. $\lim\limits_{x \to 4} g(x)$

Responde las siguientes preguntas.

52. Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = c$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -c$, ¿para qué valor de c $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe?

53. Si $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = a^2 - 5$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = a + 1$ y además $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe, ¿cuánto vale $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

El servicio de acueducto en una ciudad establece una tarifa básica de \$15.000 más \$2.500 por m³ consumido. Si el consumo excede los 40 m³, cada m³ se cobraría a \$3.000.

54. Modela una función que relacione el valor que se debe pagar en relación con el consumo.

55. ¿A qué valores se acerca el costo, para consumos cercanos a los 40 m³?

1.4 Cálculo de límites aplicando propiedades

Hasta el momento se ha determinado el límite de una función mediante tablas de valores o mediante la gráfica. Sin embargo, para facilitar el cálculo de límites es necesario aplicar sus propiedades.

Actividad

Propiedades de los límites

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones tales que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ y k es una constante real, entonces se cumplen las siguientes propiedades.

1. Límite de una constante.

$$\lim_{x \to a} k = k$$

2. Límite de una constante por una función.

$$\lim_{x \to a} k\, f(x) = k \lim_{x \to a} f(x) = kL$$

3. Límite de una suma o de una diferencia de funciones.

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm M$$

4. Límite del producto de funciones.

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = (\lim_{x \to a} f(x)) \cdot (\lim_{x \to a} g(x)) = L \cdot M$$

5. Límite del cociente de dos funciones.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M} \text{ siempre que } M \neq 0.$$

6. Límite de una función compuesta.

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(M) \text{ si } \lim_{x \to M} f(x) = f(M)$$

7. Límite de la potencia de una función.

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n = L^n, \text{ para } n \in \mathbb{Z}^+$$

8. Límite de una función radical.

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, \text{ si } n \text{ es par, entonces, } L \geq 0$$

9. Límite de una función logarítmica.

$$\lim_{x \to a} [\operatorname{Log}_b f(x)] = \operatorname{Log}_b [\lim_{x \to a} f(x)] = \operatorname{Log}_b (L) \text{ siempre que } L > 0.$$

Principio de sustitución

Otra propiedad importante de los límites es el principio de sustitución, en el cual se establece que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, es decir, que en algunas funciones el límite cuando x tiende hacia a de $f(x)$ se obtiene remplazando a en $f(x)$ y realizando las operaciones. En particular para calcular el límite de una función polinómica siempre se aplica el principio de sustitución.

En el caso de las funciones racionales se aplica el principio de sustitución solo si el valor que se remplaza hace que el denominador sea diferente de cero.

Historia de las matemáticas

Augustin Cauchy (1789-1857)

Matemático francés que aportó en la construcción de la definición formal de límite. Además demostró que si el límite de una función existe, entonces es único.

EJEMPLOS

1. Calcular los siguientes límites aplicando las propiedades.

a. $\displaystyle \lim_{x \to 2} \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right)$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{3}{4}x\right) - \lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{2}\right)$$ Se aplica el límite de una diferencia.

$$= \frac{3}{4} \lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} \frac{1}{2}$$ Se aplica el límite de una constante por una función.

$$= \frac{3}{4}(2) - \frac{1}{2}$$ Se calcula cada límite.

$$= 1$$ Se simplifica.

b. $\displaystyle \lim_{x \to 5} (2x - 1)(\sqrt{x + 4})$

$$\lim_{x \to 5} (2x - 1)(\sqrt{x + 4}) = \left[\lim_{x \to 5} (2x - 1)\right] \cdot \left[\lim_{x \to 5} \sqrt{x + 4}\right]$$ Se aplica el límite de un producto.

$$= \left[\lim_{x \to 5} 2x - \lim_{x \to 5} 1\right] \cdot \left[\sqrt{\lim_{x \to 5} x + 4}\right]$$ Se aplica el límite de una diferencia y el límite de una raíz.

$$= \left[\lim_{x \to 5} 2x - \lim_{x \to 5} 1\right] \cdot \left[\sqrt{\lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4}\right]$$ Se aplica el límite de una suma.

$$= [10 - 1] \cdot [\sqrt{5 + 4}]$$ Se calcula cada límite.

$$= 27$$ Se resuelven las operaciones.

c. $\displaystyle \lim_{x \to 1} f(x)$ **donde** $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Se calculan los límites laterales aplicando el principio de sustitución así:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 3x - 1$$
$$= 3(1) - 1$$
$$= 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2$$
$$= (1)^2$$
$$= 1$$

Como $\displaystyle \lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$, entonces $\displaystyle \lim_{x \to 1} f(x)$ no existe.

d. $\displaystyle \lim_{x \to -2} \frac{4x - 3}{2 - x}$

Como en este caso si se remplaza $x = -2$ el denominador es diferente de cero, entonces se puede aplicar el principio de sustitución, así:

$$\lim_{x \to -2} \frac{4x - 3}{2 - x} = \frac{4(-2) - 3}{2 - (-2)} = \frac{-8 - 3}{2 + 2} = -\frac{11}{4}$$

Por tanto, se tiene que $\displaystyle \lim_{x \to -2} \frac{4x - 3}{2 - x} = -\frac{11}{4}$

Recuerda que...

Para que el límite de una función exista, deben existir los límites laterales y, además, deben ser iguales.

2. **Determinar el valor de los siguientes límites teniendo en cuenta que** $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$ **y que** $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -2$.

a. $\lim\limits_{x \to 2} [3 f(x) - 5 [g(x)]^2]$

$\lim\limits_{x \to 2} [3 f(x) - 5 [g(x)]^2]$ Límite dado.

$= 3 \lim\limits_{x \to 2} f(x) - 5 \lim\limits_{x \to 2} [g(x)]^2$ Se aplica el límite de una diferencia y límite del producto por una constante.

$= 3 \lim\limits_{x \to 2} f(x) - 5\left[\lim\limits_{x \to 2} g(x)\right]^2$ Se aplica el límite de una potencia.

$= 3(5) - 5(-2)^2$ Se remplaza cada límite.

$= -5$ Se efectúan las operaciones.

b. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3 f(x)}}{f(x) + 2 g(x)}$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3 f(x)}}{f(x) + 2 g(x)}$ Límite dado.

$= \dfrac{\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{3 f(x)}}{\lim\limits_{x \to 2} (f(x) + 2 g(x))}$ Se aplica el límite de un cociente.

$= \dfrac{\sqrt{3 \lim\limits_{x \to 2} f(x)}}{\lim\limits_{x \to 2} (f(x) + 2 g(x))}$ Se aplica el límite de una raíz y límite del producto por una constante en el numerador.

$= \dfrac{\sqrt{3 \lim\limits_{x \to 2} f(x)}}{\lim\limits_{x \to 2} f(x) + 2 \lim\limits_{x \to 2} g(x)}$ Se aplica el límite de una suma y límite del producto por una constante en el denominador.

$= \dfrac{\sqrt{3(5)}}{5 + 2(-2)}$ Se remplaza cada límite.

$= \sqrt{15}$ Se realizan las operaciones.

3. **Demostrar que** $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{mx + b}{nx + c} = \dfrac{ma + b}{na + c}$, **si** $a \neq -\dfrac{c}{n}$.

$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{mx + b}{nx + c}$ Límite dado.

$= \dfrac{\lim\limits_{x \to a} mx + b}{\lim\limits_{x \to a} nx + c}$ Se aplica el límite de un cociente teniendo en cuenta que $a \neq -\dfrac{c}{n}$.

$= \dfrac{ma + b}{na + c}$ Se aplica el principio de sustitución.

Matemáticamente

Explica por qué $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ no se puede calcular aplicando directamente la propiedad del límite de un cociente.

www Enlace web

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • E Ejercito • R Razono •

Determina el valor de verdad de cada uno de los siguientes enunciados. Justifica tu respuesta.

56. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existen, entonces $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe.
57. El límite de una suma de funciones, existe.
58. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ no existe, entonces $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x))$ no existe.

Lee y resuelve. Justifica tu respuesta.

59. Utiliza las propiedades de los límites para demostrar que si $p(x)$ es un polinomio entonces $\lim\limits_{x \to a} p(x) = p(a)$ para cualquier a número real.
60. Demuestra que si $a \in \text{Dom } f$ y f es una función racional, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

E Si $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = -3$ y $\lim\limits_{x \to -1} h(x) = 2$ encuentra el valor de los siguientes límites:

61. $\lim\limits_{x \to -1} [f(x) - 3h(x)]$
62. $\lim\limits_{x \to -1} [f(x)g(x) + h(x)]$
63. $\lim\limits_{x \to -1} [f(x) - 4g(x)]^3$
64. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{3g(x) + 4h(x)}$
65. $\lim\limits_{x \to -1} h(x)\sqrt{\dfrac{f(x)}{4 + g(x)}}$
66. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{[\sqrt{4f(x)} + 2h(x)]^2}{g(x)}$

E Calcula el valor de los siguientes límites.

67. $\lim\limits_{x \to 1} (3x^2 - 5x + 4)$
68. $\lim\limits_{x \to e} \text{Ln}^2(2x - e)$
69. $\lim\limits_{x \to a} (2x^2 - 3x + 2a^2)$
70. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x + 2}$
71. $\lim\limits_{x \to 2} e^{2x - 1}$
72. $\lim\limits_{x \to 1} 2^{x + 3}$
73. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{3 - 2x^2 + x^2}$
74. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{(3x + 4)^3}{4x + 5}$
75. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$
76. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x + \sqrt{x + 8}}$
77. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 + a^2}{3x}$ con $a \neq 0$
78. $\lim\limits_{x \to 3} [(\sqrt{x^2 + 2})(x^3 - 2x^2)^2]$
79. $\lim\limits_{x \to -1} (2 - x)^{x + 3}$
80. $\lim\limits_{x \to 11} \dfrac{\sqrt{x - 2}}{x + 3}$
81. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3e^x + 2e^{-x}}{x - 5}$

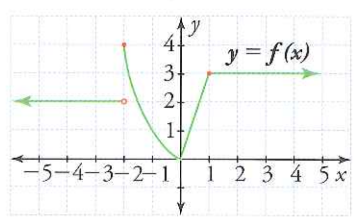
Encuentra, en cada caso, funciones que cumplan las condiciones propuestas.

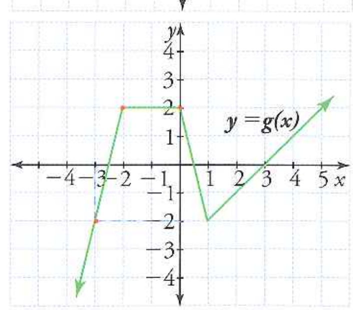
82. $f(x)$ con $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ no exista pero que $\lim\limits_{x \to 0} [f(x)]^2$ exista.
83. $f(x)$ y $g(x)$, funciones reales tales que $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existen pero tales que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ no existe.

R Demuestra o refuta los siguientes enunciados.

84. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ y $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = d$; entonces $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existe y equivale a $d - c$.
85. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{(f(x))^2 + 1}$ también existe.

E Determina el valor de los límites de acuerdo con las siguientes gráficas.





86. $\lim\limits_{x \to 0} (f(x) + g(x))$
87. $\lim\limits_{x \to 2} (f(x)g(x))$
88. $\lim\limits_{x \to -3} (f(x)^{g(x)})$
89. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{5 + f(x)}{7 - 3g(x)}$
90. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)g(x)$
91. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)g(x)$
92. ¿Existe $\lim\limits_{x \to -2} f(x)g(x)$?

1.5 Límites de funciones indeterminadas

En algunos casos, al aplicar la sustitución directa para calcular un límite, el resultado puede ser que no existe el límite, como $\frac{L}{0}$ o también indeterminación.

Una indeterminación es una expresión de la forma $\frac{0}{0}$, 1^{∞}, $\frac{\infty}{\infty}$ y otras más. Estas expresiones no permiten concluir si el límite existe o no, razón por la cual es necesario realizar un procedimiento algebraico para eliminar la indeterminación.

Es importante tener en cuenta que tanto para los casos en los cuales el límite no existe $\left(\frac{L}{0}\right)$ como para los que se presenta una indeterminación, la gráfica de la función es una herramienta muy útil para el respectivo análisis.

Límites de funciones racionales

Ampliación multimedia

Cuando la indeterminación se obtiene en una función racional. Es decir, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $\lim\limits_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{0}{0}$, la indeterminación se evita, factorizando el numerador $P(x)$ y el denominador $Q(x)$, de tal forma que el binomio $(x - a)$ se simplifica así:

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)P_1(x)}{(x-a)Q_1(x)} = \lim_{x \to a} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Por tanto, para calcular estos tipos de límites se factorizan el numerador y el denominador, si es posible, y finalmente se simplifica.

Recuerda que...

Si $P(a) = 0$ y $P(x)$ es un polinomio, entonces $x - a$ es un factor de $P(x)$.

EJEMPLOS

1. Determinar el valor de los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4}$

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(2x-1)}{(x+2)(x-2)} \quad \text{Se factoriza.}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{2x - 1}{x - 2} \quad \text{Se simplifica.}$$

$$= \frac{2(-2) - 1}{-2 - 2} = \frac{5}{4} \quad \text{Se calcula el límite.}$$

Finalmente, $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} = \frac{5}{4}$

b. $\lim\limits_{x \to 7} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 - 17x + 21}$

$$\lim_{x \to 7} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 - 17x + 21} = \lim_{x \to 7} \frac{(x-7)(x+5)}{(2x-3)(x-7)} \quad \text{Se factoriza.}$$

$$= \lim_{x \to 7} \frac{x + 5}{2x - 3} \quad \text{Se simplifica.}$$

$$= \frac{7 + 5}{2(7) - 3} = \frac{12}{11}$$

Finalmente, $\lim\limits_{x \to 7} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 - 17x + 21} = \frac{12}{11}$

2. Calcular $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ tiene la forma $\frac{0}{0}$ Se verifica la indeterminación.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} \quad \text{Se desarrolla el cubo.}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \quad \text{Se suma.}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \quad \text{Se factoriza.}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \quad \text{Se simplifica.}$$

$$= 3x^2 + 3x(0) + (0)^2 \quad \text{Se aplica sustitución directa.}$$

$$= 3x^2$$

Finalmente,

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2.$$

En este ejemplo, se aprecia que la variable es h y x es un parámetro el cual se considera como una constante.

Ampliación multimedia

Límites de funciones radicales

Si $f(x)$ o $g(x)$ son funciones radicales y $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma $\dfrac{0}{0}$, entonces es posible eliminar la indeterminación, racionalizando el numerador o el denominador o ambos y después simplificar la expresión resultante.

EJEMPLOS

Calcular el valor de cada límite con indeterminación $\dfrac{0}{0}$.

a. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} = \lim_{x \to 4} \left[\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x+5}+3}\right]$$ Se racionaliza el numerador.

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x+5)-9}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}$$ Se multiplica y se resta.

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x+5}+3} = \frac{1}{\sqrt{4+5}+3} = \frac{1}{6}$$ Se simplifica.

Finalmente, $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} = \dfrac{1}{6}$

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}-2}$

$$= \lim_{x \to 1} \left[\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}\right]$$ Se multiplica y se divide entre el conjugado del numerador y del denominador.

$$= \lim_{x \to 1} \frac{[(x+2)-3][\sqrt{x+3}+2]}{[(x+3)-4][\sqrt{x+2}+\sqrt{3}]}$$ Se multiplica cada factor con su respectivo conjugado.

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}$$ Se resta y se simplifica.

$$= \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$ Se aplica sustitución directa y se racionaliza.

Finalmente, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}-2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

c. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{x-2}$

$$= \lim_{x \to 2} \left[\frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{x-2} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x-1})^2+\sqrt[3]{x-1}+1}{(\sqrt[3]{x-1})^2+\sqrt[3]{x-1}+1}\right]$$ Se racionaliza el numerador.

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)-1}{(x-2)[(\sqrt[3]{x-1})^2+\sqrt[3]{x-1}+1]} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{(\sqrt[3]{x-1})^2+\sqrt[3]{x-1}+1}$$

Se realizan las operaciones y se simplifica.

$$= \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$$ Se aplica sustitución directa y se suma.

Finalmente, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x-1}-1}{x-2} = \dfrac{1}{3}$

Matemáticamente

Halla

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x}$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

Ampliación multimedia

1.6 Límites de funciones trigonométricas

Los límites de las funciones trigonométricas se calculan mediante sustitución directa, siempre y cuando la función esté definida para el valor donde se quiere encontrar el límite. Así:

$\lim\limits_{x \to a} \text{sen } x = \text{sen } a$ $\quad \lim\limits_{x \to a} \tan x = \tan a$ $\quad \lim\limits_{x \to a} \sec x = \sec a$

$\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$ $\quad \lim\limits_{x \to a} \cot x = \cot a$ $\quad \lim\limits_{x \to a} \csc x = \csc a$

Límites trigonométricos especiales

Recurso imprimible

Para algunos límites de funciones trigonométricas que conducen a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ se tienen en cuenta los siguientes casos:

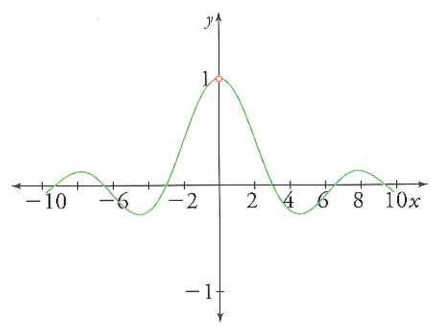
$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Para mostrar el valor de cada uno de los límites trigonométricos especiales, se utiliza una tabla de valores y representación gráfica.

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

x	$-0{,}1$	$-0{,}01$	0	$0{,}01$	$0{,}1$
$\frac{\text{sen } x}{x}$	0,998	0,99998	ND	0,99998	0,998

En la tabla y en la gráfica se aprecia que cuando x tiende a 0 por la izquierda o por la derecha, los valores de $\frac{\text{sen } x}{x}$ tienden a 1.



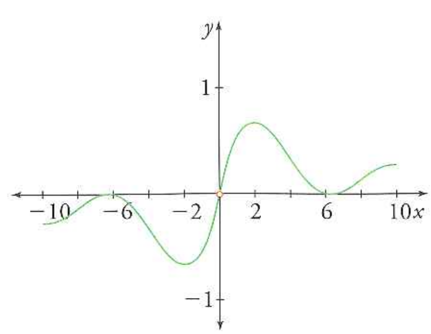
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

x	$-0{,}1$	$-0{,}01$	0	$0{,}01$	$0{,}1$
$\frac{1 - \cos x}{x}$	$-0{,}049$	$-0{,}0049$	ND	0,0049	0,049

En la tabla y en la gráfica se aprecia que cuando x tiende a 0 por la izquierda o por la derecha los valores de $\frac{1 - \cos x}{x}$ tienden a 0.

En general, si $t = g(x)$ y t tiende a 0 cuando x tiende a 0, entonces:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\text{sen } t}{t} = 1 \text{ y } \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0$$



Actividad

EJEMPLOS

1. Determinar los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x \to 0} (2 \cos x + 3 \tan x)$

Aplicando la sustitución directa, se obtiene:

$$\lim_{x \to 0} (2 \cos x + 3 \tan x) = 2 \cos (0) + 3 \tan (0)$$
$$= 2(1) + 3(0) = 2$$

Finalmente, $\lim\limits_{x \to 0} (2 \cos x + 3 \tan x) = 2$

b. $\lim\limits_{x \to 2\pi} \left[\tan \frac{x}{3} + \sec x\right]$

Aplicando la sustitución directa, se obtiene:

$$\lim_{x \to 2\pi} \left[\tan \frac{x}{3} + \sec x\right] = \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sec(2\pi)$$
$$= -\sqrt{3} + 1 = 1 - \sqrt{3}$$

Finalmente, $\lim\limits_{x \to 2\pi} \left[\tan \frac{x}{3} + \sec x\right] = 1 - \sqrt{3}$

c. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\csc^2 x}{\operatorname{sen} x}$

Aplicando la sustitución directa, se obtiene:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\csc^2 x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\csc^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1$$

Finalmente, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\csc^2 x}{\operatorname{sen} x} = 1$

2. Encontrar el valor del límite en cada caso.

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$ tiene la forma $\dfrac{0}{0}$ Se verifica la indeterminación.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x}$$ Se expresa $\tan x$ como $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x \cdot \cos x}$$ Se divide.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$ Se aplican propiedades de los límites.

$$= (1)(1) = 1$$ Se aplica límite trigonométrico especial.

Finalmente, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x}$ tiene la forma $\dfrac{0}{0}$ Se verifica la indeterminación.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} \cdot 5$$

$$= 5 \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x} = 5(1) = 5$$

Finalmente, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x} = 5$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 4x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 4x}$ tiene la forma $\dfrac{0}{0}$ Se verifica la indeterminación al sustituir.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}}{\frac{\operatorname{sen} 4x}{x}}$$ Se divide por x, el numerador y el denominador.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3\,\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}}{4\,\frac{\operatorname{sen} 4x}{4x}}$$ Se complifica 3 y 4, respectivamente.

$$= \frac{3 \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{3x}}{4 \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{4x}}$$ Se aplica propiedad de los límites.

$$= \frac{3(1)}{4(1)} = \frac{3}{4}$$ Se aplica límite trigonométrico especial.

d. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sec x - 1}{x \sec x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec x - 1}{x \sec x} = \frac{0}{0}$$ Se obtiene una indeterminación al sustituir.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{\cos x}}{\frac{x}{\cos x}}$$ Se sustituye $\sec x$ por $\dfrac{1}{\cos x}$ se resuelven las operaciones.

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

Finalmente, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sec x - 1}{x \sec x} = 0$ Se simplifica y se aplica límite trigonométrico especial.

3. Comprobar la existencia del siguiente límite.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(3x^2 + 5x) \operatorname{sen} x}{2x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(3x^2 + 5x) \operatorname{sen} x}{2x^2}$$ Se obtiene $\dfrac{0}{0}$ al realizar la sustitución.

$$= \left(\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + 5x}{2x}\right)\left(\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$$ Se aplica propiedad de los límites.

$$= \left(\lim_{x \to 0} \frac{3x + 5}{2}\right)(1)$$ Se simplifica y se aplica límite trigonométrico especial.

$$= \frac{5}{2}(1)$$ Se aplica sustitución directa.

$$= \frac{5}{2}$$

Finalmente, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(3x^2 + 5x) \operatorname{sen} x}{2x^2}$ existe y es igual a $\dfrac{5}{2}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Ejercito • Razono

Responde las siguientes preguntas.

93. ¿Cómo se evitan indeterminaciones en los límites de funciones racionales?

94. ¿Cuál es la diferencia al racionalizar funciones radicales si el índice es de orden 2 o de orden 3?

95. ¿Para qué valores de a $\lim\limits_{x \to a} (\tan x)$ no existe?

Determina el valor de los siguientes límites racionales.

96. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 2x - 3}$

97. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 8x + 15}{x^2 - x - 12}$

98. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + x - 6}$

99. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 11x + 30}{x^2 + 2x - 35}$

100. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6x^3 - 7x}{8x^2 + 9x}$

101. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - x - 12}$

102. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{x^3 - 8}$

103. Encuentra y corrige los errores que se cometieron en la resolución del siguiente límite.

$\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x + 1}}$ Límite dado.

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(2 - \sqrt{x})}{(3 - \sqrt{2x + 1})} \cdot \dfrac{(2 + \sqrt{x})(3 + \sqrt{2x + 1})}{(2 + \sqrt{x})(3 - \sqrt{2x + 1})}$ Se multiplica por los conjugados.

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(4 - x)(3 + \sqrt{2x + 1})}{(9 - (2x + 1))(2 + \sqrt{x})}$ Se aplica suma por diferencia.

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(4 - x)(3 + \sqrt{2x + 1})}{(9 - 2x + 1)(2 + \sqrt{x})}$ Se eliminan paréntesis.

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(4 - x)(3 + \sqrt{2x + 1})}{2(4 - x)(2 + \sqrt{x})}$ Se factoriza.

$= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3 + \sqrt{2x + 1}}{2 + \sqrt{x}}$ Se simplifica.

$= \dfrac{3 + \sqrt{9}}{2 + \sqrt{4}} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$ Se remplaza $x = 4$.

Responde V, si el enunciado es verdadero o F, si es falso. Justifica tu respuesta.

104. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe. ( )

105. Toda indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$ se puede evitar mediante factorización. ( )

106. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(mx)}{nx} = \dfrac{m}{n}$, con m y n diferentes de cero. ( )

Sea $f(x^2) = ax^2 + bx + c$ una función cuadrática.

107. Determina el valor de la expresión $f(x + h)$.

108. Determina, si existe, el límite

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

Asocia cada límite con su respectivo valor.

109. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$ **a.** $-\dfrac{1}{56}$

110. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3x + 1}}{\sqrt{x} - 1}$ **b.** 0

111. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$ **c.** 3

112. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - \sqrt{x - 1}}{x - 2}$ **d.** $-\dfrac{5}{16}$

113. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{5 - \sqrt{8x + 1}}$ **e.** 1

114. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{\sqrt[3]{x} + 1}$ **f.** $-\dfrac{1}{2}$

115. Utiliza el hecho de que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ para demostrar formalmente que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$ (sugerencia: multiplica numerador y denominador por $1 + \cos x$).

Encuentra el valor de los siguientes límites trigonométricos.

116. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{x}$

117. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 3x}{\operatorname{sen} 4x}$

118. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\cot x}$

119. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^2 3x}{x^2 \cos 2x}$

120. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x \cos 5x}{5x^2}$

121. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{3x}$

1.7 Límites infinitos

Enlace web

En algunos casos, cuando se evalúa el límite de una función para un valor dado, se encuentra que la función crece o decrece sin cota. En este caso, se concluye que el límite de la función no existe.

Para expresar que los valores de $f(x)$ crecen sin cota cuando x se acerca a c se escribe $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$.

De igual manera, si los valores de $f(x)$ decrecen sin cota cuando x se acerca a c se escribe $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$.

Una **cota** es un número que es mayor o menor que todos los elementos de un conjunto dado.

Recuerda que...

La igualdad $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$, significa que el límite no existe porque el símbolo ∞ no representa ningún número real. Este símbolo indica el comportamiento de $f(x)$ cuando x tiende a c.

EJEMPLOS

1. **Realizar una tabla de valores y analizar el comportamiento de la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ para valores de x cercanos a 3.**

Para algunos valores de x, se construye la siguiente tabla.

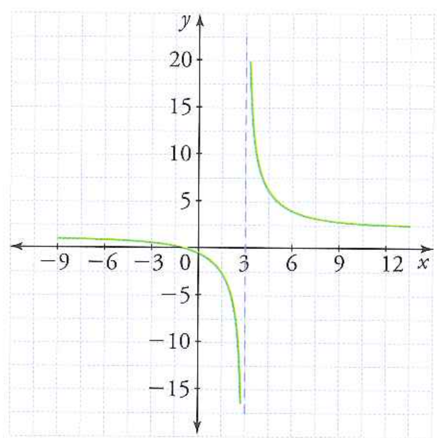
x	2,9	2,99	2,999	2,9999	3	3,0001	3,001	3,01	3,1
$\dfrac{2x+1}{x-3}$	−68	−698	−6.998	−69.998	ND	70.002	7.002	702	72

En la tabla, se aprecia que para valores cercanos a 3 por la izquierda, la función decrece sin cota y se expresa como:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x+1}{x-3} = -\infty$$

Mientras, que para valores cercanos a 3 por la derecha, la función crece sin cota y se expresa como $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2x+1}{x-3} = \infty$.

La representación gráfica de la función permite apreciar con mayor claridad el comportamiento de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$, cuando x tiende a 3.



2. **Elaborar una tabla de valores e indicar si la función crece o decrece sin cota, utilizando $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2}{x^2-4}$.**

La siguiente tabla muestra algunos valores de $f(x)$ cuando x tiende a -2.

x	−2,1	−2,01	−2,001	−2,0001	−2	−1,9999	−1,999	−1,99	−1,9
$\dfrac{2}{x^2-4}$	4,88	49,88	499,88	4.999,88	ND	−5.000,13	−500,13	−50,13	−5,13

Luego, cuando x tiende a -2 por la izquierda $f(x)$ crece sin cota. Es decir, $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{2}{x^2-4} = \infty$. Además, cuando x tiende a -2 por la derecha $f(x)$ decrece sin cota. Es decir, $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{2}{x^2-4} = -\infty$. Finalmente, $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2}{x^2-4}$ no existe.

1.8 Límites en el infinito

Ampliación multimedia

Si la variable x crece o decrece sin cota y la función $f(x)$ se aproxima a los valores L y M, respectivamente. Estos límites se llaman límites en el infinito y se expresan como:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = M$$

Cuando se escribe $x \to \infty$, no significa que en un lugar muy alejado a la derecha respecto al eje x, exista un número más grande que todos al cual se aproxima x. En lugar de esto, se usa $x \to \infty$ para indicar que x se hace cada vez más grande sin cota.

Para calcular límites en el infinito se tienen en cuenta los siguientes casos:

- Si $k \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces, $\lim_{x \to \infty} \frac{k}{x^n} = 0$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$. Además, si $k \in \mathbb{R}^+$ y n es par, $\lim_{x \to \infty} kx^n = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} kx^n = \infty$ y si n es impar, $\lim_{x \to \infty} kx^n = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} kx^n = -\infty$.

Historia de las matemáticas

Henri Poincaré (1854-1912)

Poincaré fue un extraordinario matemático, físico y filósofo. Se le considera el último matemático universalista. "Una especie de poeta del infinito".

EJEMPLOS

1. **Hallar $\lim_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, si $f(x) = \frac{8}{x^3}$.**

Para calcular los límites, se tiene en cuenta la siguiente tabla para algunos valores de x.

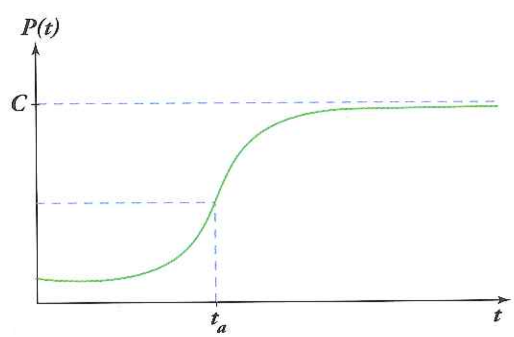
x	-1×10^6	-1×10^3	-1	1	1×10^3	1×10^6
$f(x) = \frac{8}{x^3}$	-8×10^{-18}	-8×10^{-9}	-8	8	8×10^{-9}	8×10^{-18}

Cuando x toma valores cada vez más grandes pero negativos, la función $f(x) = \frac{8}{x^3}$ tiende a 0.

Cuando x toma valores cada vez más grandes pero positivos, la función $f(x) = \frac{8}{x^3}$ tiende a 0.

Se escribe: $\lim_{x \to -\infty} \frac{8}{x^3} = 0$ y $\lim_{x \to \infty} \frac{8}{x^3} = 0$.

2. **Una población de pingüinos crece en un ambiente de confinamiento de acuerdo con la curva de crecimiento logístico que se muestra en la figura. En esta, C es la capacidad de sostenimiento del ambiente y representa la cantidad máxima de individuos que pueden ser sostenidos en ese ambiente.**



Plantear un límite que determine la capacidad de sostenimiento del ambiente habitado por los pingüinos.

En este caso, la función población de pingüinos P depende del tiempo t. Es decir, $P(t)$. Luego, el límite que determina la capacidad del ambiente es $\lim_{t \to \infty} P(t) = C$.

Recuerda que...

Los límites infinitos y los límites en el infinito no se calculan mediante sustitución directa.

Límites en el infinito de una función racional

Actividad

En algunos límites de funciones racionales se presenta la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, cuando la variable x crece o decrece sin cota.

Para determinar el límite de estas funciones, se dividen el numerador y el denominador de la función racional entre la potencia de mayor grado. A partir de este proceso se puede presentar.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$ Si el grado de $P(x)$ es mayor que el grado de $Q(x)$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ Si el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{m}{n}$ Si el grado de $P(x)$ y $Q(x)$ son iguales donde m y n son los coeficientes de los términos de mayor grado de $P(x)$ y $Q(x)$, respectivamente.

Recuerda que...

Una indeterminación de la forma $\infty - \infty$ se resuelve efectuando la resta de funciones. Cuando aparecen radicales se multiplica y se divide por la expresión conjugada.

EJEMPLOS

Determinar el valor de cada límite.

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^5 + 5x^3 + 12}{x^5 - 8x^4 + 6x}$

Al aplicar el criterio se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5 + 5x^3 + 12}{x^5 - 8x^4 + 6x} = \frac{3}{1} = 3$$

Otra forma de calcular el límite es dividir el numerador y denominador entre la mayor potencia. Así:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^5 + 5x^3 + 12}{x^5 - 8x^4 + 6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^5}{x^5} + \frac{5x^3}{x^5} + \frac{12}{x^5}}{\frac{x^5}{x^5} - \frac{8x^4}{x^5} + \frac{6x}{x^5}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3 + \frac{5}{x^2} + \frac{12}{x^5}}{1 - \frac{8}{x} + \frac{6}{x^4}}$$

$$= \frac{3 + 0 + 0}{1 - 0 + 0} = \frac{3}{1} = 3$$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4 + 7x^2 - 15}{x^3 + 8x + 2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 + 7x^2 - 15}{x^3 + 8x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^4}{x^4} + \frac{7x^2}{x^4} - \frac{15}{x^4}}{\frac{x^3}{x^4} + \frac{8x}{x^4} + \frac{2}{x^4}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{7}{x^2} - \frac{15}{x^4}}{\frac{1}{x} + \frac{8}{x^3} + \frac{2}{x^4}}$$

$$= \frac{1 + 0 - 0}{0 + 0 + 0} = \frac{1}{0}$$

Finalmente, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^4 + 7x^2 - 15}{x^3 + 8x + 2} = \infty$.

c. $\lim\limits_{x\to\infty} [\sqrt{81x^6 + 1} - 9x^3]$

En este caso, se obtiene una indeterminación $\infty - \infty$, se resuelve multiplicando y dividiendo por el conjugado.

$\lim\limits_{x\to\infty} [\sqrt{81x^6 + 1} - 9x^3]$ Límite dado.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{81x^6 + 1} - 9x^3)(\sqrt{81x^6 + 1} + 9x^3)}{(\sqrt{81x^6 + 1} + 9x^3)}$$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{(81x^6 + 1) - 81x^6}{\sqrt{81x^6 + 1} + 9x^3}$ Se efectúan las operaciones.

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{81x^6 + 1} + 9x^3}$ Se simplifica.

$= 0$ Se calcula el límite aplicando que el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

d. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{8 - 5x}$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{8 - 5x}$ Límite dado.

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{4}{x^2}}}{\frac{8}{x} - \frac{5x}{x}}$ Se dividen el numerador y el denominador entre la mayor potencia.

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{\frac{8}{x} - 5}$ Se simplifica.

$= \frac{\sqrt{1 - 0}}{0 - 5} = \frac{\sqrt{1}}{-5} = -\frac{1}{5}$ Se calcula el límite.

Finalmente, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{8 - 5x} = -\frac{1}{5}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Expresa con tus palabras el significado de las siguientes expresiones.

122. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = M$

123. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$

124. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

125. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

Determina, en caso de existir, el valor de los siguientes límites. Justifica tus procedimientos.

126. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x}\right)$

127. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+6x+7}}{x+5}$

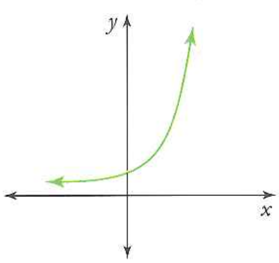
128. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+3x^7-x-2}{4x-x^6-5x^2-9x^7}$

129. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^4+x^2}$

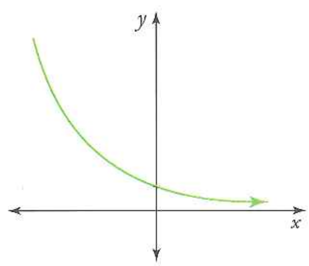
130. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+5}}{3x}$

131. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4-5x^2+8}{4x^4+1}$

Observa las gráficas de las funciones exponenciales y, luego, responde.



$y = a^x;\ a > 1$



$y = a^x;\ 0 < a < 1$

132. ¿Cómo debe ser el valor de a para que se cumpla la condición $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$?

133. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^x =$ ____________

134. En el caso de la función $y = f(x) = e^{-x}$, ¿cuál de sus límites al infinito existe?

Si $f(x)$ es una función acotada (es decir, existen constantes reales m y M tales que $m \leq f(x) \leq M$ para cualquier $x \in \mathrm{Dom}\, f$), entonces $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 0$.

135. Demuestra que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.

136. Determina el valor de $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x - 5\cos x}{x}\right)$.

Sean f y g funciones polinomiales.

137. ¿En qué condiciones $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe?

138. Si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}$ existen; ¿cómo son f y g?

Considera la función $y = f(x) = \dfrac{4x}{x^2-49}$.

139. Completa la siguiente tabla.

x	6,9	6,99	6,999	7,1	7,01	7,001
y						

140. ¿Qué se puede afirmar acerca de $\lim\limits_{x\to 7^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 7^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$?

Encuentra una función que cumpla las condiciones propuestas en cada caso.

141. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$

142. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

Analiza los siguientes límites.

143. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^8-2x^4}{4x^7-x^5}$

144. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+3}}{x-1}$

145. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2+1}{x-5}$

146. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{4x+1}{x-2}$

147. $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x+5}{\sqrt{x^2-9}}$

148. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Lee y resuelve.

149. Se ha estimado que la población de zorros alrededor de una granja se rige por la fórmula $z = \dfrac{100(6t^2+3)}{2+t^2}$, donde t viene dado en meses. Conforme transcurre el tiempo, ¿qué ocurrirá con el tamaño de la población?

150. Según la teoría de la relatividad de Einstein, la masa M de un cuerpo depende de su velocidad v y dicha relación viene dada por $M = \dfrac{mc}{\sqrt{c^2-v^2}}$ donde m es la masa del cuerpo en reposo y $c = 3 \times 10^5$ km/s es la velocidad de la luz. ¿Qué ocurre con el cuerpo a medida que su velocidad se acerca a la de la luz?

1.9 Límites exponenciales

Enlace web

Un límite exponencial es un límite que tiene la forma $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$ o $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x)]^{g(x)}$ o $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)]^{g(x)}$.

En los límites exponenciales se tienen en cuenta los siguientes casos:

- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces, $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^{g(x)} = L^M$.
- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = M$, entonces, $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x)]^{g(x)} = L^M$.
- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$, entonces, $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x)]^{g(x)} = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leqslant L < 1 \\ \infty \text{ si } L > 1 \end{cases}$
- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = M$, entonces, $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x)]^{g(x)} = \begin{cases} \infty \text{ si } M > 0 \\ 0 \text{ si } M < 0 \end{cases}$

EJEMPLOS

1. Determinar cada uno de los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x \to \pi} \left[\text{sen } x + \tan\left(\frac{x}{4}\right)\right]^{\cos x}$

$$\lim_{x \to \pi} \left[\text{sen } x + \tan\left(\frac{x}{4}\right)\right]^{\cos x} = \left[\lim_{x \to \pi} \left(\text{sen } x + \tan \frac{x}{4}\right)\right]^{\lim\limits_{x \to \pi} (\cos x)}$$

$$= \left[\text{sen } \pi + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^{\cos \pi} = [0 + 1]^{-1} = 1$$

Finalmente, $\lim\limits_{x \to \pi} \left[\text{sen } x + \tan\left(\frac{x}{4}\right)\right]^{\cos x} = 1$.

b. $\lim\limits_{x \to 1} [2x^3 - 6x^2]^{2x+1}$

$$= \left[\lim_{x \to 1} (2x^3 - 6x^2)\right]^{\lim\limits_{x \to 1} 2x+1} = [2 \cdot (1)^3 - 6(1)^2]^{2(1)+1} = (-4)^3 = -64$$

Finalmente, $\lim\limits_{x \to 1} [2x^3 - 6x^2]^{2x+1} = -64$.

2. Determinar el valor de $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 5}{3x^2 + 4x + 3}\right)^{x^2}$

En estos casos, se calcula cada límite por separado, como sigue:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5}{3x^2 + 4x + 3}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{5}{x^2}}{3 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}$$ Se multiplica y se divide por x^2.

$$= \frac{1 - 0}{3 + 0 + 0}$$ Se calcula límite cuando $x \to \infty$.

$$= \frac{1}{3}$$ Se resuelven las operaciones.

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$$

Ahora, aplicando el caso indicado. Así:

como $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 5}{3x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{3}$, donde $\frac{1}{3} < 1$

y $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = \infty$, entonces

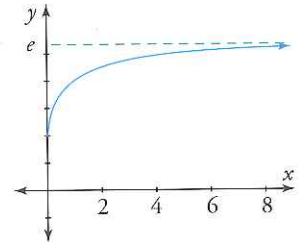
$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 5}{3x^2 + 4x + 3}\right)^{x^2} = 0$$

Límite exponencial especial

Ampliación multimedia

El número e se puede definir como el valor de $\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. La tabla de valores y la gráfica de la función $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)$, para algunos valores de $x>0$.

x	1	2	3	4	5	6	7	$\ldots\to\infty$
$f(x)$	2	2,25	2,37	2,44	2,49	2,52	2,55	$\ldots\to e$



Recuerda que...

$\underset{x\to-\infty}{\text{Lím}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

Luego, el valor al cual tiende $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ cuando x tiende a ∞ es $e\approx 2{,}71$. Es decir, $\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

EJEMPLOS

1. Determinar el valor de $\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{4x-3}$

$\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{4x-3}$ — Límite propuesto.

$=\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left(1+\frac{2}{x+5}\right)^{4x-3}$ — Se realizan operaciones en el paréntesis.

$=\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+5}{2}\right)}\right)^{4x-3}$

$=\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+5}{2}\right)}\right)^{\frac{x+5}{2}\left(\frac{2}{x+5}\cdot(4x-3)\right)}$ — Se multiplica por 1 el exponente.

$=\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left[\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+5}{2}\right)}\right)^{\frac{x+5}{2}}\right]^{\frac{2(4x-3)}{x+5}}$ — Se aplican propiedades de potenciación.

Ahora, si $u=\frac{x+5}{2}$ y $x\to\infty$, entonces $u\to\infty$.

$\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+5}{2}\right)}\right)^{\frac{x+5}{2}}$

$=\underset{x\to u}{\text{Lím}}\left(1+\left(\frac{1}{u}\right)\right)^u$

$=e$

Ahora, se calcula $\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\frac{2(4x-3)}{x+5}$

$\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\frac{2(4x-3)}{x+5}$ — Límite para calular.

$=\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\frac{8x-6}{x+5}$ — Se multiplica.

$=\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\frac{8-\frac{6}{x}}{1+\frac{5}{x}}=8$ — Se dividen entre x el numerador y el denominador.

Finalmente, $\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left(\frac{x+7}{x+5}\right)^{4x-3}=e^8$

2. Verificar que $\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x=e^{-5}$

Para verificar el resultado, se calcula el límite, así:

$\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x$ — Límite propuesto.

$=\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{-5}\right)}\right)^x$ — Se reescribe la fracción.

$=\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{5}}\right)^{\frac{-x}{5}}\right]^{-5}$ — Se multiplica por 1 el exponente.

$=\left[\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{5}}\right)^{-\frac{x}{5}}\right]^{\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}-5}$ — Se aplican propiedades de los límites.

Si $u=-\frac{x}{5}$ y $x\to\infty$, entonces, $u\to-\infty$

$\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{5}}\right)^{-\frac{x}{5}}$

$=\underset{u\to-\infty}{\text{Lím}}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u$ — Se realiza la sustitución.

$=e$ — Se calcula el límite.

Ahora, como $\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}-5=-5$, entonces se tiene que:

$=\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x$

$=\left[\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{5}}\right)^{-\frac{x}{5}}\right]^{\underset{x\to\infty}{\text{Lím}}-5}=e^{-5}$

Por tanto, se verifica la igualdad.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono

Completa cada uno de los siguientes enunciados.

151. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces

$\lim\limits_{x \to a} (f(x))^{g(x)} =$ ______________

152. Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$; $0 < L < 1$, entonces

$\lim\limits_{x \to \infty} (f(x))^{x} =$ ______________

153. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L > 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 1$, entonces

$\lim\limits_{x \to a} (f(x))^{g(x)} =$ ______________

Determina el valor de los siguientes límites.

154. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{5x^3 + 2x^2 + 1}{4 + x^3}\right)^{x}$

155. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\tan 2x}{\operatorname{sen} x}\right)^{3x+6}$

156. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{9x^2 + 5}{8x^2 + 3x + 1}\right)^{\frac{1}{x}}$

157. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{9x^6 - 3x + 8}{2x^4 + 5x + 6}\right)^{\frac{2x+3}{x+1}}$

158. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} 6x}{4x}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

Determina si la solución de cada uno de los siguientes límites es correcta. En caso contrario, corrígela.

159. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{5}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{5}{x}\right)^{\frac{5x}{5}}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \left[\left(1 + \dfrac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{5} = e^{5}$

160. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{2x \cdot \left(\frac{3}{3}\right)}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3} \cdot 6} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right) = e^{\frac{1}{6}}$

161. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{4}{x}\right)^{\frac{x}{3}} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{4}{x}\right)^{\frac{x}{3} \cdot \frac{4}{4}}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \left[\left(1 + \dfrac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right]^{\frac{3}{4}} = e^{\frac{3}{4}}$

Plantea un límite exponencial cuyo valor sea el que se indica.

162. e^{-5}

163. e^{-2}

164. $e^{\frac{1}{2}}$

165. e^{3}

166. 4

167. 2

Considera la función $y = f(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{x}$.

168. Utilizando una calculadora completa la siguiente tabla para la función.

x	$f(x)$
10	
100	
1.000	
10.000	
100.000	
1.000.000	

169. Determina el valor de $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)^{x}$.

170. Compara los resultados de los ejercicios 168 y 169. ¿Qué conclusión obtienes?

Responde las siguientes preguntas. Justifica tu respuesta.

171. Si $\lim\limits_{x \to a} (\operatorname{Ln}(f(x))) = -\infty$, ¿existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$?

172. ¿$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^x + 3^x}{3^x - 2^x}$ no existe?

173. ¿$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^{x} = e^{a}$; con $a \in \mathbb{R}$?

174. ¿$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+2} = 0$?

175. ¿$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + x^5 + x^7}{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}} = \infty$?

Considera la función $y = f(x) = \operatorname{Ln} x$.

176. Utiliza las propiedades de los logaritmos para simplificar la expresión $g(y) = \dfrac{\operatorname{Ln}\left(x + \frac{1}{y}\right) - \operatorname{Ln} x}{\left(\frac{1}{y}\right)}$.

177. Calcula $\lim\limits_{y \to \infty} g(y)$.

Lo que viene...

En las siguientes páginas trabajarás las asíntotas de una función. Escribe qué significa asíntota y cómo se hallan las asíntotas oblicuas.

1.10 Asíntotas de una función

Ampliación multimedia

El término **asíntota** se utiliza para describir una línea que se "acerca", de forma indefinida, a una curva sin llegar a coincidir con ella. En el estudio de funciones, se consideran tres tipos de asíntotas: asíntotas verticales, asíntotas horizontales y asíntotas oblicuas.

Asíntotas verticales

La función $f(x)$ tiene por asíntota vertical la recta de ecuación $x = a$, si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Generalmente, cuando se están buscando las asíntotas verticales de una función racional, se determinan los valores de x que hacen el denominador de la función cero.

Asíntotas horizontales

La función $f(x)$ tiene por asíntota horizontal la recta de ecuación $y = b$, si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ o $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.

Para determinar las asíntotas horizontales de una función hay que calcular, cuando exista, el límite de $f(x)$ cuando x tiende a ∞ o cuando x tiende a $-\infty$, los valores de estos límites determinan las asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas

Una función $f(x)$ tiene una asíntota oblicua en $y = mx + b$ si se cumple:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ donde } m \neq 0 \text{ y } \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = b$$

Una asíntota oblicua de una función es una recta de la forma $y = mx + b$, con $m \neq 0$.

EJEMPLOS

1. Hallar las asíntotas verticales y horizontales de $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - x}$.

Para hallar las asíntotas verticales se resuelve:

$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$

$x = 0, x = 1, x = -1$

Las posibles asíntotas verticales son: $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$.

Como $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - x} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x(x + 1)(x - 1)} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x + 1}{x(x - 1)} = \dfrac{3}{2}$

Entonces en $x = -1$ no hay asíntota.

En $x = 0$ y $x = 1$ hay asíntotas verticales para $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - x}$.

Para las asíntotas horizontales, se calcula:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 1}{x^3 - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

Luego, la recta con ecuación $y = 1$ es una asíntota horizontal de la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - x}$, como se muestra en la figura.

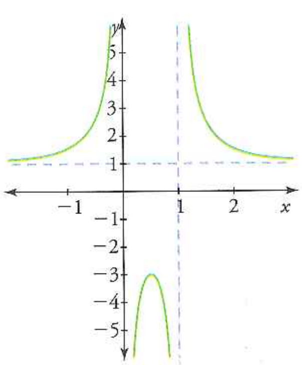


Figura 1.

2. Determinar si la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 3x - 10}$ tiene asíntota oblicua. Si la asíntota existe, escribir su ecuación.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{x^3}{x^2 + 3x - 10}}{\dfrac{x}{1}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^3 + 3x^2 - 10x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{10}{x^2}} = \frac{1}{1 + 0 - 0} = 1$$

Como $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, entonces la asíntota existe y $m = 1$.

Ahora, se halla b así:

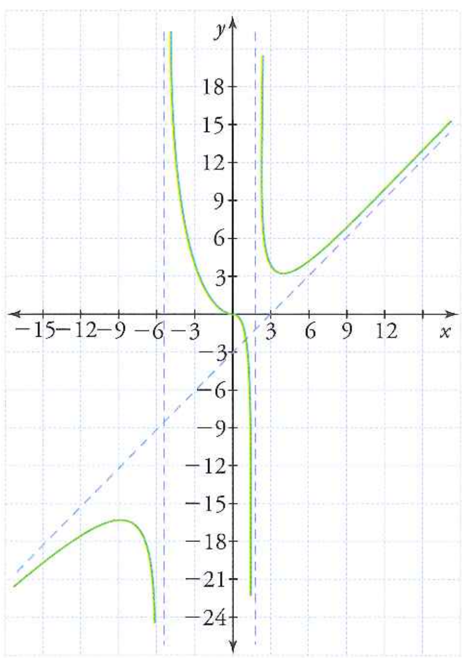
$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3}{x^2 + 3x - 10} - x\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3 - x^3 - 3x^2 + 10x}{x^2 + 3x - 10}\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[\frac{-3x^2 + 10x}{x^2 + 3x - 10}\right]$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-3 + \dfrac{10}{x}}{1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{10}{x^2}} = \frac{-3 + 0}{1 + 0 - 0} = -3$$

Como $\displaystyle\lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = -3$, entonces, la ecuación de la asíntota es $y = x - 3$, como se muestra en la figura.



Una condición necesaria para que una función racional tenga asíntota oblicua es que el grado del polinomio del numerador sea un grado mayor al grado del polinomio del denominador.

Matemáticamente

Demuestra que si $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ con $a > 0$, entonces, $y = \sqrt{a}\,x + \dfrac{b}{2\sqrt{a}}$ y $y = -\sqrt{a}\,x - \dfrac{b}{2\sqrt{a}}$ son asíntotas oblicuas de f.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Completa cada uno de los siguientes enunciados.

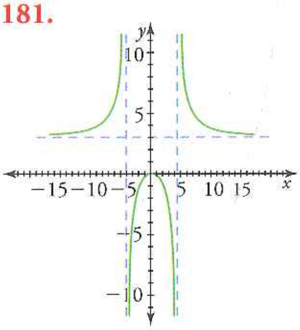
178. Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$, la recta $y = b$ se dice ________ para $y = f(x)$.

179. Una función $f(x)$ tiene una asíntota ________ si $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ existe y es diferente de cero.

180. Si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm \infty$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm \infty$ la recta __________ se dice asíntota vertical para $y = f(x)$.

A partir de la gráfica de la función determina sus asíntotas. Justifica tu respuesta.

181.



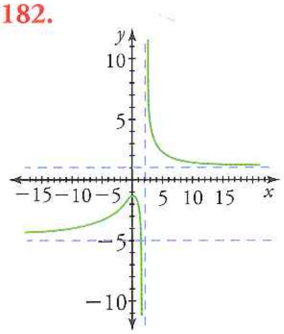
Asíntotas verticales

____

Asíntotas horizontales

____

182.



Asíntotas verticales

____

Asíntotas horizontales

____

Determina el valor de verdad de cada uno de los siguientes enunciados.

183. La recta $y = -3$ es asíntota horizontal para la función $y = f(x) = \dfrac{5 - 6x}{2x + 1}$.

184. La función $g(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 + 3x - 4}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

185. La función $h(x) = \sqrt{x^2 + 9x + 10}$ tiene dos asíntotas oblicuas.

Determina las asíntotas horizontales y verticales, si las hay, de las siguientes funciones.

186. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x + 4}$ **187.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + 5x + 6}$

188. $f(x) = \dfrac{-4x}{x + 3}$ **190.** $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

189. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + 4x}$ **191.** $f(x) = \dfrac{3x - 1}{4x^2 - 1}$

192. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ y $c(x)$ indica el cociente de la división entre p y q.

$p(x)$	$q(x)$	$c(x)$	Asíntota oblicua para $f(x)$
$3x^2 + 2x + 1$	$x - 5$		
$2x^3 + 5x^2 + 7x - 8$	$x^2 + 6x + 10$		
$x^2 + 5x + 6$	$2x - 7$		
$5x^2 + 8$	$x + 1$		

193. ¿Qué conclusión obtienes al completar la tabla?

Encuentra las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones radicales. Realiza un esbozo de su gráfica.

194. $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 2}$

195. $y = g(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 5}$

196. $y = h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

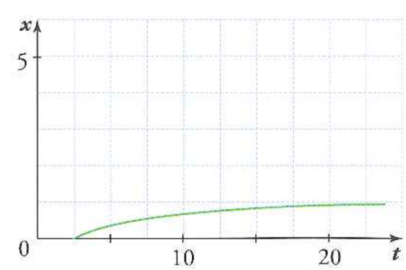
197. $y = j(x) = \sqrt{9x^2 - 12x + 2}$

Encuentra en cada caso una función que cumpla las condiciones propuestas.

198. Las rectas $y = 2$, $y = -2$ y $x = 2$ son asíntotas.

199. La recta $y = 3x + 1$ es asíntota oblicua pero no tiene asíntotas verticales.

La gráfica muestra la estatura x en metros de un mamífero en función de su edad t en años.



200. ¿Qué tipo de asíntota presenta la función $x(t)$?

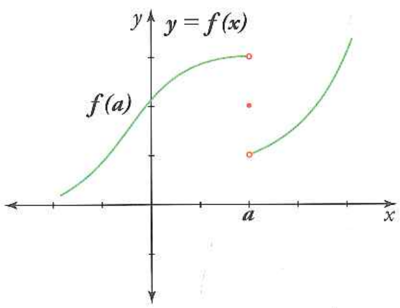
201. ¿Cuál es el significado de esta asíntota en el contexto del problema?

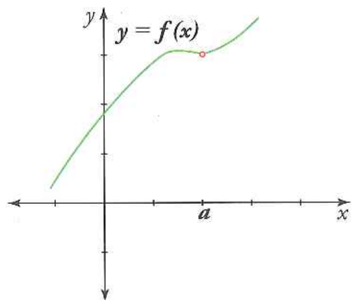
2. Funciones continuas

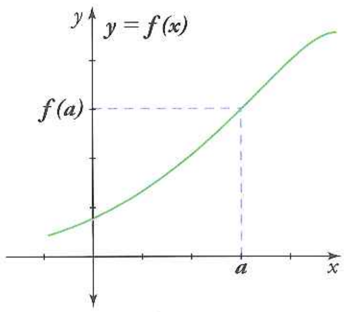
Enlace web

Intuitivamente una función es **continua**, si su gráfica no presenta algún tipo de cambio abrupto o salto. En cálculo, la continuidad de una función se analiza puntualmente.

Por ejemplo, las dos primeras funciones no son continuas para $x = a$. La tercera gráfica muestra una función continua en $x = a$.







Existen situaciones relacionadas con funciones continuas. Por ejemplo, al considerar el crecimiento de un cachorro y analizar la función que describe el peso del cachorro en función del tiempo, describimos una función continua puesto que el peso del cachorro no para de aumentar en los primeros meses de vida.

Ahora, al considerar el precio de la gasolina por galón, se observa que la asignación de estos precios se establece mensualmente y cambia al final de cada mes. En los primeros cuatro meses del año 2012, la gasolina varió mes a mes en promedio $200, como se muestra en la figura 2. En este caso, la función no es continua en los puntos en los que hay un cambio de mes.

Cuando se realizan las operaciones entre funciones continuas dan como resultado funciones continuas. Es decir, si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas, entonces, las siguientes funciones son continuas.

$$f(x) + g(x);\ f(x) - g(x);\ f(x) \cdot g(x);\ \frac{f(x)}{g(x)} \text{ si } g(x) \neq 0;\ k\,f(x);\ (f \circ g)(x).$$

Además, como ejemplos de funciones continuas se tiene que:

- Las funciones polinómicas son continuas en todos los números reales.
- Las funciones racionales son continuas en todos los números reales de su dominio.
- Las funciones radicales son continuas en todos los números reales de su dominio.
- Las funciones exponenciales son continuas en todos los números reales.
- Las funciones logarítmicas son continuas en los números reales donde la función $f(x) = \text{Log}_a\, x$ está definida. Es decir, $a > 0$ y $x > 0$.
- Las funciones trigonométricas $f(x) = \text{sen } x$; $f(x) = \cos x$; $f(x) = \tan x$; $f(x) = \cot x$; $f(x) = \sec x$; $f(x) = \csc x$, son continuas en sus respectivos dominios de definición.

Historia de las matemáticas

Bernard Bolzano (1781-1848)

Bolzano fue uno de los primeros matemáticos en realizar el análisis de funciones. En su estudio, proporcionó una definición formal de continuidad de funciones.

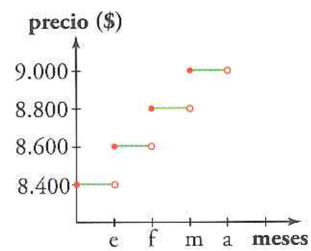


Figura 2.

2.1 Continuidad de una función en un punto

Actividad

Una **función f es continua en un punto** $x = a$ si cumple las siguientes condiciones.

- $f(a)$ existe. Es decir, a está en el dominio de la función f.
- El límite de la función cuando x tiende a a existe. Es decir $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.
- El límite de la función cuando x tiende a a es igual a la función evaluado en a. Es decir, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

En conclusión, una función f es continua en $x = a$, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Además, una función f no es continua en $x = a$, si no cumple alguna de las condiciones descritas, por lo cual se dice que f es *discontinua* en $x = a$ o que presenta una discontinuidad en $x = a$.

EJEMPLOS

1. Determinar si la función $f(x)$ es continua en $x = 2$, si:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{si } x < 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

$f(2) = (2)^2 + 1 = 5$ — Se comprueba que $f(2)$ existe.

Como $f(2) = 5$, entonces, $f(2)$ existe.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ — Se plantea el límite de $f(x)$ para $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (4x - 3)$ — Se halla el límite por la izquierda de la función en $x = 2$.

$= 4(2) - 3 = 5$ — Se calcula el límite.

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 + 1)$ — Se halla el límite por la derecha de la función en $x = 2$.

$= (2)^2 + 1 = 5$ — Se calcula el límite.

Como $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 5$, entonces, $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, existe y es igual a 5.

Finalmente, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$. Es decir, la función $f(x)$ es continua en $x = 2$.

2. Determinar si la función $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4}{x^2 - 6x + 5}$ es continua en $x = 1$ y $x = 3$.

En $x = 1$

$f(1) = \dfrac{3(1)^2 + 4}{(1)^2 - 6(1) + 5} = \dfrac{7}{0}$ — Se comprueba si $f(1)$ existe.

Como $f(1)$ no existe, entonces, la función $f(x)$ es discontinua en $x = 1$.

En $x = 3$

$f(3) = \dfrac{3(3)^2 + 4}{(3)^2 - 6(3) + 5} = \dfrac{31}{-4} = -\dfrac{31}{4}$ — Se comprueba que $f(3)$ existe.

$\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x^2 + 4}{x^2 - 6x + 5}$ — Se halla el límite de $f(x)$ cuando se tiende a 3.

$= \dfrac{3(3)^2 + 4}{(3)^2 - 6(3) + 5} = -\dfrac{31}{4}$ — Se calcula el límite.

Como $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3)$, entonces, la función $f(x)$ es continua en $x = 3$.

2.2 Continuidad de una función en un intervalo

Recurso imprimible

Para determinar la continuidad de una función en un intervalo se estudia la continuidad en cada uno de los puntos del intervalo, así:

Una **función f es continua en un intervalo abierto** (a, b), si f es continua en todos los puntos del intervalo (a, b).

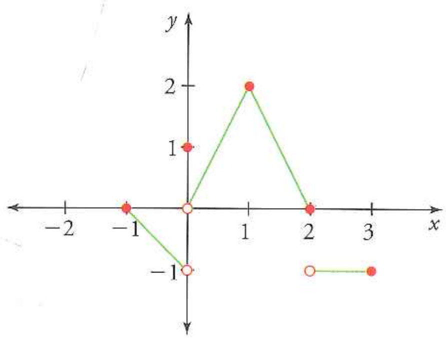
Una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ si:

- f es continua en el intervalo (a, b).
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

La continuidad en los extremos del intervalo se puede entender como una continuidad lateral, ya que el límite lateral es igual a la imagen de la función en dicho valor.

EJEMPLOS

1. **Observar la gráfica de la función $f(x)$. Luego, determinar su continuidad en $[0, 3]$.**



A partir de la gráfica de la función, se analiza la continuidad en $x = 0$; $x = 1$ y $x = 2$, ya que en el resto de puntos la función es continua.

Primero, en $x = 0$; $f(0) = 1$, además,

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

Como $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq f(0)$, entonces, la función no es continua en $x = 0$.

Segundo, en $x = 1$: $f(1) = 2$, además

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$

Luego, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

Como $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$, entonces, la función es continua en $x = 1$.

Luego, en $x = 2$: $f(2) = 0$, además

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -1$

Luego, $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe.

Como $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe, entonces, la función no es continua en $x = 2$.

Finalmente, la función no es continua en $[0, 3]$.

2. **Encontrar el valor de las constantes a y b para que $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$, si**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Como la función debe ser continua en $\mathbb{R}$, los puntos de interés para analizar la continuidad son $x = 0$ y $x = 1$. Por tanto, en $x = 0$; se tiene:

$f(0) = a(0) + b = b$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (ax + b) = b$

Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, entonces $b = 0$.

En $x = 1$; se tiene:

$f(1) = 2$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (ax + b) = a(1) + b = a + b$

Como $b = 0$, se tiene.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = a + 0 = a.$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2 = 2$

Como $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$, entonces $a = 2$.

Finalmente, se verifica que para $a = 2$ y $b = 0$, se tiene que la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono

Responde las siguientes preguntas.

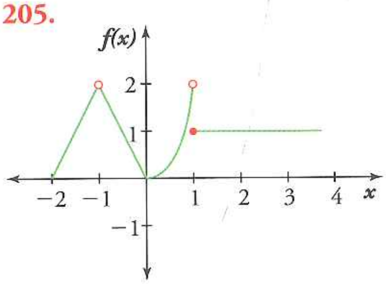
202. ¿Qué condiciones debe cumplir una función f para ser continua en $x = a$?

203. Desde el punto de vista gráfico, ¿cómo se interpreta la continuidad de una función?

204. ¿En qué radica la diferencia entre continuidad en un punto y continuidad en un intervalo?

Las funciones dadas en las siguientes gráficas son discontinuas en los puntos dados. Indica cuál de las condiciones de continuidad es la que falla.

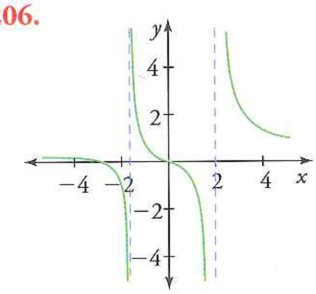
205.



$x = -1$ __________

$x = 1$ __________

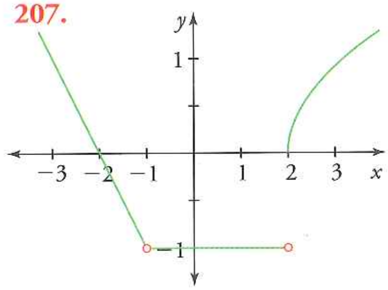
206.



$x = 2$ __________

$x = -\dfrac{3}{2}$ __________

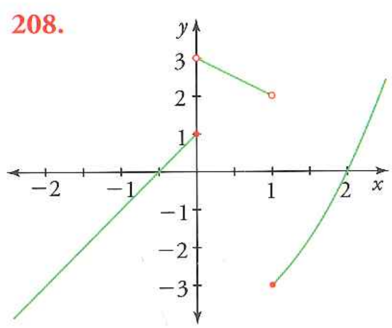
207.



$x = -1$ __________

$x = 2$ __________

208.



$x = 0$ __________

$x = 1$ __________

Determina los valores $x \in \mathbb{R}$, para los cuales la función no es continua.

209. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

210. $f(x) = \dfrac{\csc(x)}{\cot(x)}$

211. $f(x) = \text{Ln}(x^2 + 1)$

212. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + x - 12}$

213. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 5}$

214. $f(x) = \tan^2 x$

Determina si la función es continua en el punto indicado.

215. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{si } x < -1 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geqslant -1 \end{cases}$

en $x = -1$

216. $g(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < -2 \\ x - 5 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ -3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

en $x = -2$ y $x = 0$

217. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 5}{x + 3} & \text{si } x < -3 \\ 4x - 1 & \text{si } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

en $x = -3$ y $x = 0$

Determina el valor de las constantes, para que la función sea continua en todo su dominio.

218. $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ 2a - x^2 & \text{si } -1 < x < 2 \\ b - ax & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

219. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 8x + 15}{k(x + 3)} & \text{si } x \neq -3 \\ 4 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

220. $h(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leqslant -2 \\ ax^2 - 3b + 3 & \text{si } -2 < x < 2 \\ 3x + a + b & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

Completa la definición de cada función a trozos con expresiones no constantes y diferentes, de forma que las funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$.

221. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \\ \boxed{} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

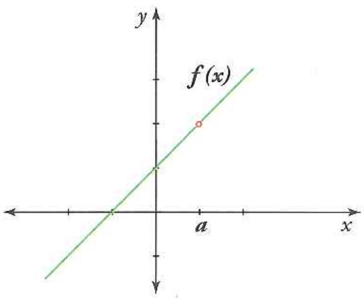
222. $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 3 \\ \boxed{} & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

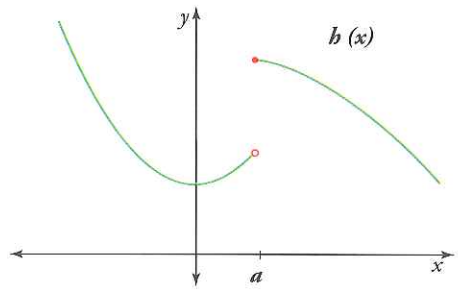
2.3 Discontinuidades

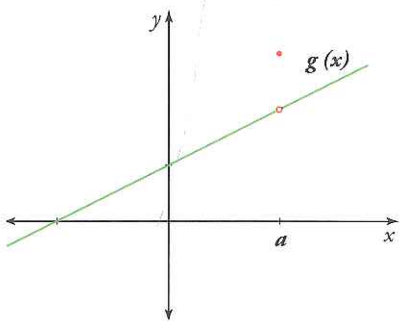
Ampliación multimedia

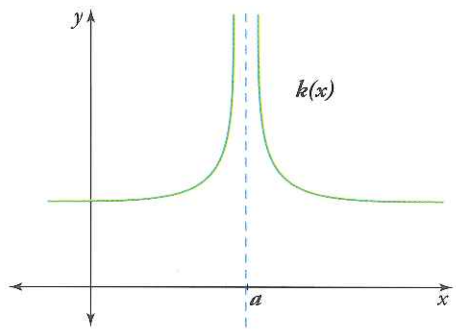
Una **función no es continua** o es **discontinua**, cuando no se cumplen algunas de las condiciones establecidas para ser continua.

Las siguientes gráficas corresponden a funciones discontinuas en un punto.









La función $f(x)$ no es continua en $x = a$, porque $f(a)$ no existe, en la función $g(x)$ no se cumple $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$. Mientras que en las funciones $h(x)$ y $k(x)$ el límite no existe en $x = a$. Es decir, $\lim\limits_{x \to a} h(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} k(x)$ no existen.

Discontinuidad evitable

La función $f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x = a$, si la función no es continua en $x = a$, pero $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe.

En este caso, se redefine la función en el valor indicado, para eliminar la discontinuidad.

EJEMPLO

Analizar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$ **en $x = -2$.**

$$f(-2) = \frac{(-2)^3 + 8}{-2 + 2} = \frac{0}{0}$$

Como $f(-2)$ no existe, entonces, la función no es continua en $x = -2$.

Ahora, se calcula el límite de la función.

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x + 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x + 2)}$$

$$= \lim_{x \to -2} (x^2 + 2x + 4) = 12$$

En este caso, la función $f(x)$ presenta discontinuidad evitable en $x = -2$, ya que no es continua $x = -2$ y $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$ existe.

Ahora, se redefine la función de tal forma que: $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = f(-2)$. Es decir, $f(-2) = 12$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2} \text{ si } x \neq -2 \\ 12 \text{ si } x = -2 \end{cases}$$

Finalmente, la nueva definición de $f(x)$ es continua en $x = -2$.

Discontinuidad no evitable o esencial

Ampliación multimedia

Una función f tiene una **discontinuidad no evitable** o **esencial** en $x = a$, si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ no existe.

Este tipo de discontinuidades se presenta a partir de dos casos:

- Alguno de los límites laterales no existe (o ambos).
- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

EJEMPLOS

1. Comprobar que la discontinuidad de la función $g(x)$ en $x = 3$ es no evitable, donde

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x^3-27} & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{2x-1}{x^3-27}$ Se plantea el límite lateral.

$= -\infty$ Se calcula el límite.

Luego, $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x)$ no existe.

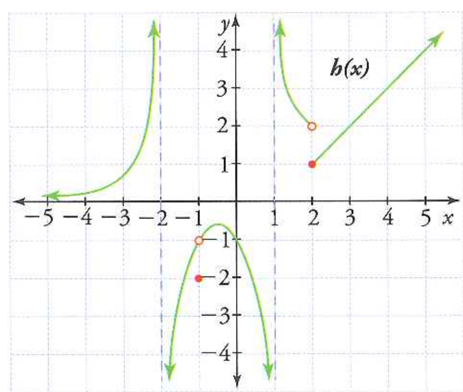
$\lim\limits_{x \to 3^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{2x-1}{x^3-27}$ Se plantea el límite lateral.

$= \infty$ Se calcula el límite.

Luego, $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x)$ no existe.

Como $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x)$ y $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x)$ no existen, entonces, la función $g(x)$ presenta una discontinuidad no evitable en $x = 3$.

2. Observar la gráfica de la función $h(x)$. Luego, determinar los valores de x para los cuales la función presenta discontinuidad evitable o no evitable.



Primero, la función $h(x)$ presenta discontinuidad evitable en $x = -1$, ya que $h(-1) = -2$ y $\lim\limits_{x \to -1} h(x) = -1$.

Segundo, en $x = -2$, la función presenta discontinuidad no evitable, puesto que $\lim\limits_{x \to -2^-} h(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to -2^+} h(x) = -\infty$.

Tercero, en $x = 1$, la función presenta discontinuidad no evitable, porque $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \infty$.

Luego, en $x = 2$, la función $h(x)$ presenta discontinuidad no evitable, ya que $\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = 2$ y $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = 1$.

Finalmente, la función $h(x)$ presenta discontinuidad no evitable en $x = -2$; $x = 1$ y $x = 2$. Además, $h(x)$ presenta discontinuidad evitable en $x = -1$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

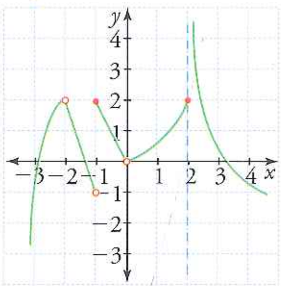
Responde las siguientes preguntas.

223. ¿Cuál es la característica fundamental en una discontinuidad evitable?

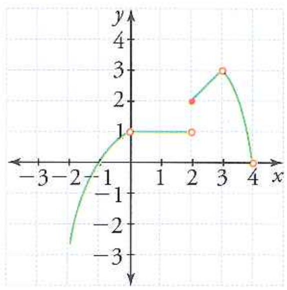
224. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe, ¿qué tipo de discontinuidad presenta f en $x = a$?

Observa la gráfica de cada función, determina los puntos en los cuales es discontinua y clasifica sus discontinuidades.

225.



226.



Encuentra el punto o los puntos donde la función es discontinua. Luego clasifica sus discontinuidades.

227. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } |x| < 2 \\ x + 2 & \text{si } |x| \geqslant 2 \end{cases}$

228. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 2}{x^2 + 9}$

229. $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x^2 + x - 30}$

230. $f(x) = [\![x]\!]$

231. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

232. $f(x) = 3 \tan x$

233. $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

234. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

Redefine cada función, si es posible, para que sea continua en todo el conjunto de los números reales.

235. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{4x}$

236. $g(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

237. $h(x) = \dfrac{2 - \cos 3x}{4x}$

238. $g(x) = \dfrac{2x + 1}{3x - 1}$

239. $h(x) = \dfrac{x^3 - 125}{x - 5}$

240. $j(x) = \dfrac{\tan x}{x}$

241. $j(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \neq 3 \\ 10 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

242. $f(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Determina el valor de verdad de cada uno de los siguientes enunciados. Justifica tu respuesta.

243. La función $f(x) = \dfrac{4x - 1}{x - 2}$ es continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

244. La función $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ tiene una discontinuidad no evitable en $x = 0$.

245. Toda función de la forma $y = f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ posee una discontinuidad esencial.

246. La función $h(x) = \sqrt{9 - x^2}$ es continua en el intervalo $[-3, 3]$.

Construye la gráfica de una función con las condiciones impuestas.

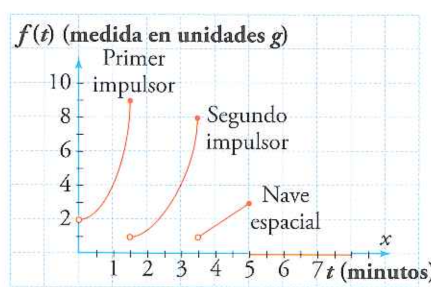
247. Continua en $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$ en $x = -1$ tiene un salto infinito y en $x = 3$ tiene un salto finito.

248. Continua en $\mathbb{R} - \{-2, 1, 3\}$ y sus discontinuidades son removibles.

249. Discontinua únicamente en $x = 0$ con $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$.

250. Discontinua en cualquier número entero.

La gráfica muestra la fuerza de aceleración a la que se ven sometidos los astronautas en el momento del despegue de la nave espacial. Esta tiene dos cohetes de impulso. Aquí g es la fuerza de gravedad.



251. ¿Qué tipo de discontinuidades se observan en la gráfica?

252. Explica con tus palabras el significado de estas discontinuidades.

EJERCICIOS PARA REPASAR

Límite de una función

Halla los límites para cada función dada.

253. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 3 & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{x}{2} + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ ____________

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ ____________

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ____________

254. $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x^2 - x - 10}$

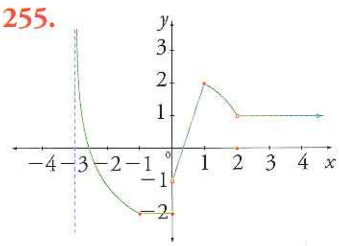
$\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ ____________

$\lim\limits_{x \to -2} g(x)$ ____________

$\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ ____________

Determina cada límite a partir de la gráfica de la función f.

255.



$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) =$ ________

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ ________

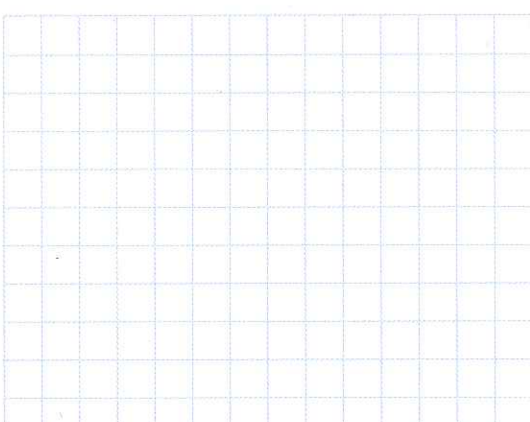
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$ ________

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$ ________

256. **Verifica que las asíntotas de la función**

$f(x) = \dfrac{7x^2 + 2x - 3}{x^2 + 2x - 3}$ **son $x = 3$, $x = 1$ y $y = 7$.**

Luego, realiza un bosquejo de la gráfica.



Calcula los siguientes límites.

257. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{4x - 5}{x^2 + 2x - 6}$

____

258. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x - 4} - \sqrt{2x - 9}}{\sqrt{x + 4} - 3}$

____

259. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 3x + 2}$

____

260. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{|x^2 + 3x + 2|}{x + 2}$

____

261. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}^4(2x)}{x^4}$

____

262. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x^2 + 5x - 10}{x}$

____

263. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{|x| - 4}$

____

Completa los siguientes enunciados.

264. Si $\lim\limits_{x \to -5^-} f(x) = 2$ y $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x) = -3$,

entonces $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ ____________

265. Si $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -2$ y $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = 5$,

entonces $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{g(x) + 2f(x)} =$ ____________

266. Si $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = -3$,

entonces $\lim\limits_{x \to 2} [2f(x)]^{g(x)} =$ ____________

267. Si $\lim\limits_{x \to -5} g(x) = 3$ y $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = 0$, entonces

$\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ y $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ____________

Funciones continuas

Realiza la gráfica de una función que cumpla con las condiciones dadas en cada caso.

268. $\lim_{x\to -4^-} f(x) = 2 + \lim_{x\to -4^+} f(x)$, $f(x)$ tiene asíntota vertical en $x = 1$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$

269. Es discontinua en $x = 3$, tiene asíntota horizontal en $y = -2$ y pasa por los puntos $(2, 0)$ y $(-1, -1)$.

Determina los valores de a o de b en cada función para que sea continua en todo su dominio.

270. $f(x) = \begin{cases} 3a + 5x & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^2 - 4a & \text{si } x > -1 \end{cases}$

El valor de a es: ____________

271. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3b & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

El valor de b es: ____________

272. $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 3 & \text{si } x < 1 \\ 3ax + 4b & \text{si } 1 \leqslant x < 3 \\ -6 & \text{si } 3 \leqslant x \end{cases}$

El valor de a es: ________ y el valor de b es: ________

273. **Redefine la función** $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - x}$ **para que sea continua en todos los reales.**

____

274. **Verifica que la función** $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 7x + 6}$ **tiene discontinuidad infinita en $x = -1$ y en $x = 6$.**

Lee y resuelve.

275. Dibuja una función continua que cumpla que $f(x)$ es negativa si $x > 3$ y es positiva si $x < 3$.

276. Completa.

$\lim_{x\to 3} f(x) =$ ________ y $f(3) =$ ________

Grafica cada función. Luego, determina su continuidad.

277. $g(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \neq 3 \\ 5 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

278. $h(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{x - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

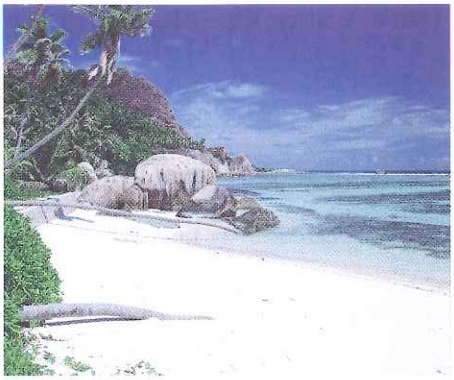
PROBLEMAS PARA REPASAR

La profundidad de la capa de arena en la playa de una isla se ve afectada por la construcción de un dique. En una zona de la playa, la profundidad está dada por la función

$$p(t) = \begin{cases} 2 + t^2 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \dfrac{8t^2 - t - 1}{2t^2} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Donde p es la profundidad en metros y t es el tiempo en años desde el inicio de la construcción del dique.

¿Cuál es la profundidad inicial?, ¿cuál será la profundidad final cuando termine la construcción del dique?, ¿es continua la función?



Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál es la profundidad inicial?, ¿cuál será la profundidad final cuando termine la construcción del dique?, ¿es continua la función $p(t)$?

¿Cuáles son los datos del problema?

La profundidad de la capa de arena está dada por la función $p(t) = \begin{cases} 2 + t^2 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \dfrac{8t^2 - t - 1}{2t^2} & \text{si } t > 1 \end{cases}$.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, cuando $t = 0$, entonces, $p(0) = 2 + 0^2 = 2$. Además, se tiene que:

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{8t^2 - t - 1}{2t^2} = \frac{8}{2} = 4$$

Así, la profundidad inicial es de 2 metros y la profundidad final es de 4 metros.

Luego, se determina si la función es continua. Para esto se tiene que $2 + t^2$ es continua en $[0, 1]$ y $\dfrac{8t^2 - t - 1}{2t^2}$ en continua en $(1, \infty)$.

Para analizar la continuidad en $t = 1$ se tiene que:

$p(1) = 2 + (1)^2 = 3$ Se calcula $p(1)$.

$\lim_{t \to 1^-} P(t) = \lim_{t \to 1^-} (2 + t^2) = 2 + (1)^2 = 3$ Se calcula el límite por la izquierda.

$\lim_{t \to 1^+} P(t) = \lim_{t \to 1^+} \dfrac{8t^2 - t - 1}{2t^2} = \dfrac{8(1)^2 - (1) - 1}{2(1)^2} = \dfrac{8 - 1 - 1}{2} = 3$ Se calcula el límite por la derecha.

Finalmente, como $p(1) = \lim_{t \to 1^-} p(t) = \lim_{t \to 1^+} p(t)$, entonces, la función es continua en $t = 1$ y por tanto, es continua en todo su dominio.

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se comprueba la continuidad de la función $t = 1$. Luego, se tiene que la profundidad final tiende a ser 4 metros a medida que transcurre el tiempo. Además, la profundidad inicial es de 2 metros y la función $p(t)$ es continua en todo su dominio.

279. **El balance entre las pérdidas y las ganancias (beneficios), en millones de pesos, de dos empresas, está dado por las siguientes expresiones:**

Empresa A	$b(t) = \dfrac{12t^2 + 20t - 25}{t^2 + 7}$
Empresa B	$b(t) = \dfrac{4t^2 - 5}{t^2 - 2}$

Donde b es el beneficio y t el tiempo en años.

Calcula hacia que valores tienden los beneficios de ambas empresas conforme transcurre el tiempo.

Resuelve las actividades 280 y 281 de acuerdo con la siguiente situación.

El número de habitantes por millones, de una población, está dado por la función:

$$p(t) = \frac{20 + 2t^2}{t^2 + 5t + 2}$$

Donde t está dado en años.

280. Halla el número de habitantes el año en que se realizó el censo inicial.

281. Calcula cuántos habitantes habrá cuando el tiempo aumenta indefinidamente.

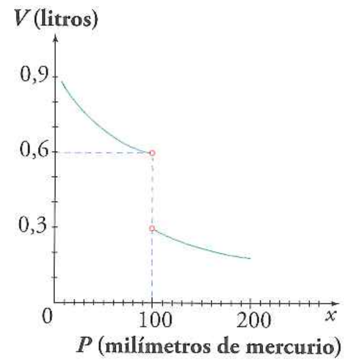
282. La temperatura en grados centígrados de un objeto en función del tiempo t, en horas, está dado por la función:

$$T(t) = \frac{20t^2 + 10t + 25}{t^2 + 6t + 5}$$

¿Qué temperatura tendrá el objeto con el paso indefinido del tiempo?

Resuelve las actividades 283 y 284 de acuerdo con la siguiente información.

Un gas se mantiene a una temperatura constante dentro de un cilindro, cuando el gas se comprime, su volumen disminuye al punto de llegar a una presión crítica, de tal forma que al sobrepasar la presión se convierte en líquido. Este proceso se representa en la siguiente gráfica.



283. Calcula e interpreta $\lim\limits_{x \to 100^-} V$.

284. Calcula e interpreta $\lim\limits_{x \to 100^+} V$.

Responde las preguntas 285 a 287 de acuerdo con la siguiente situación.

Un estudio de rentabilidad revela que una empresa que invierte x millones de pesos obtiene una ganancia $G(x)$ dada por la expresión:

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{48} + \dfrac{7x}{16} - \dfrac{7}{4} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ \dfrac{8}{3}x & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

285. ¿Cuál es la ganancia de la empresa si invierte dos millones de pesos?

286. ¿Es continua la función $G(x)$ en todo su dominio?

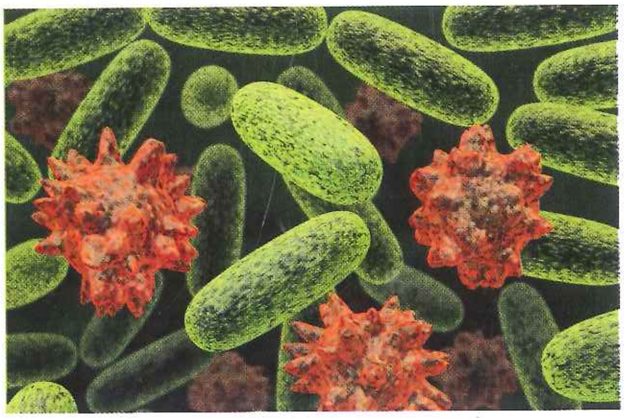
287. Si la inversión es cada vez mayor, ¿qué ganancia obtendrá la empresa?

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

Galería de imágenes

...Para conocer el crecimiento de un cultivo de bacterias.

Los microorganismos son seres vivos, en su gran mayoría unicelulares, cuya reproducción depende de las condiciones en las que habitan. Entre los microorganismos, cuya reproducción es importante controlar, están las bacterias. Así, el control adecuado del crecimiento de un cultivo de bacterias, permite obtener alimentos de calidad y conocer la situación de una epidemia en una población.



Normalmente, el crecimiento de un cultivo de bacterias se puede determinar mediante la aplicación de funciones lineales, cuadráticas, logarítmicas o exponenciales. Sin embargo, en algunas situaciones se utilizan funciones por partes, a las que se les analiza su continuidad para establecer si hay cambios considerables en el patrón de crecimiento del cultivo de bacterias.

Por ejemplo, una colonia de bacterias crece en miles, respecto al tiempo medido en segundos, de acuerdo con la siguiente función:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 + 3 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 3 \\ -5t + 45 & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

Para este caso se observa que existe un cambio considerable cuando han transcurrido 3 segundos, ya que existe una variación en el patrón de crecimiento. Por esta razón, es necesario conocer la continuidad de la función en este punto.

Para saber si la función es continua en este punto es necesario calcular el límite lateral cuando t tiende a 3 por la derecha y por la izquierda.

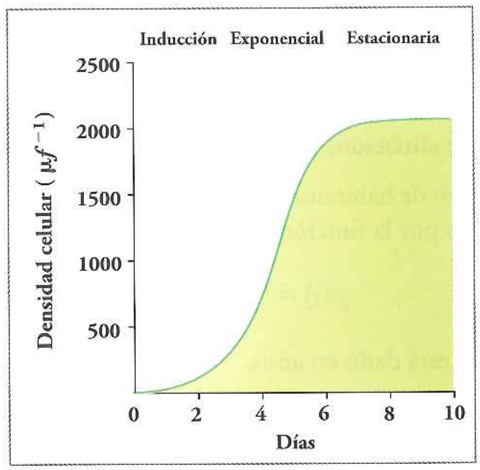
$$\lim_{t \to 3^-} t^2 + 3 = 12$$

$$\lim_{t \to 3^+} -5t + 45 = 30$$

Como los límites por izquierda y derecha son diferentes se dice que la función es discontinua en ese punto, lo que significa que hay un cambio considerable en la población de bacterias y se requiere colocar a la colonia en observación, para definir las condiciones que afectan su crecimiento.

1. **¿Por qué crees que es necesario el control de crecimiento de cultivos de bacterias?**

2. **La siguiente gráfica muestra el crecimiento de las microalgas, que son necesarias como alimento para un cultivo de moluscos.**



La densidad celular inicial es de 25 a 50 células por microlitro de agua.

a. Describe qué sucede con las microalgas en las tres fases mostradas en la gráfica.

b. Evalúa la continuidad de la función gráficamente al cabo del sexto día.

3. **Un cultivo de bacterias crece en miles cada minuto de acuerdo con la siguiente expresión:**

$$P(t) = \begin{cases} 2t^2 + 40 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 6 \\ -8t + 160 & \text{si } t > 6 \end{cases}$$

Analiza la continuidad de la función a partir de la gráfica. Luego, determina si es necesario colocar el cultivo de bacterias en observación.

4. **Consulta en qué sectores de la industria se trabaja con el crecimiento de bacterias. Luego, explica a tus compañeros la importancia de calcular la continuidad de una función de crecimiento.**

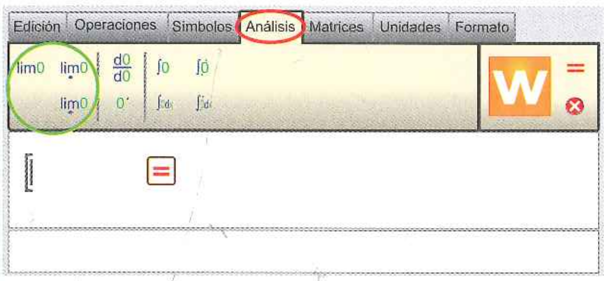
Trabaja con WIRIS

Objetivo: calcular límites de funciones racionales, funciones trigonométricas y funciones exponenciales mediante el uso del programa informático WIRIS.

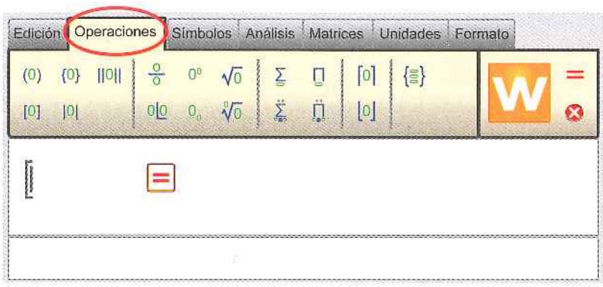
Descripción: analizar y realizar cálculos de límites que presentan funciones racionales, funciones trigonométricas y funciones exponenciales y que tienen como resultado una indeterminación.

Para acceder a WIRIS, ingresa y trabaja online en: www.wiris.net/educa.madrid.org/wiris/es/index.html

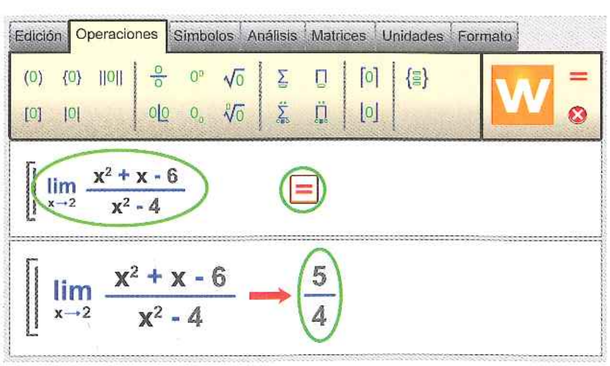
1. Haz clic en **Análisis.** Luego, observa las herramientas asociadas al cálculo de límites de una función y el área de trabajo.



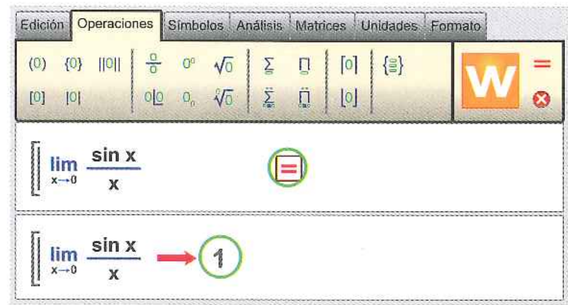
2. Para ingresar una expresión algebraica con signos de agrupación, fracciones y otras operaciones, utiliza las herramientas que se activan en **Operaciones**, como se muestra en la figura.



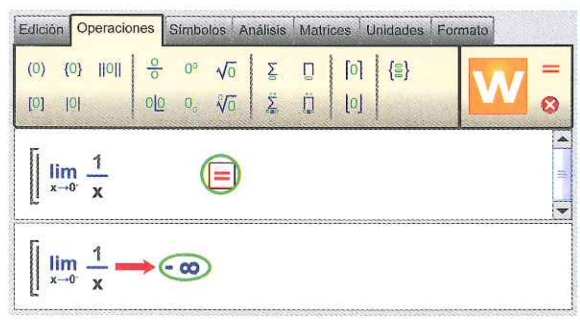
3. Ingresa $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$. Luego, haz clic en $=$ para obtener el resultado, como se muestra en la siguiente figura.



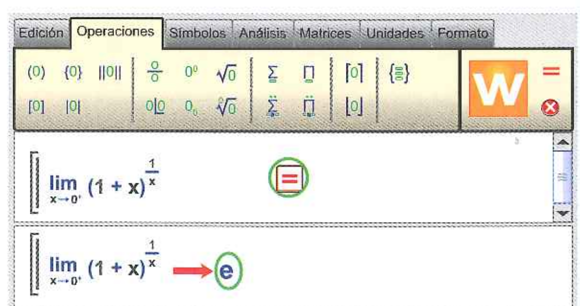
4. Ingresa $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$. Luego, haz clic en $=$ para obtener el resultado, como se muestra en la figura.



5. Ingresa $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x}$. Luego, haz clic en $=$ para obtener el resultado, como se muestra en la figura.



6. Ingresa $\lim\limits_{x \to 0^+} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$. Luego, haz clic en $=$ para obtener el resultado, como se muestra en la figura.



4 Derivadas

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Determinar la **variación de una función**, la **variación media** y la **variación instantánea**.
- Establecer **relaciones entre la derivada de una función y la continuidad de la misma**.
- Calcular la **derivada de una función**.
- Calcular e interpretar la pendiente y la **derivada en un punto**, usando la calculadora.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

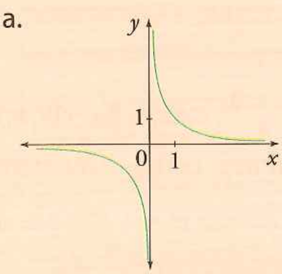
✓ De desempeño ✓ Prueba Saber

- **5** Multimedia
- **1** Galería
- **5** Actividades
- **1** Audio
- **7** Imprimibles
- **3** Enlaces web

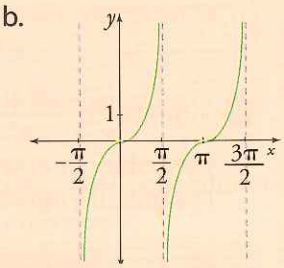
Lo que sabes...

1. Determina los puntos en los que las siguientes funciones tienen límite infinito.

a.



b.



2. Halla la ecuación de la recta a partir de las condiciones dadas.

   a. Tiene pendiente $m = 4$ y pasa por $P(2, 6)$.

   b. Pasa por $A(-1, 5)$, $B(2, 7)$.

3. Calcula los siguientes límites.

   a. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x + 7}$

   b. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x + 5}{x}$

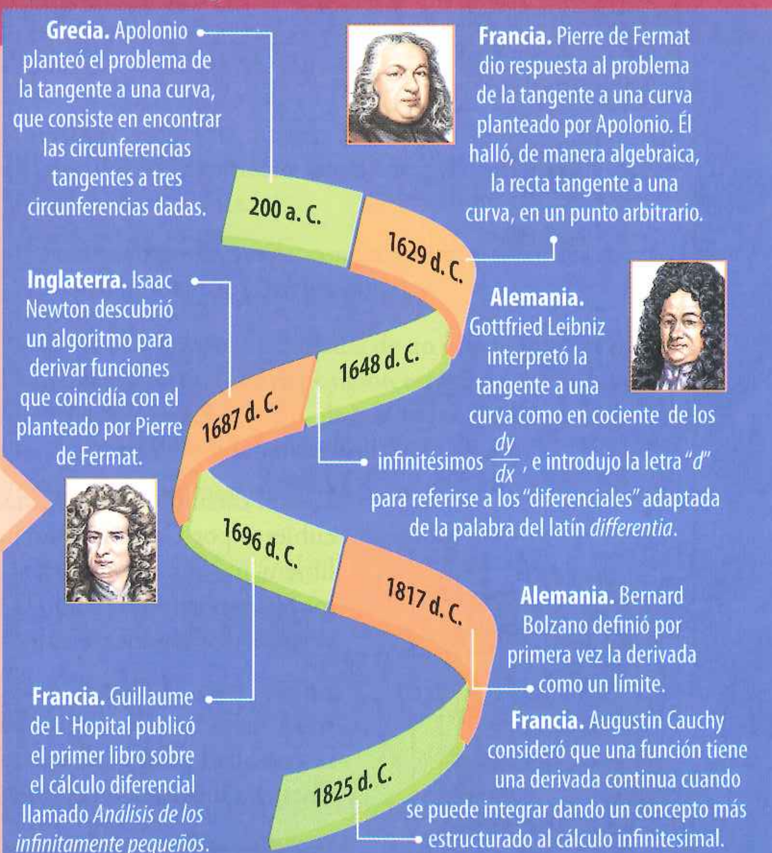
Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

Para medir la variación de la cantidad de azufre presente en la atmósfera.

La actividad volcánica es un fenómeno natural que afecta notablemente la flora, la fauna y a las comunidades que habitan cerca a los volcanes. Así, por ejemplo, la cantidad de azufre presente en la ceniza que emiten los volcanes puede generar enfermedades respiratorias en los seres humanos.

Lee más acerca de este tema en la página 156.

Cronología de las derivadas

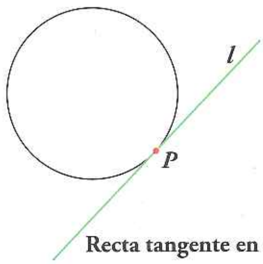


1. Noción de derivada

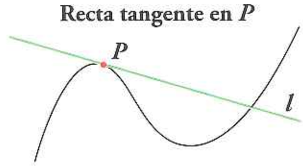
Enlace web

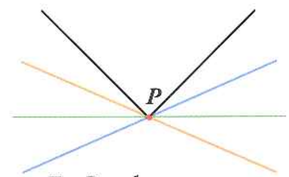
El concepto de **derivada de una función** está relacionado a dos problemas que conllevan el mismo significado matemático: uno tiene que ver con la pendiente de la recta tangente, el cual se remonta desde la época de Arquímedes y el otro involucra el cálculo de la velocidad instantánea de un cuerpo en movimiento, expuesto por Kepler, Galileo y Newton.

Para el caso de la recta tangente a una circunferencia, se tiene en cuenta que una recta tangente es una recta que corta la circunferencia en un solo punto, sin embargo, para curvas más complejas esta interpretación no es pertinente, ya que en algunos casos la recta tangente corta a la curva en más de un punto o en otros casos no habrían rectas tangentes, como se muestra en las siguientes figuras:



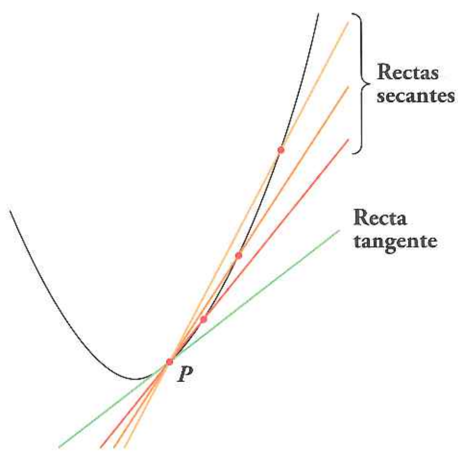
Recta tangente en *P*

Recta tangente en *P*




En *P* no hay tangente

El problema de encontrar la recta tangente en un punto P se reduce a determinar su pendiente en ese punto. En este caso, se aproxima la pendiente de la recta tangente por medio de la recta secante que pasa por el punto P y por otro punto cercano de la curva, como se muestra en la figura.



Para el cálculo de la velocidad de un cuerpo en movimiento, se analiza el hecho descubierto por Galileo, donde propone que la distancia recorrida por un cuerpo al caer libremente es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo, despreciando los factores externos como la resistencia del aire. Es decir, si $s(t)$ es la distancia recorrida después de t segundos, entonces, $s(t) = 4{,}9\ t^2$.

En este caso, la dificultad se presenta al calcular la velocidad instantánea del cuerpo al cabo de un tiempo determinado. Para tal fin, se aproxima esta velocidad por medio de la velocidad promedio, la cual se define como la razón de cambio de la variación de la distancia recorrida en el intervalo de tiempo transcurrido.

A continuación se definen tasa de variación media y tasa de variación instantánea.

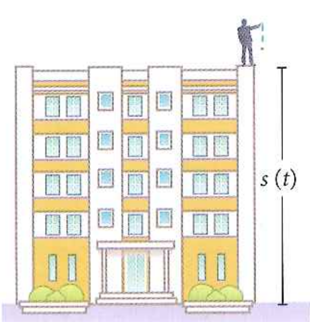
Historia de las matemáticas

Isaac Newton (1642-1727)

Nació el mismo año de la muerte de Galileo. Descubrió los principios del cálculo diferencial hacia los años 1665-1666 y, durante el decenio siguiente, elaboró al menos tres enfoques diferentes de este análisis.

Newton inventó las fluxiones, mientras que Leibniz las diferenciales para indicar las tasas de cambio instantáneas.

Recurso imprimible



1.1 Tasa de variación media

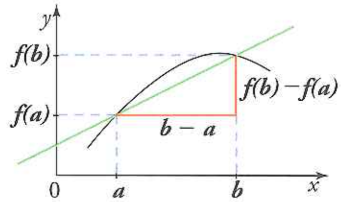
Actividad

La **variación media** de una función f en el intervalo $[a, b]$ es el cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ que se expresa como:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Donde Δx es la variación en x y Δy es la variación de la función f en el intervalo $[a, b]$.

Geométricamente, la tasa de variación media de una función f definida en un intervalo $[a, b]$, equivale a la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función f en los puntos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, como se muestra en la figura.



Recuerda que...

Dada la función $y = f(x)$, se llama variación de la función f en un intervalo $[a, b]$ al valor Δy, que está dado por la expresión:

$$\Delta y = f(b) - f(a)$$

siempre que $a, b \in \text{Dom } f$ y $a < b$.

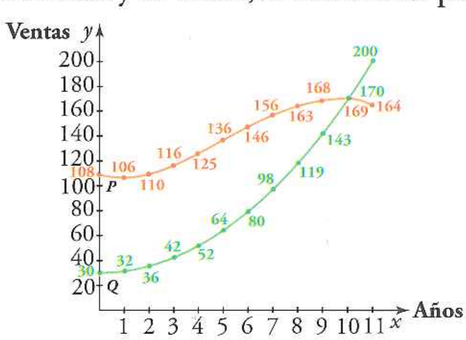
En particular, si $s(t)$ representa el desplazamiento de una partícula a los t segundos, la *velocidad media* $\overline{v}$ de la partícula en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ se define como el cociente:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

En este caso, $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ corresponde a la variación del desplazamiento con respecto al tiempo.

EJEMPLOS

1. **Analizar la tasa de variación media de la siguiente situación. Una empresa textil ha puesto en marcha un nuevo material con la intención de remplazar el tradicional en términos de volumen de ventas. En la gráfica se representa la evolución del volumen de ventas de estos dos materiales durante los 11 años después del lanzamiento del nuevo material. El verde representa el último material, el tiempo está expresado en años y las ventas, en millones de pesos.**



Primero, en la gráfica se muestra que, durante los primeros 10 años, los dos materiales evolucionan en forma favorable. Durante este período, el volumen de ventas del último producto tuvo un aumento de 140 millones de pesos, y el más antiguo, un incremento de 62 millones de pesos.

Luego, la tasa de variación media de ventas del material nuevo, durante los 11 años, es:

$$\frac{q(11) - q(0)}{11 - 0} = \frac{200 - 30}{11} \approx 15,5$$

Así, el volumen de ventas de este material tuvo un crecimiento promedio anual, de 15,5 millones de pesos aproximadamente.

La tasa de variación media de ventas del material tradicional, durante los 11 años, es:

$$\frac{p(11) - p(0)}{11 - 0} = \frac{164 - 108}{11} \approx 5,1$$

Así, el volumen de ventas de este material tuvo un crecimiento promedio anual, de 5,1 millones de pesos aproximadamente.

Finalmente, se puede concluir que el material nuevo presenta una mejor proyección.

2. **Hallar la velocidad media de un objeto que cae desde cierta altura y cuya posición está dada por la función $s(t) = -4{,}9t^2 + 30$, donde s está medida en metros y t está medido en segundos, en $[1, 2]$.**

La velocidad media del objeto en el intervalo $[1, 2]$ está dada por:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1}$$ Se remplazan los valores en la expresión de velocidad media.

$$= \frac{[-4,9(2)^2 + 30] - [-4,9(1)^2 + 30]}{1}$$ Se evalúa la función.

$$= [10,4] - [25,1]$$

$$= -14,7$$ Se resuelven las operaciones.

Como el objeto está cayendo, la velocidad media es negativa. Es decir, $-14,7$ m/s.

1.2 Tasa de variación instantánea

Ampliación multimedia

Si se desea conocer la tasa de variación de una función en un instante dado, se debe considerar Δx cada vez más pequeño. Por tanto, la tasa de variación instantánea de una función en $x = a$ se define como:

$$\lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

siempre que el límite exista.

Cuando $b = a + h$ se tiene que la tasa de variación instantánea de f es $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

Específicamente, si $s(t)$ representa el desplazamiento de un cuerpo a los t segundos, se define la **velocidad instantánea** como el límite de las velocidades medias en el intervalo de tiempo $[t_1, t]$, cuando t tiende a t_1, es decir, $\lim\limits_{t \to t_1} \dfrac{s(t) - s(t_1)}{t - t_1}$, siempre que el límite exista.

Recuerda que...

La rapidez corresponde al valor absoluto de la velocidad e indica lo rápido que se mueve un objeto, sin importar la dirección.

Matemáticamente

¿Cuáles funciones tienen variación instantánea igual para cualquier punto? ¿Qué función tiene tasa de variación instantánea cero?

EJEMPLOS

1. Determinar la tasa de variación instantánea de cada función en valor indicado.

a. $f(x) = -4x + 9$ **en** $x = -1{,}5$.

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-1{,}5 + h) - f(-1{,}5)}{h}$ — Se halla la tasa de variación instantánea $x = -1{,}5$.

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[-4(-1{,}5 + h) + 9] - [-4(-1{,}5) + 9]}{h}$ — Se evalúa $f(x)$ para $x = -1{,}5 + h$ y $x = -1{,}5$.

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[6 - 4h + 9] - [6 + 9]}{h}$ — Se multiplica.

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[15 - 4h] - [15]}{h}$ — Se suma.

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-4h}{h}$ — Se resta.

$= \lim\limits_{h \to 0} -4 = -4$ — Se simplifica y se calcula el límite.

Finalmente, la tasa de variación instantánea de $f(x) = -4x + 9$ en $x = -1{,}5$ es -4.

b. $f(x) = x^3 - 5x$ **en** $x = 2$.

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h}$ — Se aplica la definición de tasa de variación instantánea en $x = 2$.

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[(2 + h)^3 - 5(2 + h)] - [(2)^3 - 5(2)]}{h}$ — Se evalúa $f(x)$ para $x = 2 + h$ y $x = 2$.

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[(8 + 12h + 6h^2 + h^3) - 10 - 5h] - [8 - 10]}{h}$ — Se resuelven las potencias.

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[-2 + 7h + 6h^2 + h^3] - [-2]}{h}$ — Se realizan las operaciones.

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{7h + 6h^2 + h^3}{h}$ — Se resta.

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(7 + 6h + h^2)}{h}$ — Se factoriza.

$= \lim\limits_{h \to 0} (7 + 6h + h^2) = 7$ — Se simplifica y se calcula el límite.

Finalmente, la tasa de variación instantánea de $f(x) = x^3 - 5x$ en $x = 2$ es 7.

Recurso imprimible

2. La función de posición de un objeto está dada por la expresión $s(t) = 3t^2 - 5t + 8$ en la cual t está dada en segundos y $s(t)$ en metros.

a. Encontrar la velocidad media del objeto en el intervalo [8, 11].

Se calcula la velocidad media para $t_1 = 8$ y $t_2 = 11$.

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$ Expresión de velocidad media.

$$= \frac{s(11) - s(8)}{11 - 8}$$ Se remplazan los valores de t_1 y t_2, respectivamente.

$$= \frac{[3(11)^2 - 5(11) + 8] - [3(8)^2 - 5(8) + 8]}{3}$$ Se evalúa $s(t)$ para 11 y 8.

$$= \frac{[316] - [160]}{3} = 52$$ Se resuelven las operaciones.

Finalmente, la velocidad media es 52 metros por segundo.

b. Determinar la velocidad en 10 segundos.

Para determinar la velocidad en $t = 10$, se tiene que:

$$\lim_{t \to t_1} \frac{s(t) - s(t_1)}{t - t_1} = \lim_{t \to 10} \frac{s(t) - s(10)}{t - 10}$$ Se remplaza t_1 por 10.

$$= \lim_{t \to 10} \frac{[3t^2 - 5t + 8] - [3(10)^2 - 5(10) + 8]}{t - 10}$$ Se evalúa $s(t)$ para $t = 10$.

$$= \lim_{t \to 10} \frac{[3t^2 - 5t + 8] - [258]}{t - 10}$$ Se resuelven las operaciones.

$$= \lim_{t \to 10} \frac{3t^2 - 5t - 250}{t - 10}$$ Se resta.

$$= \lim_{t \to 10} \frac{(t - 10)(3t + 25)}{t - 10}$$ Se factoriza.

$$= \lim_{t \to 10} (3t + 25)$$ Se simplifica.

$$= 3(10) + 25 = 55$$ Se aplica sustitución directa.

Finalmente, la velocidad en $t = 10$ segundos es 55 metros por segundo.

3. Una barra de hierro se calienta durante un período determinado, de modo que su temperatura $c(t)$, en grados Celsius, se ha incrementado como una función del tiempo t en minutos, de acuerdo con la función $c(t) = t^3$. Calcular la tasa de variación puntual (tasa instantánea) de la temperatura en relación con el tiempo en $t = 5$.

$$\lim_{t \to t_1} \frac{c(t) - c(t_1)}{t - t_1} = \lim_{t \to 5} \frac{c(t) - c(5)}{t - 5}$$ Tasa de variación instantánea en $t = 5$.

$$= \lim_{t \to 5} \frac{t^3 - 125}{t - 5}$$ Se evalúa $c(t)$ para $t = 5$.

$$= \lim_{t \to 5} \frac{(t - 5)(t^2 + 5t + 25)}{t - 5}$$ Se factoriza.

$$= \lim_{t \to 5} (t^2 + 5t + 25)$$ Se simplifica.

$$= (5)^2 + 5(5) + 25 = 75$$ Se aplica sustitución directa.

Finalmente, la tasa de variación instantánea es 75 grados Celsius por minuto.

Interpreto • Argumento • Modelo • Ejercito • Propongo • Soluciono problemas

Responde. Explica tu respuesta.

1. ¿Cuáles fueron los dos problemas que dieron origen al concepto de derivada?
2. ¿Cuál es la relación entre tasa de variación media y velocidad promedio?
3. ¿Cómo se determina la tasa de variación instantánea?

Halla la tasa de variación media de las siguientes funciones en cada uno de los intervalos.

$$f(x) = x^2 + 3x - 6 \text{ y } g(x) = x^3 - 4x$$

4. $[0, 10]$
5. $[-4, 5]$

Calcula la tasa de variación media en el intervalo $[-7, 2]$ de cada una de las siguientes funciones.

6. $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 12x^2 + 48$
7. $g(x) = \dfrac{5x + 5}{x^2 + 25}$
8. $h(x) = 2^x + 7x$
9. $f(x) = \text{Log}\,|3x - 8|$
10. $h(x) = \text{sen}\,(5x) - \cos\,(\pi x)$

11. **Traza la gráfica de una función continua que cumpla las siguientes condiciones:**
    - La tasa de variación media en $[-5, 0]$ es negativa.
    - La tasa de variación media en $[0, 4]$ es positiva.
    - La tasa de variación media en los intervalos $[4, 8]$ y $[-8, -5]$ es igual a cero.

Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifica tu respuesta.

12. Si una función polinómica es creciente en el intervalo $[a, b]$, entonces, la tasa de variación media es positiva, para cualquier subconjunto del intervalo $[a, b]$.
13. Si una función polinómica posee tasa de variación media positiva en el intervalo $[a, b]$, entonces, la función es creciente en ese intervalo.
14. La tasa de variación media de $f(x) = -5x + 8$ en cualquier intervalo es -5.
15. La tasa de variación instantánea de la función $g(x) = x^2$ en $x = a$, es $a + 2$.

Encuentra la velocidad que lleva un objeto, en el instante t dado, cuya fórmula de movimiento $s(t)$ se indica en cada caso. $s(t)$ está medida en metros.

16. $s(t) = 2t^2 + 1$ en $t = 3$ s.
17. $s(t) = 4 - t^2$ en $t = 2$ s.
18. $s(t) = \sqrt{t + 1}$ en $t = 8$ s.
19. $s(t) = \dfrac{1}{t}$ en $t = 5$ s.
20. $s(t) = -8t + 13$ en $t = \dfrac{3}{4}$ s.
21. $s(t) = \dfrac{t}{t^2 + 1}$ en $t = 10$ s.

Lee y resuelve.

La presión p, en atmósferas, de un líquido homogéneo y en equilibrio, varía con la profundidad h, en metros, de acuerdo con la siguiente tabla:

Profundidad h (m)	Presión p (atm)
0	1,0
5	1,5
8	k
10	2,0
12	2,2
15	2,5

22. Calcula la tasa de variación media de la presión en función de la profundidad en el intervalo de 0 a 15 metros.
23. Para cualquier profundidad h de intervalo 0 m a 15 m, la presión p puede ser descrita por la función $p = ah + b$, donde a y b son constantes, con $a \neq 0$. Determina los valores de a y b.
24. Calcula la presión en 8 m de profundidad.
25. Demuestra que la tasa de variación media de la presión en función de la profundidad en el intervalo de 0 m hasta 15 m, es constante para cualquier valor distinto, h_1 y h_2 de profundidad.

La cotización de una acción de la Bolsa de valores sigue la función $f(x) = 0{,}02x^2 + 1$, donde x es el día de la semana (0 = lunes, 1 = martes, …).

26. Halla la tasa de variación media de esa cotización de lunes a viernes.

2. Derivada de una función

Ampliación multimedia

La **derivada de una función** $f(x)$, es la función $f'(x)$ definida por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siempre que el límite exista.

La notación $f'(x)$ se lee "efe prima de x". Además, existen otras notaciones para la derivada que son: y' que se lee "derivada de y"; $\frac{dy}{dx}$ que se lee "derivada de y con respecto a x" y $D_x(y)$ que se lee "derivada con respecto a x de y".

El proceso para hallar la derivada de una función se denomina **diferenciación**.

EJEMPLOS

Determinar la derivada de cada función.

a. $f(x) = 7x - 6$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[7(x+h) - 6] - [7x - 6]}{h} = \lim_{h \to 0} 7 = 7$$

Se aplica la definición de derivada y se calcula el límite.

Finalmente, la derivada de $f(x) = 7x - 6$ es $f'(x) = 7$.

b. $g(x) = \frac{1}{x^2}$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{1}{(x+h)^2}\right] - \left[\frac{1}{x^2}\right]}{h}$$

Definición de derivada.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h}$$

Se restan las funciones.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x^2 - x^2 - 2xh - h^2}{x^2(x+h)^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h(2x+h)}{hx^2(x+h)^2}$$

Se resuelven las operaciones y se factoriza.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(2x+h)}{x^2(x+h)^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

Se simplifica y se calcula el límite.

Finalmente, la derivada de $g(x) = \frac{1}{x^2}$ es $g'(x) = -\frac{2}{x^3}$ siempre que $x \neq 0$.

c. $h(x) = \sqrt[3]{x}$

$$h'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}$$

Definición de derivada.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\,\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\,\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2}$$

Se complifica por el conjugado de $\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}$.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h[(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\,\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2]}$$

Se multiplica.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\,\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Se simplifica y se calcula el límite.

Finalmente, la derivada de $h(x) = \sqrt[3]{x}$ es $h'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ siempre que $x \neq 0$.

Historia de las matemáticas

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1642-1716)

Leibniz inventó el cálculo y le dio el nombre a esta disciplina. Introdujo la notación $\frac{dy}{dx}$ para expresar la derivada de una función.

2.1 Derivada de una función en un punto

Ampliación multimedia

La **derivada de una función** $f(x)$ **en el punto** $x = a$, se simboliza como $f'(a)$ y está dada por:

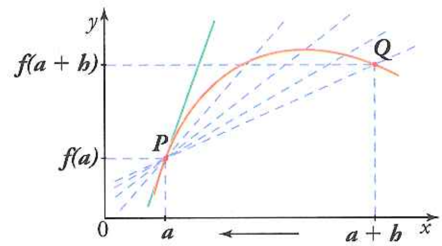
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \text{ o } f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Siempre que el límite existe.

Matemáticamente

Explica cómo, a partir de la tasa de variación media, se puede obtener la derivada de una función en un punto.

Si $f'(a)$ está definida, significa que $f(x)$ es derivable en a, o que $f(x)$ tiene una derivada en a. Geométricamente, la derivada es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $P(a, f(a))$, como se muestra en la siguiente figura.



En la figura se observa que la pendiente entre los puntos P y Q es:

$$m = \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Luego, cuando h tiende a 0, se obtiene la pendiente de la recta tangente en el punto P.

Es decir, $\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

EJEMPLOS

Calcular la derivada de cada función en el punto indicado.

a. $f(x) = \sqrt{x + 1}$ **en** $x = 2$.

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(2 + h) + 1} - \sqrt{(2) + 1}}{h}$$ Derivada en un punto.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3 + h} - \sqrt{3}}{h}$$ Se suma.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{3 + h} - \sqrt{3}}{h} \cdot \frac{\sqrt{3 + h} + \sqrt{3}}{\sqrt{3 + h} + \sqrt{3}}$$

Se complifica por el conjugado de $\sqrt{3 + h} - \sqrt{3}$.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3 + h) - 3}{h[\sqrt{3 + h} + \sqrt{3}]}$$ Se multiplica.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{3 + h} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$ Se simplifica y se calcula el límite.

Finalmente, la derivada de la función en $x = 2$ es:

$$f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

b. $g(x) =$ **sen** x **en** $x = \pi$

$$g'(\pi) = \lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \pi}{x - \pi}$$ Derivada en un punto.

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{2\cos\left(\frac{x + \pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x - \pi}{2}\right)}{x - \pi}$$ Se aplica la fórmula de sen A − sen B.

$$= \lim_{x \to \pi} \frac{\cos\left(\frac{x + \pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x - \pi}{2}\right)}{\frac{x - \pi}{2}}$$ Se divide por 2 el numerador y el denominador.

$$= \lim_{x \to \pi} \cos\left(\frac{x + \pi}{2}\right) \cdot \lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x - \pi}{2}\right)}{\frac{x - \pi}{2}}$$ Se aplica la propiedad de los límites.

$$= \cos\left(\frac{\pi + \pi}{2}\right) \cdot 1$$ Se aplica $\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{sen}(x - a)}{x - a} = 1$.

$$= \cos(\pi) = -1$$

Finalmente, la derivada de la función $g(x) =$ sen x en $x = \pi$ es $g'(\pi) = -1$.

Derivadas laterales

Enlace web

La derivada por la derecha de $f(x)$ en el punto $x = a$, se simboliza como $f_+'(a)$ y está dada por $f_+'(a) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ o $f_+'(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ si existe el límite.

La derivada por la izquierda de $f(x)$ en el punto $x = a$, se simboliza como $f_-'(a)$ y está dada por $f_-'(a) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ o $f_-'(a) = \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ si existe el límite.

Una función es derivable en un punto si las derivadas laterales en el punto existen y son iguales.

EJEMPLOS

1. Comprobar que si $h(x) = |x - 2|$, entonces $h'(2)$ no existe. Luego, trazar la gráfica.

La función $h(x) = |x - 2|$, se expresa como $h(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geqslant 2 \\ -x + 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

Primero, se hallan las derivadas laterales en $x = 2$.

$h_+'(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{h(x) - h(2)}{x - 2}$ Se aplica definición de derivada lateral.

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{[x - 2] - [2 - 2]}{x - 2}$ Se evalúa $h(x)$ y $h(2)$.

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x - 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^+} 1 = 1$ Se simplifica y se calcula el límite.

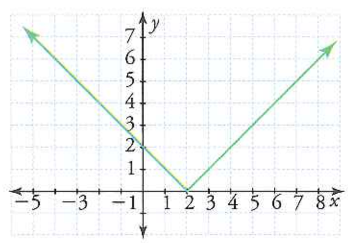
$h_-'(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{h(x) - h(2)}{x - 2}$ Se aplica definición de derivada lateral.

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{[-x + 2] - [2 - 2]}{x - 2}$ Se evalúa $h(x)$ y $h(2)$.

$= \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{-x + 2}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2^-} -1 = -1$ Se simplifica y se calcula el límite.

Luego, $h_+'(2) = 1$ y $h_-'(2) = -1$.

Como $h_+'(2) \neq h_-'(2)$, se tiene que $h'(2)$ no existe, de modo que h no es diferenciable en 2. Así, la gráfica de la función h no tiene recta tangente en $x = 2$.



A partir de la gráfica de la función $h(x)$ se puede concluir que en los puntos en los cuales la gráfica de una función tiene "puntas" o "picos", la función no es derivable.

2. Si $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 \text{ si } x \leqslant 1 \\ x^2 + x \text{ si } x > 1 \end{cases}$, hallar $f'(1)$.

Se hallan las derivadas laterales en $x = 1$.

$f_+'(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{[x^2 + x] - [2]}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(x + 2)(x - 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^+} (x + 2) = 3$

$f_-'(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{[x^3 + 1] - [2]}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

$= \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + x + 1) = 3$

Como $f_+'(1) = f_-'(1)$, se tiene que $f'(1)$ existe y es igual a 3.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Responde.

27. ¿Cuál es la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto?

28. ¿Cómo se definen las derivadas laterales de una función en un punto?

29. ¿Cuál es la diferencia entre la derivada de una función y la derivada de una función en un punto?

Relaciona cada función con su respectiva derivada.

30. $y = 6x$
31. $y = \frac{2}{x^3}$
32. $y = 2x^3 - 6$
33. $y = 3x^2$
34. $y = \frac{3}{x^2}$

a. $y' = 6x$
b. $y' = -\frac{6}{x^3}$
c. $y' = -\frac{6}{x^4}$
d. $y' = 6$
e. $y' = 6x^2$

Halla la función derivada y la derivada en el punto indicado.

35. $f(x) = 4x + 10$ en $x = -3$
36. $g(x) = 5x^2$ en $x = \frac{1}{5}$
37. $h(x) = -x^2 + 3x - 8$ en $x = -3$
38. $g(x) = \frac{1}{x+3}$ en $x = -4$
39. $h(x) = \sqrt{x-7}$ en $x = 8$

Demuestra cada una de las siguientes proposiciones.

40. Si $f(x) = \frac{k}{x}$, entonces, $f'(a) = -\frac{k}{a^2}$ con $a \neq 0$.

41. Si $f(x) = \sqrt{x-a}$, entonces, la función $f(x)$ no es derivable en $x = a$.

42. Si $f(x) = 4x^2 + 8$ y $g(x) = 4x^2 - 7$, entonces, la derivada de $f(x)$ y $g(x)$ son iguales.

43. **Indica cuál fue el error cometido al calcular la derivada de la función en el punto indicado. Explica tu respuesta.**

$f(x) = x^3$ en $P(1, 1)$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^3 - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + h^3 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^3}{h} = 0$$

Luego, $f'(1) = 0$.

Lee y resuelve.

La altura h, en metros, de un balón lanzado en una trayectoria vertical, en función del tiempo t, en segundos, a partir del instante en que es lanzada, está dada por:

$h(t) = 1{,}75 + 130t - 5t^2$

44. Determina la velocidad inicial del balón.

45. ¿Cuál es la velocidad del balón al cabo de cinco segundos?

46. Determina el instante en que la velocidad del balón se anula. ¿Qué representa ese instante en la trayectoria del balón?

El desplazamiento de un automóvil, en metros, como función del tiempo t en segundos está dada por:

$s(t) = \frac{2}{3}t^2 - 8t + 50$

47. Determina la velocidad en el instante de tiempo $t = 5$.

48. Determina la velocidad en el instante de tiempo $t = 8$.

La intensidad de corriente I en un instante t_1 está dado por la derivada de la cantidad de carga eléctrica Q que pasa por una superficie plana en t_1 segundos.

49. Si la cantidad de carga eléctrica está dada por la expresión $Q(t) = 2t^3 + t^2 - 3t + 4$ culombios (C), ¿cuál es la intensidad de corriente en el instante $t = 2$ s.

50. ¿En cuál instante se anula la intensidad de corriente?

2.2 Recta tangente

Recurso imprimible

La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es $m_t = f'(a)$ siempre que este valor exista y su ecuación es $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

EJEMPLOS

1. Encontrar la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3x^2 + 2x$ en el punto $(-1, 1)$. Luego, realizar la representación gráfica.

Primero, se halla la pendiente de la recta tangente, así:

$$m_t = f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$ Se aplica la derivada en un punto.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3(-1+h)^2 + 2(-1+h)] - [3(-1)^2 + 2(-1)]}{h}$$ Se evalúa $f(x)$ en $x = -1 + h$ y $x = -1$.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[3h^2 - 4h + 1] - [1]}{h}$$ Se resuelven las operaciones indicadas.

$$= \lim_{h \to 0} (3h - 4) = -4$$ Se simplifica y se calcula el límite.

Ahora, con $f'(-1) = -4$ y el punto $(-1, 1)$ se determina la ecuación de la recta:

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$ Se aplica ecuación de la recta tangente.

$y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$ Se remplaza a por -1.

$y = -4(x + 1) + 1$ Se sustituyen los valores de $f'(-1)$ y $f(-1)$.

$y = -4x - 3$ Se resuelven las operaciones.

Finalmente, la ecuación de la recta tangente es $y = -4x - 3$ y la representación gráfica se muestra en la figura 1.

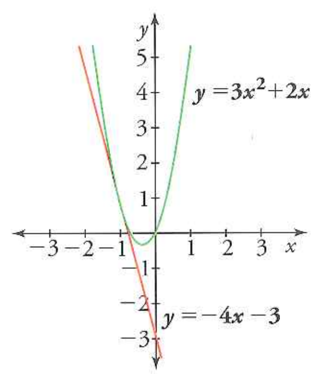


Figura 1.

2. Determinar el punto de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x$ para el cual la ecuación de la recta tangente en el punto es $y = 4x - 2$. Luego, realizar la gráfica.

Primero, se halla la pendiente de la recta tangente, para el punto (x_1, y_1) que pertenece a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x$.

$$m_t = f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$ Se aplica la derivada en un punto.

$$= \lim_{x \to x_1} \frac{[x^3 + x] - [x_1^3 + x_1]}{x - x_1}$$ Se evalúa $f(x)$ y $f(x_1)$.

$$= \lim_{x \to x_1} \frac{(x - x_1)(x^2 + xx_1 + x_1^2 + 1)}{x - x_1}$$ Se resta y se factoriza.

$$= \lim_{x \to x_1} (x^2 + xx_1 + x_1^2 + 1) = 3x_1^2 + 1$$ Se simplifica y se calcula el límite.

Luego, $m_t = f'(x_1) = 3x_1^2 + 1$.

Como la ecuación de la recta tangente es $y = 4x - 2$, entonces, la pendiente es 4.

$3x_1^2 + 1 = 4$ Se iguala $f'(x_1)$ con la pendiente de la recta tangente.

$x_1^2 = 1$ Se despeja x_1^2.

Así, $x_1 = 1$ o $x_1 = -1$ y por tanto $f(1) = 2$ y $f(-1) = -2$.

Finalmente, como $(-1, -2)$ no pertenece a la recta, entonces el punto de la gráfica de $f(x) = x^3 + x$, es $(1, 2)$, como se muestra en la figura 2.

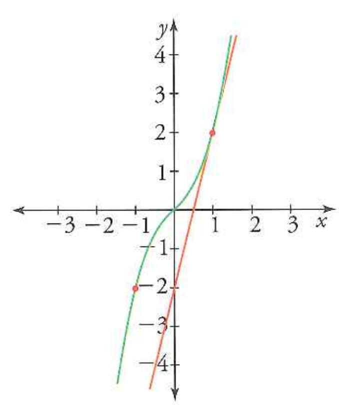


Figura 2.

2.3 Recta normal

Actividad

La **recta normal** a la gráfica de una función en un punto dado es la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto.

Si m_t es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función f en $P(a, f(a))$, es decir, $m_t = f'(a)$, entonces, la pendiente de la recta normal a f es:

$$m_n = -\frac{1}{f'(a)} = -\frac{1}{m_t} \text{ con } m_t \neq 0$$

La ecuación de la recta normal es:

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$$

Recuerda que...

Dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares si sus pendientes m_1 y m_2 cumplen la condición

$m_1 \cdot m_2 = -1$

o $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$.

EJEMPLOS

Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$ en el punto (4, 2). Luego, realizar la representación gráfica.

Primero, se halla la pendiente de la recta tangente, así:

$$m_t = f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$ Se aplica la derivada en un punto.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\dfrac{4}{(4+h)-2}\right] - \left[\dfrac{4}{(4)-2}\right]}{h}$$ Se evalúa $f(x)$ en $x = 4 + h$ y $x = 4$.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\dfrac{4}{2+h}\right] - [2]}{h}$$ Se resta y se divide.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h(2+h)}$$ Se resuelven las operaciones indicadas.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2}{(2+h)} = -1$$ Se simplifica y se calcula el límite.

Luego, la pendiente de la recta tangente en (4, 2) es -1, y en consecuencia la pendiente de la recta normal es 1. Al remplazar en las expresiones para hallar las respectivas ecuaciones se tiene:

Ecuación de la recta tangente:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

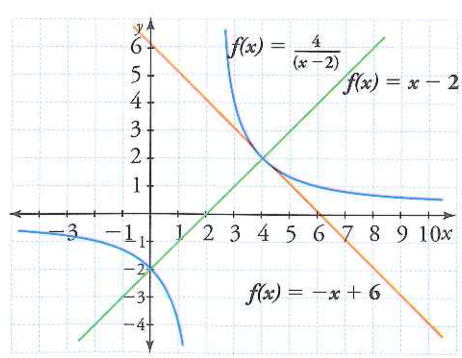
$$= -1(x - 4) + 2 = -x + 6.$$

Ecuación de la recta normal:

$$y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$$

$$= -\frac{1}{-1}(x - 4) + 2 = x - 2$$

Finalmente, en el punto (4, 2) de la gráfica de $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$, la ecuación de la recta tangente es $y = -x + 6$ y la ecuación de la recta normal es $y = x - 2$, como se muestra en la figura.



Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • A Argumento • M Modelo • E Ejercito • R Razono • S Soluciono problemas

Responde las siguientes preguntas.

51. ¿Cómo se halla la recta tangente a una curva en un punto?

52. ¿Cuáles son las expresiones para hallar las ecuaciones de la recta tangente y la recta normal a la función f?

Relaciona cada punto con su respectiva ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función

$$f(x) = 4x - x^2$$

53. (1, 3)	a. $y = -2x + 9$
54. (2, 4)	b. $y = 4x$
55. (3, 3)	c. $y = 2x + 1$
56. (0, 0)	d. $y = -4x + 16$
57. (4, 0)	e. $y = 4$

Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada función en los puntos que se indican.

58. $f(x) = 3x^2 + 2$ en $P(-1, 5)$ y $Q(0, 2)$

59. $g(x) = 2x^3 + 4$ en $P(1, 6)$ y $Q(-1, 2)$

60. $h(x) = \sqrt{x} + 3$ en $P(1, 4)$ y $Q(4, 5)$

61. $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ en $P\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y $Q\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

62. $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2$ en $P\left(-1, \frac{5}{3}\right)$ y $Q(-3, -7)$

Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función f en el punto indicado.

63. $f(x) = (x + 2)^2$ en (0, 4).

64. $f(x) = \sqrt[3]{x} + 5x$ en (1, 6).

65. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 4}$ en $\left(-1, -\frac{2}{3}\right)$

66. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$ en $\left(4, \frac{2}{5}\right)$

67. $f(x) = \text{sen}(x + \pi)$ en $\left(\frac{\pi}{2}, -1\right)$

Lee y resuelve.

Considera $f(x) = x^3 + 1$ y los puntos $x = 1$ y $x = -1$.

68. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x)$ en los puntos dados.

69. Comprueba que las rectas son paralelas a la recta con ecuación $y = 3x + 4$.

Determina si la proposición es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

70. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ en $x = 1$ es $y = 0$.

71. La ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $h(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x + 8$ en el punto $\left(-1, \frac{19}{2}\right)$ es $x = -1$.

72. Si $h(x) = \frac{1}{x^2}$, la recta tangente a la gráfica de h en (1, 1) no interseca a la gráfica en ningún otro punto.

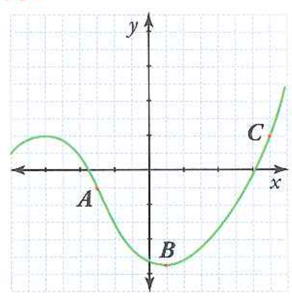
Determina un punto en el primer cuadrante en el que la recta tangente a la gráfica de una función sea:

73. Paralela a la recta cuya ecuación es $y = -x$.

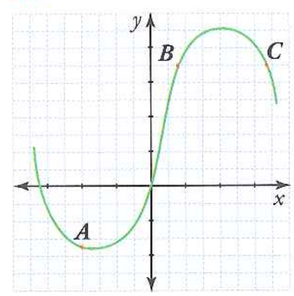
74. Perpendicular a la recta cuya ecuación es $y = 2x + 1$.

Determina en cuál de los puntos señalados sobre cada función la pendiente de la tangente es de mayor valor. Justifica tu respuesta.

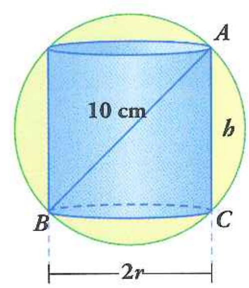
75.



76.



Lee, observa y resuelve. Dado un cilindro circular recto, inscrito en una esfera de radio 5 cm, como se muestra en la figura:



77. Determina la recta tangente a la gráfica de la función $V(h)$ en el punto $(2{,}48\pi)$.

78. Encuentra un punto de la gráfica de $V(h)$, tal que la recta tangente en ese punto sea paralela al eje x.

2.4 Derivada de una función en un intervalo

Recurso imprimible

Una función f es **derivable en un intervalo** (a, b) si para todo $x \in (a, b)$, se cumple que f es derivable en x.

Una función f es derivable en el intervalo $[a, b]$ si f es derivable en el intervalo (a, b) y si $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ y $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(b + h) - f(b)}{h}$ existen.

Matemáticamente

¿Por qué se considera que la pendiente de una recta vertical es indefinida?

EJEMPLOS

1. Comprobar que la función $f(x) = 4x^3 + 7$ es derivable en el intervalo $(-4, 5)$.

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ Se aplica la definición de derivada.

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{[4(x + h)^3 + 7] - [4x^3 + 7]}{h}$ Se evalúa $f(x + h)$ y $f(x)$.

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4h^3 + 12h^2x + 12hx^2}{h}$ Se resta.

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(4h^2 + 12hx + 12x^2)}{h}$ Se factoriza.

$= \lim\limits_{h \to 0} 4h^2 + 12hx + 12x^2 = 12x^2$ Se simplifica y se calcula el límite.

Como $f'(x) = 12x^2$ está definida para todo $x \in (-4, 5)$, se tiene que $f(x) = 4x^3 + 7$ es derivable en el intervalo $(-4, 5)$.

2. Determinar si la función $f(x) = \sqrt{x}$ es derivable en el intervalo $[0, \infty)$.

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$ Se aplica la definición de derivada.

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}$ Se complifica por el conjugado de $\sqrt{x + h} - \sqrt{x}$.

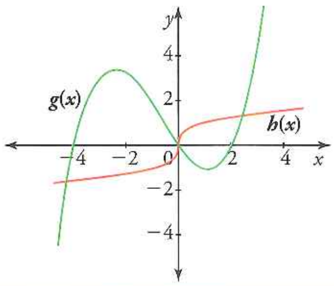
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h) - x}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})}$ Se multiplica.

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})}$ Se resta.

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ Se simplifica y se calcula el límite.

Como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, no está definida para $x = 0$, entonces, $f(x) = \sqrt{x}$ no es derivable en el intervalo $[0, \infty)$.

3. Observar las gráficas de las funciones $g(x) = 0{,}2x^3 + 0{,}4x^2 - 1{,}6x$ y $h(x) = \sqrt[3]{x}$. Luego, indicar si la función es derivable para todo número real.



La función $g(x) = 0{,}2x^3 + 0{,}4x^2 - 1{,}6x$ es derivable en todo el conjunto de los números reales. En general, toda función polinómica es derivable en $\mathbb{R}$.

La función $h(x) = \sqrt[3]{x}$, no es derivable en $x = 0$, ya que su tangente es una línea vertical y, por tanto, la pendiente no está definida. Luego, $h(x)$ no es derivable en todo el conjunto de números reales.

Ampliación multimedia

4. **Determinar si la función $g(x)$ es derivable en el intervalo $[-2, 4]$, si**

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-1} + 3 \text{ si } x \geqslant \dfrac{1}{2} \\ 3x + 1 \text{ si } x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Como $g(x)$ es una función definida a trozos se debe verificar si es derivable en los intervalos $\left[-2, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 4\right]$ y en el punto $x = \frac{1}{2}$.

Primero, se calcula la derivada de $g(x)$ para todo $x > \frac{1}{2}$.

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[\sqrt{2(x+h)-1} + 3\right] - \left[\sqrt{2x-1} + 3\right]}{h}$$ Se aplica la definición de derivada.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\sqrt{2x+2h-1} - \sqrt{2x-1}\right]}{h} \cdot \frac{\sqrt{2x+2h-1} + \sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+2h-1} + \sqrt{2x-1}}$$ Se resta y se complifica.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h\left(\sqrt{2x+2h-1} + \sqrt{2x-1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$ Se simplifica y se calcula el límite.

Como $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ está definida para todo $x \in \left(\frac{1}{2}, 4\right]$, entonces, g es derivable en $\left(\frac{1}{2}, 4\right]$.

Segundo, para $x < \frac{1}{2}$, se tiene:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)+1] - [3x+1]}{h}$$ Se aplica la definición de derivada.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = 3$$ Se simplifica y se calcula el límite.

Por tanto, g es derivable en $\left[-2, \frac{1}{2}\right)$, ya que $g'(x) = 3$ existe en $\left[-2, \frac{1}{2}\right)$.

Luego, se calculan las derivadas laterales para verificar si g es derivable en $x = \frac{1}{2}$.
Se debe tener en cuenta que $g(x)$ se calcula donde está definida la función.

$$g'_+\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\left[\sqrt{2\left(\frac{1}{2}+h\right)-1} + 3\right] - \left[\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\right)-1} + 3\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{2h}}{h} = \infty$$

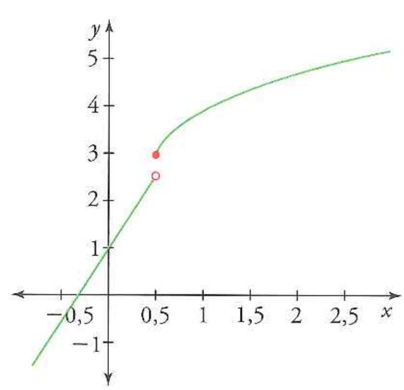
$$g'_-\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\left[3\left(\frac{1}{2}+h\right)+1\right] - \left[\sqrt{2\left(\frac{1}{2}\right)-1} + 3\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{3h - \frac{1}{2}}{h} = \infty$$

Finalmente, como $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ no existe, entonces, $g(x)$ no es derivable en el intervalo $[-2, 4]$.

En la gráfica se puede observar que la función no es continua en $x = \frac{1}{2}$.

Más adelante se estudiará la derivabilidad y la continuidad de una función en un punto de su dominio.



2.5 Función derivada

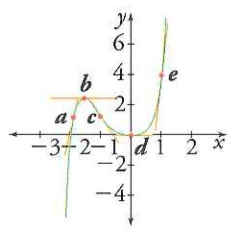
Actividad Enlace web

La **función derivada** f' de una función f, es la función que asocia a cada número $x \in \text{Dom} f$ su derivada, si existe. Por tanto, el dominio de f' es $\text{Dom} f' = \{x \in \text{Dom} f / f'(x) \text{ existe}\}$.

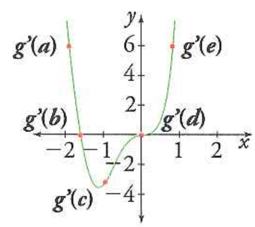
Geométricamente es posible hallar la gráfica de la función f' a partir de la gráfica de f, teniendo en cuenta que $(x, f'(x))$ es un punto de la gráfica de f' tal que $f'(x)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

Por ejemplo, en las siguientes gráficas se puede observar que las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función g en los puntos $x = a$ y $x = e$ son positivas por lo que en la gráfica de g' los puntos valores $g'(a)$ y $g'(e)$ también son positivos. En cambio, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de g en $x = c$ es negativa, por lo que $g'(c)$ es negativo.

Gráfica de g



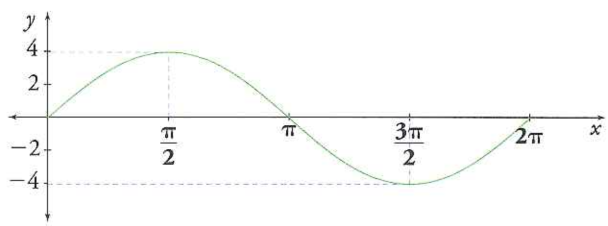
Gráfica de g'



En estas mismas gráficas se muestra que en $x = b$ y en $x = d$ las recta tangentes son horizontales, por esta razón en la gráfica de g' los valores de $g'(b)$ y de $g'(d)$ son iguales a cero.

EJEMPLO

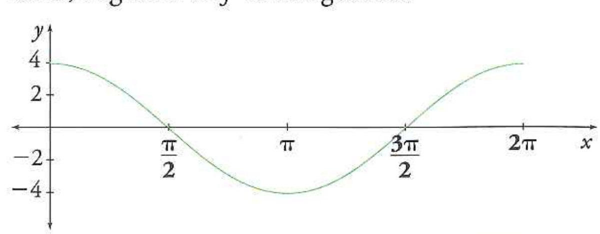
Determinar la gráfica de la función derivada f' a partir de la gráfica de la función f.



Primero, se determinan los puntos $(x, f(x))$ para los cuales la pendiente de la recta tantangente es positiva. Estos puntos son aquellos que pertenecen a los intervalos $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Luego, se determinan los puntos $(x, f(x))$ para los cuales la pendiente de la recta tangente es negativa. Estos puntos son aquellos que pertenecen al intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Finalmente, se tiene que en $x = \frac{\pi}{2}$ y en $x = \frac{3\pi}{2}$ la pendiente de la recta tangente es igual a cero. Por tanto, la gráfica de f' es la siguiente.



Historia de las matemáticas

Pierre de Fermat (1601-1655)

El matemático francés, Pierre de Fermat fue un precursor en la invención del cálculo, ya que desarrolló un método para trazar una recta tangente a una curva en un punto dado.

Recurso imprimible

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono

Responde las siguientes preguntas.

79. Si una función f no es derivable en $x = 0$, ¿puede ser f derivable en el intervalo $(-3, 0)$?

80. Si $f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, ¿en qué puntos no es derivable f?

81. ¿Existe alguna función que sea derivable en el intervalo $[-1, 1]$ y que no sea derivable en $x = 0$? Justifica tu respuesta.

Determina la derivada de cada función en el intervalo indicado.

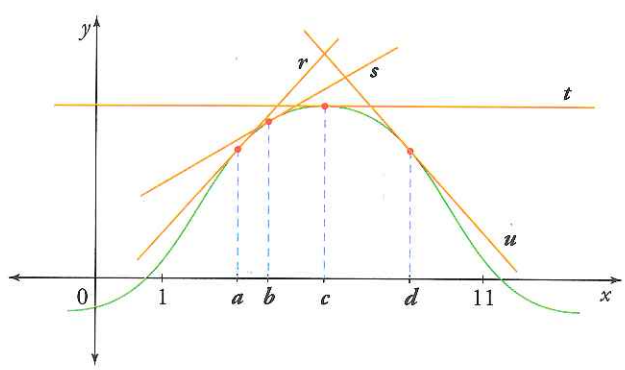
82. $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leqslant -1 \\ 6 + x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $[-1, 3]$

83. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 0 \\ 2 - x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ en $(-2, 2)$

84. $f(x) = \begin{cases} 3x^3 + 3 & \text{si } x \leqslant -1 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$ en $(-1, 1)$

85. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 1 & \text{si } 0 \leqslant x < 3 \\ 2x & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$ en $[0, 3]$

Las rectas r, s, t y u son tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisas a, b, c y d, respectivamente, como se muestra en la siguiente gráfica.



Si f es derivable en el intervalo $[1, 11]$, determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.

86. $f'(a) > f'(b)$

87. $f'(d) > f'(a)$

88. $f'(c) > 0$

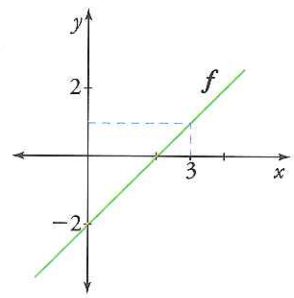
89. $f'(a) + f'(b) > 0$

90. $a < x < c \rightarrow f'(x) > 0$

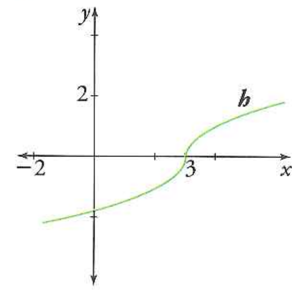
91. $c < x < d \rightarrow f'(x) < 0$

92. **Determina cuáles de las siguientes gráficas no son derivables en $x = 3$.**

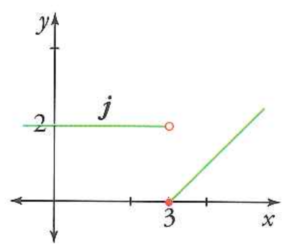
a.



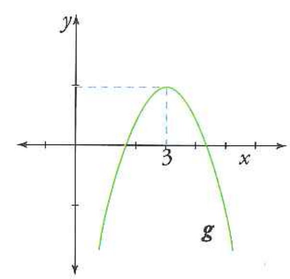
c.



b.



d.



Traza la gráfica de cada función f. Luego, construye la gráfica de f' a partir de la gráfica de f.

93. $f(x) = \sqrt{x - 1}$

94. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

95. $f(x) = |x - 2|$

96. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 3}$

Halla la función derivada en cada caso.

97. $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leqslant -3 \\ \text{Ln}\,(x + 3) & \text{si } -3 < x < 3 \\ x^3 + 2 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

98. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant -\frac{\pi}{2} \\ \sec x & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ x^2 + 2 & \text{si } x \geqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$

99. **Propón una función f que cumpla las características dadas. Luego, traza la gráfica de f y la gráfica de f'.**

- Es derivable en el intervalo $[-2, 2]$, pero discontinua en $x = 3$.
- La pendiente de la recta tangente en cada punto $(x, f(x))$ del intervalo $(-\infty, -2)$ es positiva.

3. Derivabilidad y continuidad

Existe una relación entre el concepto de continuidad y el concepto de derivada de una función en un punto. Así que una función sea derivable en un punto implica que la función es continua en ese punto. En cambio, si una función es continua en un punto no implica que la función sea derivable en ese punto.

3.1 Derivabilidad implica continuidad

Actividad

Si una función f es **derivable** en $x = a$, entonces, f es **continua** en a.

Para demostrar este teorema se prueba que $\underset{x \to a}{\text{Lím}}\, f(x) = f(a)$ teniendo en cuenta que, según la hipótesis $f'(a)$ existe. Para esto, se realizan los siguientes pasos:

Primero, se utiliza la siguiente igualdad.

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a); \text{ para } x \neq a$$

Luego, se aplica el límite cuando x tiende a a en ambos lados de la igualdad y se resuelve así:

$$\underset{x \to a}{\text{Lím}}\, f(x) = \underset{x \to a}{\text{Lím}} \left[f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right]$$ Se aplica límite cuando x tiende a.

$$\underset{x \to a}{\text{Lím}}\, f(x) = \underset{x \to a}{\text{Lím}}\, f(a) + \underset{x \to a}{\text{Lím}} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right]$$ Se aplica el límite de una suma.

$$\underset{x \to a}{\text{Lím}}\, f(x) = \underset{x \to a}{\text{Lím}}\, f(a) + \underset{x \to a}{\text{Lím}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \underset{x \to a}{\text{Lím}}\, (x - a)$$ Se aplica el límite de un producto.

$$\underset{x \to a}{\text{Lím}}\, f(x) = f(a) + f'(a) \cdot 0$$ Se calcula cada límite y se aplica la definición de derivada.

$$\underset{x \to a}{\text{Lím}}\, f(x) = f(a)$$ Se resuelven las operaciones.

Finalmente, como $\underset{x \to a}{\text{Lím}}\, f(x) = f(a)$, entonces, la función f es continua en a.

EJEMPLO

Determinar si la siguiente función es continua, calculando la derivada en el punto que se indica.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 \text{ si } x < 0 \\ x^2 \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0$$

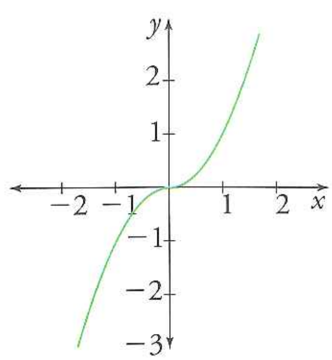
Primero, se calcula las derivadas laterales en $x = 0$.

$$\underset{x \to 0^-}{\text{Lím}} \frac{(-x^2) - (0^2)}{x - 0} = \underset{x \to 0^-}{\text{Lím}} -\frac{x^2}{x} = \underset{x \to 0^-}{\text{Lím}} -x = 0$$

$$\underset{x \to 0^+}{\text{Lím}} \frac{x^2 - 0^2}{x - 0} = \underset{x \to 0^+}{\text{Lím}} \frac{x^2}{x} = \underset{x \to 0^+}{\text{Lím}}\, x = 0$$

Luego, se tiene que $f'(0)$ existe, porque las derivadas laterales en $x = 0$ existen y son iguales.

Finalmente, como la función es derivable en $x = 0$, entonces es continua en ese punto, como se muestra en la gráfica.



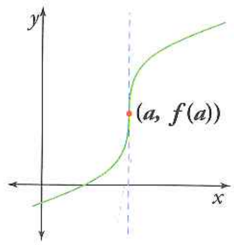
3.2 Continuidad no implica derivabilidad

Recurso imprimible

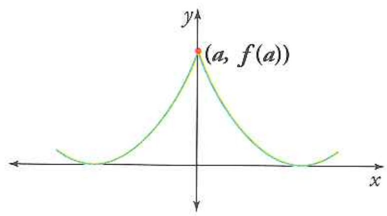
Una función f que es **continua** en $x = a$, no necesariamente es **derivable** en ese punto.

Cuando f es continua en $x = a$, es posible determinar que la función no es derivable en ese punto si en su gráfica se presenta alguna de las siguientes características.

La recta tangente en $(a, f(a))$ es vertical.



Tiene una "punta" en $(a, f(a))$.



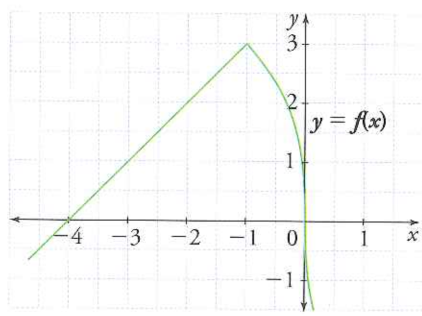
EJEMPLOS

1. **Determinar en cuáles puntos no es derivable la función f a partir de su gráfica.**

Según la gráfica, la función f no es derivable en $x = -1$ y en $x = 0$, porque:

- En $x = -1$ la gráfica de f tiene una punta.
- En $x = 0$ la recta tangente es vertical. En este caso la recta tangente coincide con el eje y.

En los demás puntos de la gráfica la función es continua y derivable.



2. **Probar que la función $g(x) = |x - 1| + 2$ no es derivable en $x = 1$. Luego, trazar la gráfica de f y de f'.**

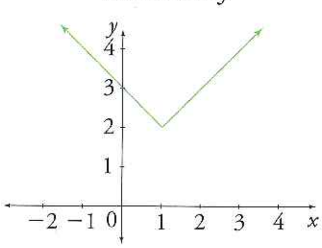
Se determinan las derivadas laterales en $x = 1$, así:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(|x - 1| + 2) - (|(1) - 1| + 2)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \left(-\frac{x - 1}{x - 1}\right) = -1$$

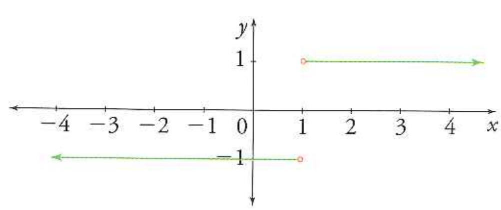
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(|x - 1| + 2) - (|(1) - 1| + 2)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{x - 1}{x - 1}\right) = 1$$

Como las derivadas laterales son diferentes, entonces $f'(1)$ no existe. En las siguientes figuras se puede observar que la gráfica de f es continua en $x = 1$, aunque no es derivable en ese punto, por lo que la gráfica de f' es discontinua en ese punto.

Gráfica de f



Gráfica de f'



Ampliación multimedia

3. **Analizar la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función por partes en $x = 0$ y en $x = 3$.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ -x^2 + 4x - 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 2 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Primero, se verifica la continuidad en $x = 0$ y en $x = 3$. Para esto, se calculan los límites laterales en cada punto y se comparan con el valor de la función evaluada en el mismo.

$\lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 2x - 1) = -1$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} (-x^2 + 4x - 1) = -1$ $\qquad$ $f(0) = -1$

$\lim\limits_{x \to 3^-} (-x^2 + 4x - 1) = 2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 3^+} (2) = 2$ $\qquad$ $f(3) = 2$

Por tanto, como los límites laterales en $x = 0$ y en $x = 3$, existen y son iguales a $f(0)$ y a $f(3)$ respectivamente, entonces f es continua en esos puntos, como se muestra en la gráfica.

Luego, se verifica si la función es derivable en los puntos $x = 0$ y $x = 3$, calculando las derivadas laterales en estos puntos.

Para $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(x^2 + 2x - 1) - (0^2 + 2(0) - 1)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} (x + 2) = 2$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(-x^2 + 4x - 1) - (0^2 + 2(0) - 1)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} (4 - x) = 4$$

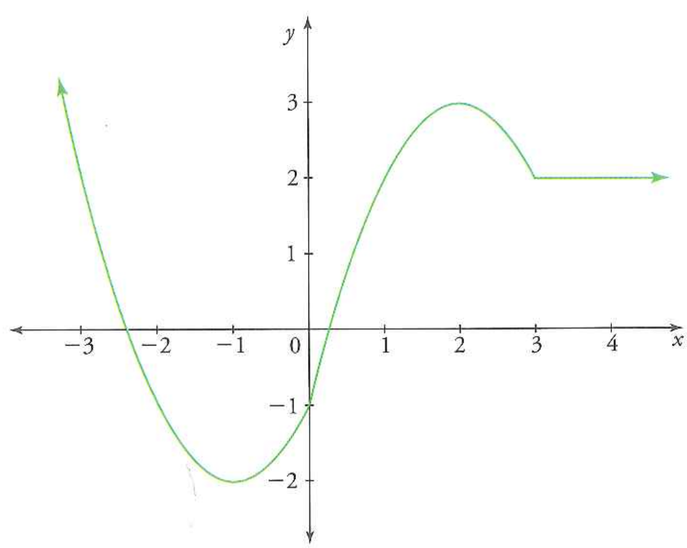
Para $x = 3$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{(-x^2 + 4x - 1) - (2)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} (1 - x) = -2$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{(2) - (2)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} 0 = 0$$

Finalmente, como las derivadas laterales tanto en $x = 0$, como en $x = 3$ son diferentes, entonces f no es derivable en estos puntos.

En la siguiente gráfica se puede observar que f es continua en todo su dominio, pero no es derivable en $x = 0$ y en $x = 3$, ya que en estos puntos la gráfica tiene puntas.



Matemáticamente

¿En qué puntos es continua y derivable la función $f(x) = [\![x]\!]$?

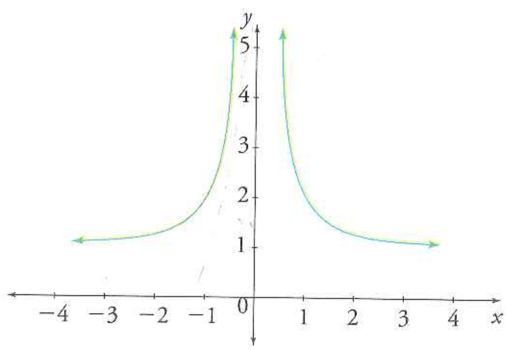
3.3 Funciones no continuas y no derivables

Actividad

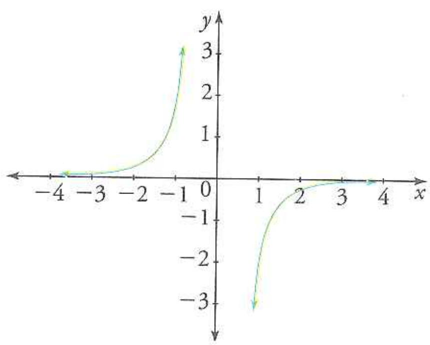
Si una función f no es continua en $x = a$, entonces f no es derivable en a y no es derivable en todos los intervalos a los que pertenece a.

Por ejemplo, en la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$ que se muestra a continuación, se puede observar que f no es continua en $x = 0$ y por tanto no es derivable en ese punto como se muestra en la gráfica de f'. Además, si se toma cualquier intervalo que contiene a $x = 0$, la función no es derivable en ese intervalo. Por esto, se tiene que f no es derivable en $[-1, 1]$, pero sí es derivable en $[1, 3]$.

Gráfica de f



Gráfica de f'



EJEMPLOS

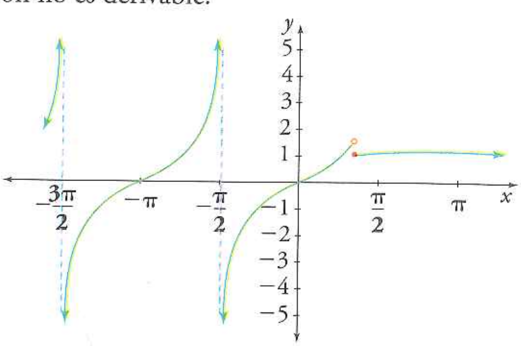
Determinar en cuáles puntos no es derivable cada función.

a. $f(x) = \begin{cases} \tan x & \text{si } x < 1 \\ \operatorname{sen} \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

Primero, se tiene que $\tan x$ no está definida para $x = \frac{n\pi}{2}$ donde n es entero impar.

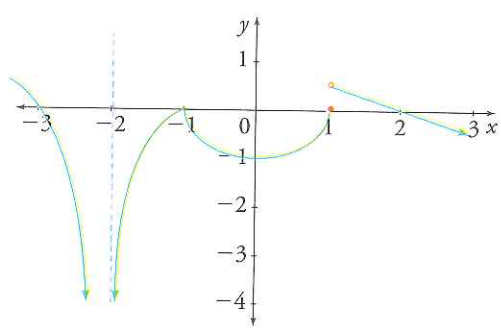
Luego, se tiene que en $x = 1$ la función es discontinua, como se muestra en la gráfica.

Finalmente, como la función no es derivable en los puntos en los que no es continua, entonces se tiene que en $x = 1$ y en $x = \frac{n\pi}{2}$ con n entero impar negativo, la función no es derivable.



b. $f(x) = \begin{cases} \frac{2x + 6}{x + 2} & \text{si } x < -2 \\ \operatorname{Ln}(x + 2) & \text{si } -2 < x < -1 \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -\frac{1}{2}x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

En este caso, para determinar los puntos en los que la función no es derivable, resulta útil trazar su gráfica.



Gráficamente, se puede deducir que:

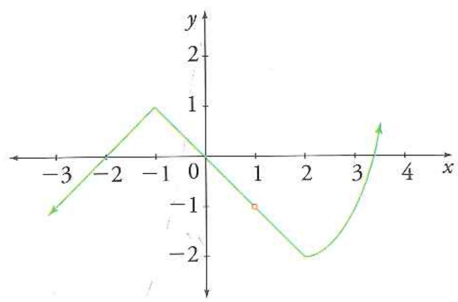
- La función no es derivable en $x = -2$ y en $x = 1$, porque no es continua en esos puntos.
- La función no es derivable en $x = -1$ porque en este punto la gráfica tiene una punta.

100. Completa el siguiente párrafo.

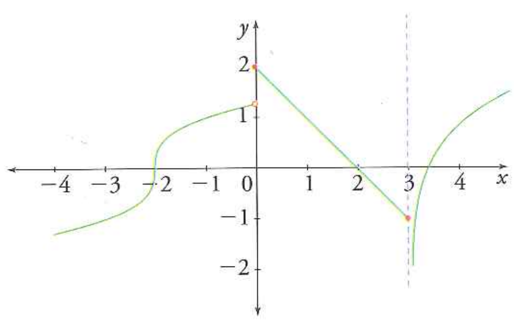
Una función que es ______________ en $x = a$ es continua en ese punto, lo que implica que si una función no es ______________ en ese punto entonces no es derivable. En cambio, si la función es ______________ en $x = a$, no necesariamente es ______________ en ese punto.

Identifica en cuáles puntos cada función f no es derivable.

101.



102.



Demuestra, aplicando la definición de derivada, que cada una de las siguientes funciones es continua en el punto P que se indica.

103. $f(x) = 5x + 7$ en $P(-3, -8)$

104. $f(x) = x^2 + 3x - 6$ en $P(1, -2)$

105. $f(x) = 4x - x^2$ en $P(0, 0)$

106. $f(x) = x^3 + x^2$ en $P(1, 2)$

Traza la gráfica de una función f que cumpla las condiciones que se indican en cada caso.

107. Es derivable en el intervalo $(-\infty, -1)$, tiene ordenada $y = 3$ para $x = -1$ y es continua en el intervalo $[-1, \infty]$, pero no derivable en $x = 2$.

108. Es continua en el intervalo $(-\infty, -2)$, la recta tangente en $x = -1$ es vertical y no es derivable en $x = -5$ y en $x = -3$.

E Analiza la continuidad y la derivabilidad de las siguientes funciones.

109. $f(x) = \begin{cases} 4x + 5 & \text{si } x < 2 \\ 4x^2 - \frac{3}{2}x - 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

110. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x & \text{si } x < -1 \\ 2x^2 + 8x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

111. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & \text{si } x < -2 \\ 3x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

112. $h(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 9 & \text{si } x < 3 \\ 2x^2 - 4x & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

113. $h(x) = \begin{cases} x^3 - 9 & \text{si } x < -2 \\ x^2 - 6x & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ e^{2+x} - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

E 114. Halla los valores de a y b tales que la función sea derivable en $x = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ a + bx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

R Resuelve a partir de la función $f(x) = |x^2 - 4|$.

115. Determinar si f es una función continua.

116. Encuentra los puntos en los que la función no es derivable.

117. Halla los intervalos en los que f es derivable, de tal forma que para cada valor x del intervalo, la pendiente de la recta tangente en $(x, f(x))$ es negativa.

R Encuentra los valores de a y de b para que cada función f sea continua. Luego, determina la derivabilidad de cada función.

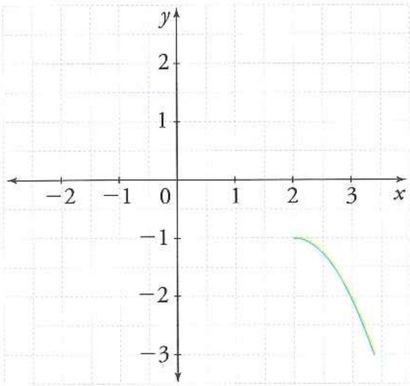
118. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ ax^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

119. $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \leq -1 \\ ax - b & \text{si } -1 < x < 2 \\ 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

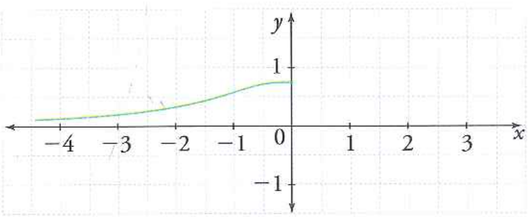
120. $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ ax^2 - b & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 3xb & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Completa cada una de las siguientes gráficas para que cumpla la condición dada.

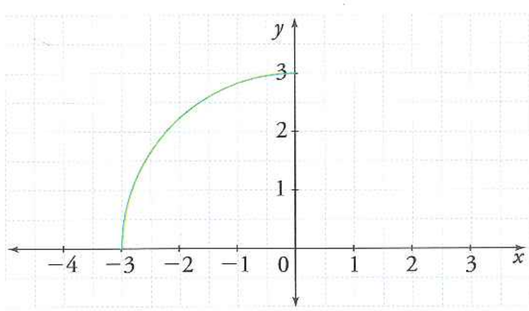
121. No derivable en $x = 2$



122. Derivable en $x = 0$



123. Derivable en el intervalo $(-3, 3)$



Determina cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas. Justifica tu respuesta.

124. Toda función polinómica es derivable y continua en todo su domino.

125. Si $f(x) = \text{Ln}\,(x + 3)$, entonces la función no es derivable en $x = 3$.

126. Toda función por partes no es derivable en, al menos, un intervalo.

127. Si $f(x) = e^{(x-5)}$, entonces la función es continua y derivable en todo su dominio.

128. Traza la gráfica de una función no derivable en $x = 6$ que sea derivable en el resto de su dominio y que su función derivada sea 0 en el intervalo $(6, 8]$.

Analiza la derivabilidad de las siguientes funciones trigonométricas en el intervalo indicado.

129. $f(x) = \csc x$ en $[-\pi, \pi]$

130. $g(x) = \cot x$ en $(0, \pi)$

131. $f(x) = \tan\,(x + 2)$ en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

132. $g(x) = \frac{x}{\text{sen}\,x}$ en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

133. Halla el valor de b para que la función sea continua en todo su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < b \\ \dfrac{6}{x} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

El costo C de producción de un artículo está dado por la expresión:

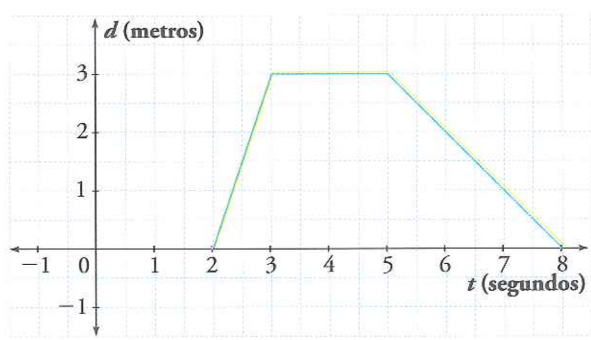
$$C(x) = \begin{cases} 10.000 & \text{si } 0 \leqslant x < 10 \\ 5.000x + 2.000 & \text{si } x \geqslant 10 \end{cases}$$

Donde C se calcula en pesos y x es la masa en kilogramos del artículo.

134. Traza la gráfica de C.

135. Analiza la continuidad y la derivabilidad de la función costo.

En la siguiente gráfica se representa la distancia (d) recorrida por una partícula durante 7 segundos.



136. Escribe la expresión algebraica que representa la distancia d en función del tiempo t.

137. Determina la velocidad de la partícula en los intervalos $[0, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 5)$ y $(5, 8)$.

138. Determina la derivabilidad en $t = 2$, $t = 3$ y $t = 5$. Luego, interpreta el resultado.

139. Traza la gráfica de la velocidad v en función del tiempo t.

EJERCICIOS PARA REPASAR

Noción de derivada

Halla la tasa de variación media de las funciones $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = x^3 + x$ en los siguientes intervalos.

140. [0, 1]

141. [2, 3]

Calcula la tasa de variación instantánea de $f(x)$ en el punto indicado.

142. $f(x) = 5x - 7$ en $x = 2$

143. $f(x) = \frac{1}{3}x + 4$ en $x = -3$

144. $f(x) = x^2 - 5x$ en $x = -\frac{1}{2}$

145. $f(x) = 3\sqrt{x}$ en $x = 16$

146. **Determina la tasa de variación instantánea de la siguiente función racional en $t = 1$.**

$$s(t) = \frac{t^3 - 1}{t^2 + t + 1}$$

Derivada de una función

Calcula la pendiente de la recta tangente a la curva que representa cada función, en el punto indicado.

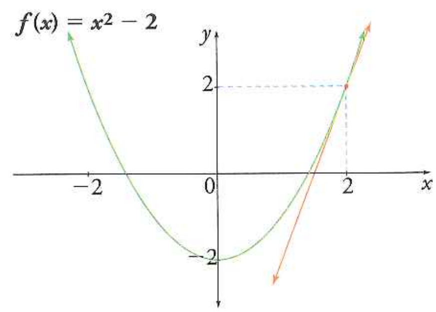
147. $f(x) = x^2 + 3$ en $x = 3$.

148. $g(x) = x^3 - 2x + 1$ en $x = 0$.

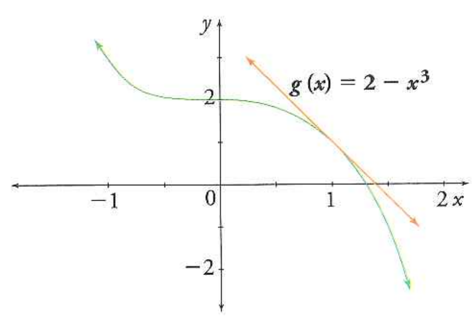
149. $h(x) = \frac{x - 3}{x + 3}$ en $x = 2$.

Halla la ecuación de la recta tangente que se muestra en cada gráfica.

150.



151.



152. Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ en el punto (4, 3). Luego, realiza un bosquejo de la gráfica.

Halla la derivada de $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$ en cada uno de los siguientes puntos.

153. $f'(2)$

154. $f'(-3)$

Aplica la definición de la derivada para comprobar que $f'(1)$ no existe. Luego, traza un bosquejo de la gráfica de f.

155. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, x \leqslant 1 \\ x^2 - 1, x > 1 \end{cases}$

Si $f(x) = \dfrac{x+4}{2}$, completa:

156. $f'(0) =$ ______

157. $f'(2) =$ ______

158. $f'(-1) =$ ______

159. $f'(-3) =$ ______

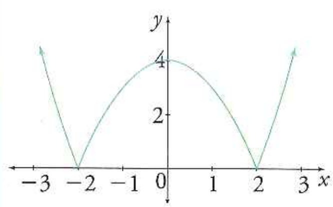
Derivabilidad y continuidad

Verifica si cada función es continua y derivable en el punto indicado.

160. $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{si } x < 2 \\ 3x - 7 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$ en $x = 2$.

161. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ x - 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ en $x = 0$.

162. Determina en cuáles puntos la función es continua y en cuáles es derivable. Luego, escribe la ecuación de la función.



Continua en:

____

Derivable en:

____

$f(x) =$ ______________

163. Traza la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones.

- Continua en todo su dominio.
- No derivable en $x = 3$.
- $f'(n) = 0$ para todo $n \geqslant 3$.

164. Escribe una función que sea continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

____

PROBLEMAS PARA REPASAR

En un laboratorio se determina que la cantidad C de bacterias de un cultivo, pasados t meses, está dada por la expresión

$$C(t) = \begin{cases} 10^6 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ 10^6 e^{t-2} & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

¿Cuál es la variación media de la población de bacterias, de los 0 a los 4 meses?, ¿cuál es la variación instantánea cuando $t = 1$?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál es la variación media de la población de bacterias, de los 0 a los 4 meses? y ¿cuál es la variación instantánea cuando $t = 1$?

¿Cuáles son los datos del problema?

La cantidad de bacterias C está dada por la expresión:

$$C(t) = \begin{cases} 10^6 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 2 \\ 10^6 e^{t-2} & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se halla la taza de variación media en el intervalo $[0, 4]$, teniendo en cuenta la parte de la función en la que está definida cada extremo del mismo.

$$\overline{V} = \frac{C(4) - C(0)}{4 - 0} = \frac{10^6 e^2 - 10^6}{4} = \frac{10^6(e^2 - 1)}{4} = 250.000\,(e^2 - 1)$$

Es decir, que entre los 0 y los 4 meses la variación media es aproximadamente de 1.597.264.

Luego, se calcula la variación instantánea cuando $t = 1$, así:

$\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{C(t) - C(1)}{t - 1}$ Se aplica la definición de variación instantánea.

$= \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{10^6 - 10^6}{t - 1}$ Se remplazan $C(t)$ y $C(1)$.

$= \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{0}{t - 1}$ Se resta.

$= 0$ Se resuelve el límite.

Finalmente, la variación instantánea en $t = 1$ es 0.

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que se haya calculado correctamente la variación media y la variación instantánea, teniendo en cuenta las expresiones para las que está definida la función en cada intervalo. Luego, se tiene que la variación media de la población de bacterias de los 0 a los 4 meses es cerca de 1.597.264. Además, la variación instantánea cuando $t = 1$ es 0, es decir, que la variación en este punto es nula.

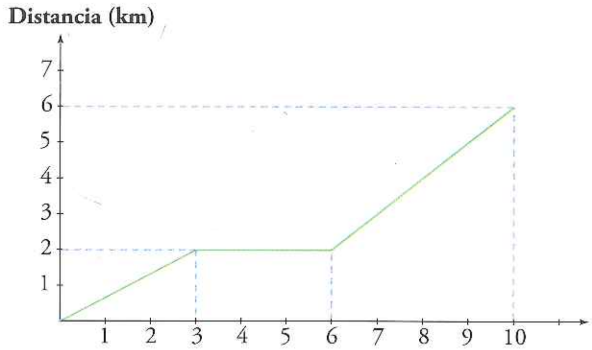
165. **La corriente I de un circuito eléctrico se mide en amperios (A), la resistencia R del circuito se mide en ohmios (Ω). En un circuito eléctrico la corriente está dada por la expresión:**

$$I_{(R)} = \frac{100}{R}$$

Calcula la corriente I con respecto a R cuando la resistencia es de 20 Ω.

Resuelve las actividades 166 a 168 de acuerdo con la siguiente situación.

La gráfica representa el movimiento de un móvil en 10 minutos.



166. Escribe la función por partes que relaciona la distancia y el tiempo.

---

167. Calcula la variación media en el intervalo [0, 3].

168. Halla la variación instantánea en $t = 8$.

Resuelve las actividades 169 y 170 de acuerdo con la siguiente situación.

Durante un años se realizó un experimento para analizar la reproducción de las termitas. Luego del experimento se encontró la siguiente función:

$$P(t) = \begin{cases} 200 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 3 \\ 200e^{t-3} & \text{si } 3 < t \leqslant 12 \end{cases}$$

Donde t es el tiempo en meses.

169. Verificar que la función P es continua.

170. Calcula la tasa de variación media en el intervalo [2, 10].

171. La cotización de una función sigue durante una semana la función $f(x) = 0{,}02x^2 + 1$ donde x es el día de la semana (0 es lunes, 1 es martes, ...).

Halla la tasa de variación media de lunes a viernes.

172. **La distancia d, en metros, que recorre un motociclista en función del tiempo t, en segundos, está dada por la expresión:**

$$d(t) = \frac{2}{3}t^2 + t$$

¿Cuál es la velocidad instantánea del motociclista a los 3 segundos?

Galería de imágenes

...Para medir la variación de la cantidad de azufre presente en la atmósfera.

La actividad volcánica es un fenómeno natural que afecta notablemente la flora, la fauna y a las comunidades que habitan cerca a los volcanes. Así, por ejemplo, la cantidad de azufre presente en la ceniza que emiten los volcanes puede generar enfermedades respiratorias en los seres humanos.

Por esta razón, las organizaciones ambientales de cada país se ven en la obligación de monitorear constantemente los volcanes de mayor riesgo, que son aquellos con alta probabilidad de hacer erupción en menos de una década. En Colombia, el estudio de la actividad volcánica se inició en la década de los setenta con entidades como ICEL, CHEC e INGEOMINAS.

En la siguiente tabla se muestran los efectos que tiene en el ser humano el azufre presente en la atmósfera.

Cantidad de azufre en ppm	Efecto
0,3-1	Perceptible para el olfato
1-2	Máximo permitido
6-12	Irritación de vías respiratorias
100	Valor letal

Para monitorear los cambios de la cantidad de azufre presente en la ceniza de los volcanes, se utilizan modelos matemáticos en función del tiempo (en horas), que transcurre a partir del momento en que un volcán comienza a emitir gases.

Por ejemplo, para determinar la cantidad de azufre (A) en partes por millón (ppm) en un lugar con actividad volcánica, se utiliza la siguiente expresión en función del tiempo t:

$$A(t) = 0,04t^2 - 0,1t + 1,8$$

Si se remplaza $t = 0$, se puede obtener la concentración inicial de azufre.

$$A(0) = 0,04(0)^2 - 0,1(0) + 1,8$$
$$A(0) = 1,8$$

Así, inicialmente hay 1,8 ppm de azufre en la ceniza encontrada en la atmósfera.

Para calcular la variación de la cantidad de azufre presente en la atmósfera con respecto al tiempo, se calcula la derivada de la función $A(t)$, es decir:

$$A'(t) = 0,08t - 0,1$$

Con esta expresión se puede calcular la variación de azufre transcurridas t horas después de iniciada la actividad volcánica y así conocer qué tan perjudicial puede ser para la salud. Si la concentración es mayor a las 2 ppm, es necesario que las personas que viven cerca desalojen la zona.

1. **¿Qué sucedería si los científicos no monitorearan la emisión de azufre a la atmósfera debido a la actividad volcánica?**

2. **Encuentra la variación de la cantidad de azufre (A) presente en las cenizas emitidas por un volcán a partir de las siguientes expresiones.**
   a. $A(t) = 0,05t^2 - 0,5t + 3$
   b. $A(t) = 0,2t^2 - 0,9t + 1$
   c. $A(t) = 0,09t^2 + 0,1t + 9,5$
   d. $A(t) = -0,04t^2 + 7t + 4,2$

3. **Calcula la variación de azufre en la atmósfera después de 5 horas de iniciada la actividad volcánica, para cada expresión. Luego, indica en qué casos es necesario que los habitantes evacuen la zona.**
   a. $A(t) = 0,06t^2 - 0,3t + 1,2$
   b. $A(t) = 0,045t^2 - 0,65t + 3,2$
   c. $A(t) = 0,34t^2 - 0,009t + 0,003$

...También sirve para medir la eficiencia de un antipirético.

Un antipirético, como el ibuprofeno o la dipirona, es un medicamento que se utiliza para reducir la fiebre en un paciente. Este tipo de medicamento es necesario cuando la temperatura del paciente es superior a los 37,5 grados centígrados, aunque también se utiliza como analgésico, para reducir el dolor, o como antiinflamatorio, para reducir la inflamación de los tejidos.

Las empresas farmacéuticas, antes de sacar al mercado uno de estos antipiréticos, deben cerciorarse de su eficiencia para reducir la temperatura de un paciente. Para esto, se puede definir una función que relacione la temperatura del paciente en grados centígrados, con el tiempo en días después de tomar el medicamento.

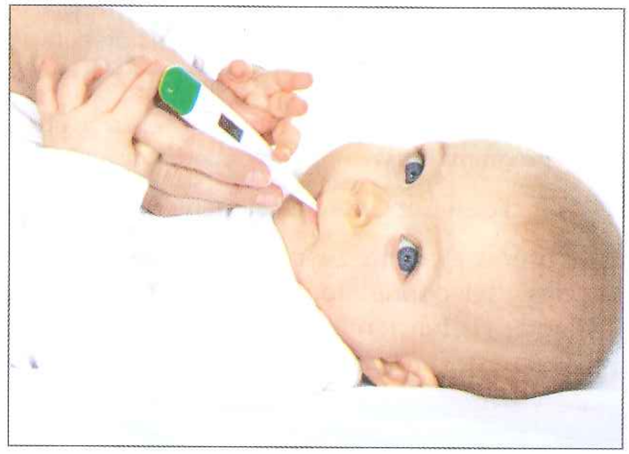
Por ejemplo, para cierto medicamento, la expresión que relaciona la temperatura con el tiempo en días es:

$$T(t) = -8 \operatorname{Log}(t) + 2t + 36$$

De acuerdo con esta expresión, se puede calcular la variación de la temperatura con respecto al tiempo calculando su derivada.

$$T'(t) = -\frac{8}{t \cdot \operatorname{Ln} 10} + 2$$

Esta expresión permite encontrar la reducción de la temperatura después de t días de suministrado el medicamento.



Por ejemplo, si se desea conocer cuánto cambió la temperatura al cabo de tres días, se remplaza este valor en la derivada así:

$$T'(3) = -\frac{8}{3 \cdot \operatorname{Ln} 10} + 2$$

De donde,

$$T'(3) = 0{,}84$$

Lo que significa que al cabo del tercer día el cambio de la temperatura es de menos de un grado centígrado por día.

Normalmente la temperatura del cuerpo humano oscila entre 35 y 37,5 °C y su incremento no debe superar los 39 °C, porque de lo contrario podría causar daños irremediables.

1. **¿Por qué es importante calcular la variación de la temperatura T en un paciente, después de t días de suministrado un antipirético?**
2. **Para considerar que el antipirético que se menciona en la lectura es de calidad, este debe reducir la temperatura en 1,3 °C, al cabo de cinco días. ¿Es correcto afirmar que el medicamento cumple con las condiciones establecidas? Justifica tu respuesta.**
3. **En una prueba realizada con otro antipirético se encontró que la expresión que relaciona la temperatura y el tiempo es:**

$$T(t) = -0{,}345t^2 + 5{,}235t + 36$$

Si un paciente tiene una temperatura de 39 °C y se le suministra este antipirético, ¿cuál debería ser su temperatura al cuarto día?

Trabaja con GeoGebra

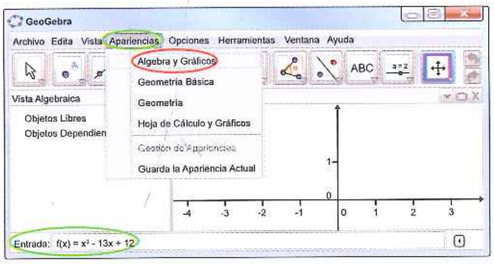
Objetivo: analizar la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto y estudiar la función derivada. Además, determinar la ecuación de la recta normal a una curva en un punto.

Descripción: encontrar la recta tangente a una curva en un punto dado y reconocer cuándo su pendiente es positiva, negativa o igual a cero. Luego, encontrar la ecuación de la recta normal. Finalmente, a partir de la gráfica de una función, trazar la gráfica de la función derivada.

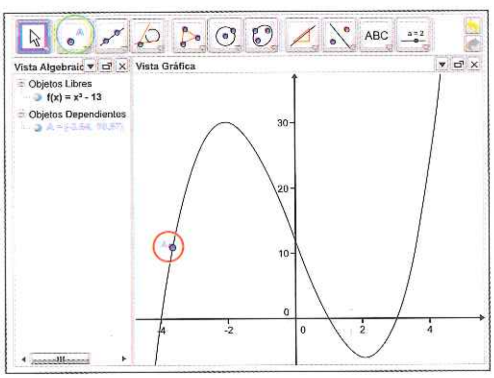
Para acceder a GeoGebra, ingresa y descarga el programa en: www.geogebra.org/cms/es

1. Haz clic en **GeoGebra** en el menú **Inicio**.

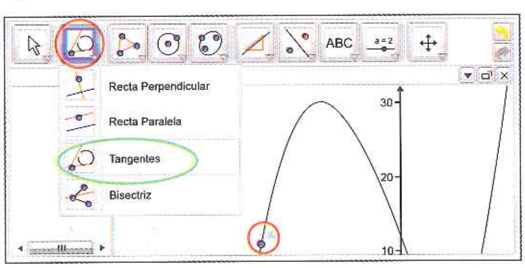
2. Observa el menú. Luego, haz clic en **Apariencias** y selecciona **Álgebra y Gráficos**. Después ingresa la función $f(x) = x^3 - 13x + 12$, como se muestra en la figura.



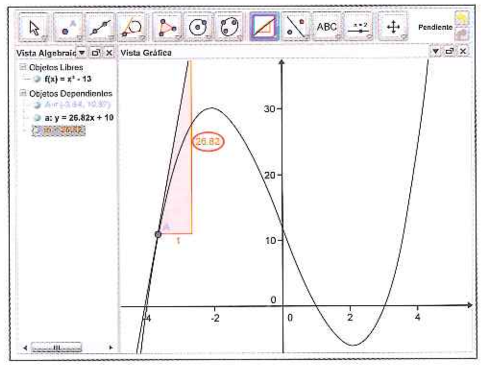
3. Observa la ventana que se despliega con la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 13x + 12$. Luego, señala un punto sobre la gráfica de la función, como se muestra en la figura.



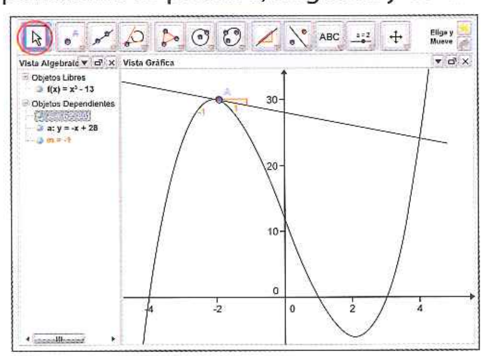
4. Para trazar la recta tangente a la curva en el punto A, haz clic en la herramienta **Tangentes**. Luego, haz clic sobre el punto y sobre la curva.



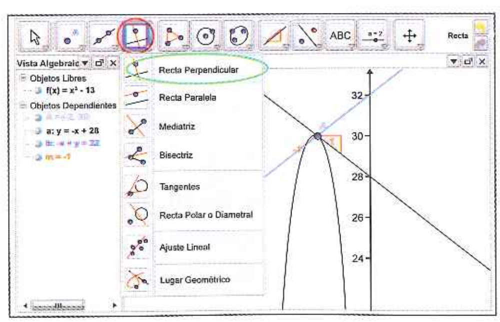
5. Observa la ventana que se despliega. Luego, utiliza la herramienta **Pendiente** para hallar la pendiente de la recta tangente, como se muestra en la figura.



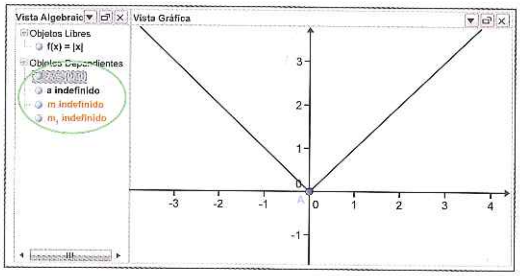
6. Estudia el comportamiento de la recta tangente a la curva en el punto A, eligiendo y moviendo el punto A. Luego, identifica los puntos donde la pendiente es positiva, negativa y cero.



7. Para hallar la ecuación de la recta normal a la curva en el punto A, se usa la herramienta **Perpendicular**, como se muestra en la figura.



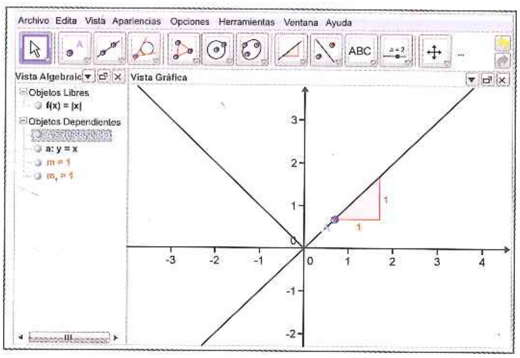
8 Ingresa la función $f(x) = |x|$. Luego, determina la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $x = 0$. Observa que en este la derivada de la función no está definida, como se muestra en la figura.



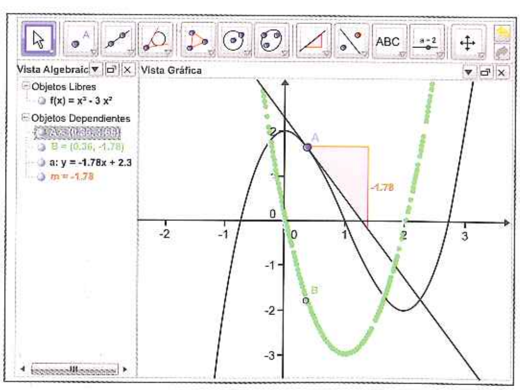
9 Mueve el punto A, para calcular la derivada de la función $f(x) = |x|$, para $x > 0$. Como se muestra en la figura.

Luego, calcula la derivada de la función:

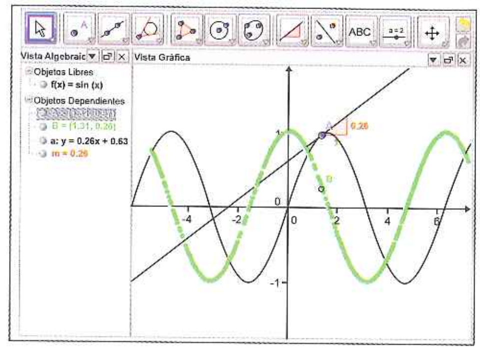
$$f(x) = |x|, \text{ para } x < 0.$$



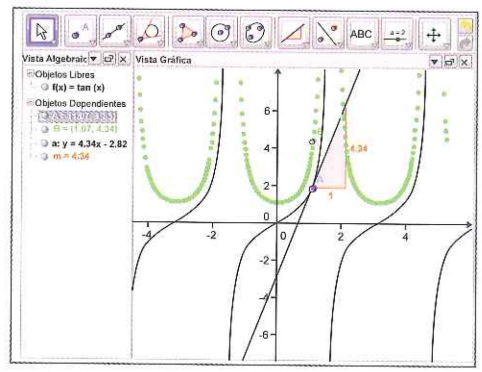
10 Para encontrar la función derivada de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Primero, repite los pasos 3 al 6. Selecciona la herramienta **Nuevo Punto**, para ingresar el punto $(x(A), m)$. Después, en el punto B, haz clic con el botón derecho del ratón y selecciona **Activa Rastro**. Finalmente, mueve el punto A, como se muestra en la figura.



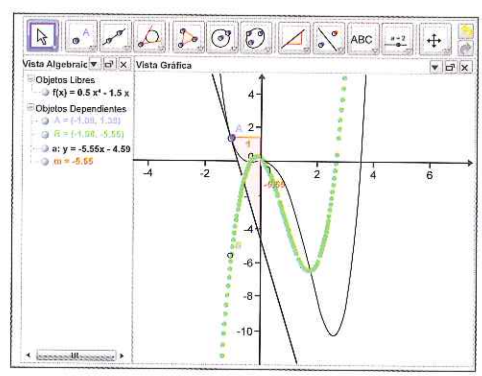
11 Ingresa la función $f(x) = \text{sen } x$. Luego, encuentra la función derivada de acuerdo con el punto anterior, como se muestra en la figura.



12 Ingresa la función $f(x) = \tan x$. Luego, encuentra la función derivada de acuerdo con el punto 10, como se muestra en la figura.



13 Ingresa la función $f(x) = 0{,}5x^4 - 1{,}5x^3 - x^2$. Luego, encuentra la función derivada de acuerdo con el punto 10, como se muestra en la figura.



14 Utiliza GeoGebra para encontrar la función derivada de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \cos^2 x$

b. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

5 Reglas de derivación

Estándares: pensamientos numérico y variacional.

→ Tu plan de trabajo...

- Identificar las **reglas básicas de derivación** y aplicarlas adecuadamente.
- Calcular la **derivada de funciones compuestas**.
- Calcular la **derivada de funciones trascendentes**.
- Calcular **derivadas sucesivas**.
- Aplicar las reglas de derivación a la **solución de problemas**.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Prueba PISA

- **7** Multimedia
- **1** Galería
- **5** Actividades
- **1** Audio
- **7** Imprimibles
- **1** Enlaces web

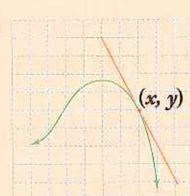
Lo que sabes...

1. Utiliza la definición de derivada para hallar $f'(x)$ en cada función.

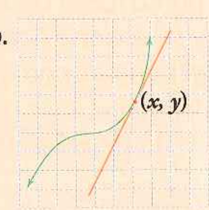
a. $f(x) = 3x$ b. $f(x) = 4x^2 - 2x$

2. Traza la recta normal a la curva en el punto (x, y).

a.



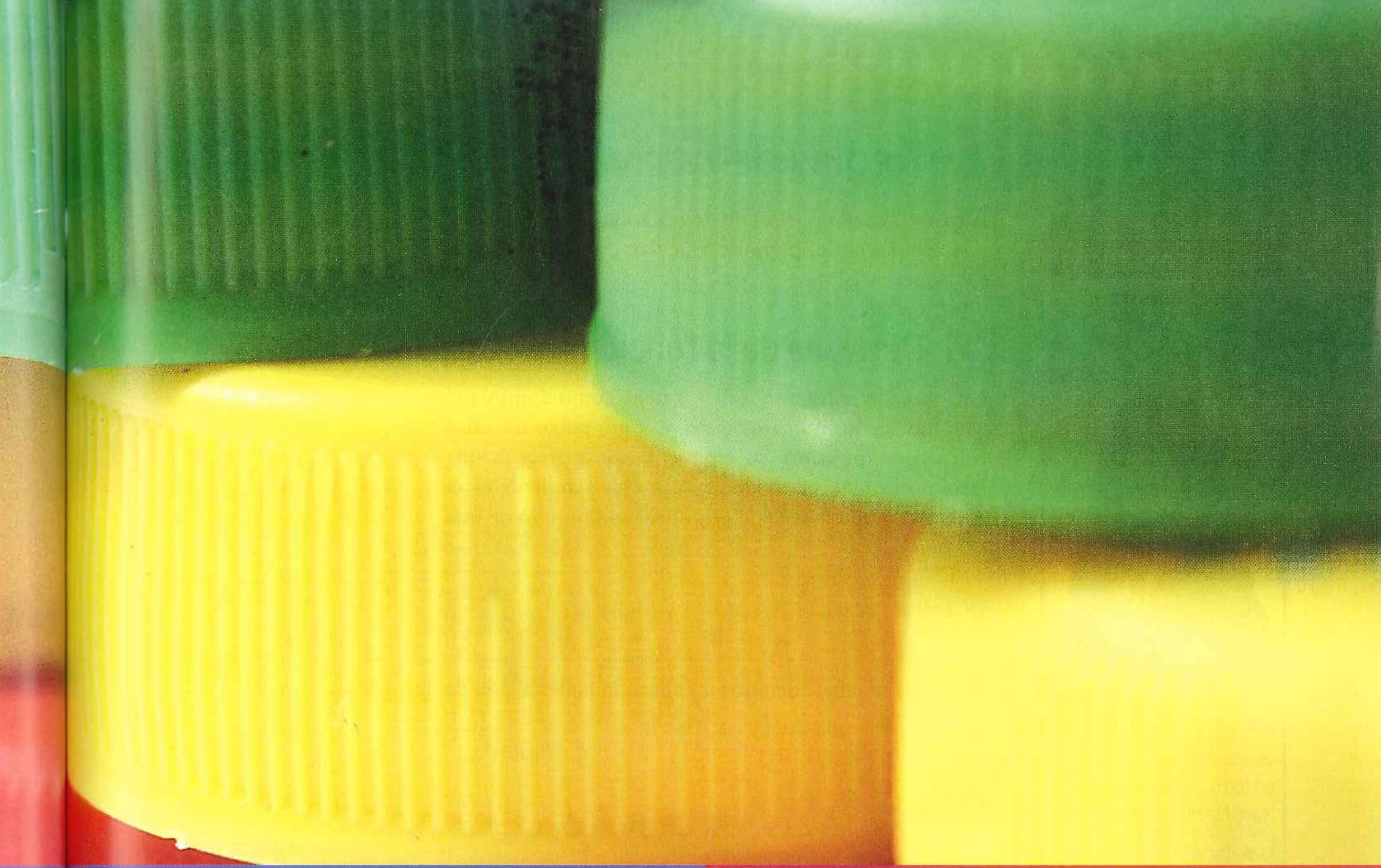
b.



3. Demuestra que la función $f(x) = 2x^2 + 1$ es continua en el punto $(1, 3)$.

4. Traza la gráfica de la siguiente función. Luego, determina si es continua y derivable en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{x}, & \text{si } x > 0 \\ 3, & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para hallar la velocidad de producción de plásticos biodegradables.

Los plásticos biodegradables son aquellos que se fabrican con materias primas que se descomponen fácilmente por medio de agentes biológicos como los microorganismos. Este tipo de plástico también es denominado doblemente verde porque, además de ser biodegradable, también es creado a partir de fuentes renovables de energía como las plantaciones de papas, maíz y trigo.

Lee más acerca de este tema en la página 200.

Cronología de las reglas de derivación

1665 d. C. **Inglaterra.** Isaac Newton desarrolló un algoritmo para derivar funciones algebraicas, que coincidía con el de Pierre de Fermat.

1671 d. C. **Inglaterra.** Isaac Newton trabajó la teoría de fluxiones, donde dividió las ecuaciones diferenciales en tres categorías teniendo la necesidad de aplicar las derivadas parciales.

1684 d. C. **Alemania.** Gottfried Leibniz postuló las reglas básicas para realizar derivadas de funciones en el *Acta eruditorum* con el título *Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, et singulare pro illis calculi genus*.

1736 d. C. **Suiza.** Leonard Euler definió la constante e (número de Euler) como un número que cumple que el valor de su derivada en $f(x) = e^x$ cuando $x = 0$ es igual a 1.

1799 d. C. **Alemania.** Carl Friedrich Gauss realizó la formulación moderna del teorema de intercalación que fue utilizado posteriormente para demostrar la derivada de la función seno.

1965 d. C. **Estados Unidos.** Abraham Robinson realizó el análisis no estándar para comprobar la teoría infinitesimal de Leibniz.

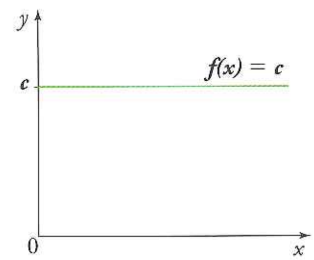
1. Reglas de derivación

Enlace web

A partir de la definición de derivada se pueden deducir algunas reglas generales de derivación, las cuales permiten calcular, de una forma más sencilla, la derivada de ciertas funciones.

1.1 Derivada de la función constante

Una función constante $f(x) = c$ tiene como dominio el conjunto de los números reales y como rango un valor constante, por tanto, su representación gráfica es una recta horizontal, paralela al eje x y con pendiente cero. Así, la derivada en cualquier punto del dominio de esta función es cero.



Si $f(x) = c$ con $c \in \mathbb{R}$, entonces, $f'(x) = 0$.

Esta regla se puede demostrar aplicando la definición de derivada así:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{Definición de derivada.}$$

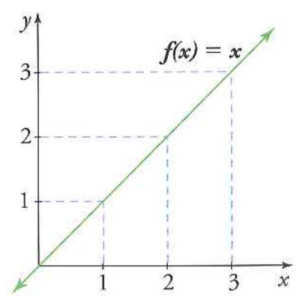
$$= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} \quad \text{Se remplazan } f(x+h) \text{ y } f(x).$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0 \quad \text{Se resta y se calcula el límite.}$$

Por tanto, se concluye que si $f(x) = c$, entonces, $f'(x) = 0$.

1.2 Derivada de la función idéntica

En una función idéntica $f(x) = x$, tanto el dominio como el rango es el conjunto de los números reales y su gráfica es una recta de pendiente 1. Así, la derivada de esta función es 1 para cualquier valor del dominio.



Si $f(x) = x$, entonces, $f'(x) = 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Para demostrar esta regla se aplica la definición de derivada así:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{Definición de derivada.}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} \quad \text{Se remplazan } f(x+h) \text{ y } f(x).$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} \quad \text{Se resta.}$$

$$= \lim_{h \to 0} 1 = 1 \quad \text{Se divide y se calcula el límite.}$$

Por tanto, se concluye que si $f(x) = x$, entonces, $f'(x) = 1$.

Por ejemplo, si $s(t) = t$ y $p(t) = 4$, entonces, $s'(t) = 1$ y $p'(t) = 0$, porque s es una función idéntica y p una función constante.

Historia de las matemáticas

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Leibniz fue un matemático y filósofo alemán, que inventó el cálculo diferencial en forma independiente de Isaac Newton. Leibniz creó la notación $\frac{dy}{dx}$ para indicar la derivada. Así, en notación de Leibniz, la derivada de una constante y de su función idéntica se escriben:

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

1.3 Derivada de una potencia

Ampliación multimedia

Si $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces, $f'(x) = nx^{n-1}$.

A partir de la definición de derivada se plantea la siguiente demostración:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} && \text{Definición de derivada.}\\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} && \text{Se remplaza } f(x+h) \text{ y } f(x).\\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n}{h} && \text{Se desarrolla la potencia.}\\
&= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n}{h} && \text{Se reducen términos semejantes.}\\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right)}{h} && \text{Se factoriza } h.\\
&= \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right] && \text{Se simplifica.}\\
&= nx^{n-1} && \text{Se calcula el límite.}
\end{aligned}
$$

Por tanto, si $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces, $f'(x) = nx^{n-1}$. En general, se cumple que si $f(x) = x^n$ donde $n \in \mathbb{R}$, entonces, $f'(x) = nx^{n-1}$. En la notación de Leibniz la derivada de una potencia se escribe así:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

EJEMPLOS

1. Calcular la derivada de cada función.

a. $f(x) = x^5$

Al aplicar la regla para derivar una potencia se tiene que:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 5x^{5-1}\\
&= 5x^4
\end{aligned}
$$

b. $s(t) = t^{-9}$

En este caso, aunque el exponente es negativo también se puede aplicar la regla para derivar una potencia.

Por tanto, se realizan los siguientes pasos:

$s'(t) = -9t^{-9-1}$ Se deriva la potencia.

$s'(t) = -9t^{-10}$ Se resta.

$s'(t) = -\frac{9}{t^{10}}$ Se expresa como función racional.

Por tanto, la derivada de $s(t) = t^{-9}$ es $s'(t) = -\frac{9}{t^{10}}$.

2. Calcular la derivada de la función $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$.

Primero, se expresa la función como una potencia con exponente racional.

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = x^{-\frac{2}{5}}$$

Luego, se realizan los siguientes pasos:

$h(x) = x^{-\frac{2}{5}}$	Función.
$h'(x) = -\dfrac{2}{5}x^{-\frac{2}{5}-1}$	Se aplica la regla para derivar una potencia.
$h'(x) = -\dfrac{2}{5}x^{-\frac{7}{5}}$	Se resta.
$h'(x) = -\dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^7}}$	Se expresa en forma radical.

Finalmente, la derivada de $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ es $h'(x) = -\dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^7}}$.

3. Hallar la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la curva $f(x) = \sqrt{x^5}$ en $x = 2$.

Primero, se realizan los siguientes pasos:

$f(x) = x^{\frac{5}{2}}$	Se reescribe la función.
$f'(x) = \dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$	Se calcula la derivada.
$f'(2) = \dfrac{5}{2}(2)^{\frac{3}{2}}$	Se remplaza $x = 2$.
$f'(2) = 5\sqrt{2}$	Se simplifica.

Recuerda que...

Si $P(x_1, y_1)$ es el punto de una recta cuya pendiente es m, entonces, la ecuación de la recta está dada por la expresión:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Luego, la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 2$ es $5\sqrt{2}$. Además, el punto de tangencia es $(2, 4\sqrt{2})$. Así, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 4\sqrt{2} = 5\sqrt{2}(x - 2)$$
$$y = 5\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}$$

La pendiente de la recta normal es $-\dfrac{1}{5\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{10}$, de donde su ecuación es:

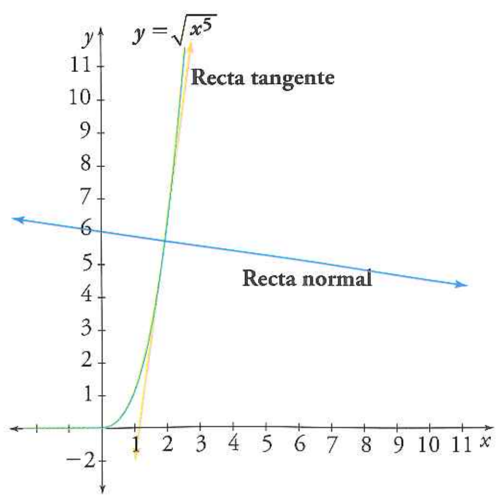
$$y - 4\sqrt{2} = \frac{-\sqrt{2}}{10}(x - 2)$$
$$y = \frac{-\sqrt{2}}{10}x + \frac{21\sqrt{2}}{5}$$

Finalmente, se tiene que las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva $f(x) = \sqrt{x^5}$ son:

$y = 5\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}$ (tangente)

$y = -\dfrac{\sqrt{2}}{10}x + \dfrac{21\sqrt{2}}{5}$ (normal)

Como se muestra en la gráfica.



1.4 Derivada del múltiplo constante

Si c es una constante y $g(x)$ es una función derivable en x, entonces, la derivada de $f(x) = cg(x)$ es $f'(x) = cg'(x)$.

Esta regla se demuestra con la definición de derivada así:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{Definición de derivada.}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{cg(x+h) - cg(x)}{h} \quad \text{Se remplazan } f(x+h) \text{ y } f(x).$$

$$= \lim_{h \to 0} c \cdot \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \quad \text{Se factoriza } c.$$

$$= \lim_{h \to 0} c \cdot \lim \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad \text{Se aplica el límite de una multiplicación.}$$

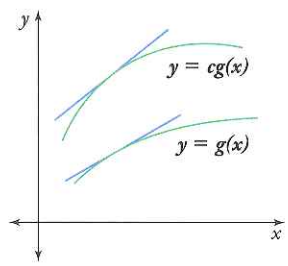
$$= c \cdot g'(x) \quad \text{Se aplica la definición de derivada.}$$

En notación de Leibniz, la regla del múltiplo constante se expresa como:

$$\frac{d}{dx}[cg(x)] = c\frac{dg}{dx}.$$

Geométricamente, la regla del múltiplo constante indica que la escala de la gráfica de $y = g(x)$ se modifica verticalmente al multiplicar cada coordenada de y por c.

Esto implica que la pendiente en cada punto se multiplica por c, como se muestra en la figura.



Recuerda que...

Demuestra que la razón de cambio del área de un círculo con respecto a su radio es igual a la longitud de la circunferencia correspondiente.

EJEMPLOS

1. Calcular la derivada de las siguientes funciones.

a. $y = \dfrac{8}{x^3}$

Primero, se expresa la función con exponente negativo, es decir, $y = 8x^{-3}$.

Luego, se aplica la derivada de una potencia y del múltiplo constante.

$$y' = (8)(-3)x^{-3-1} = -24x^{-4}$$

Finalmente, la derivada es $y' = \dfrac{-24}{x^4}$.

b. $f(x) = -3x^5$

Se aplican simultáneamente la regla para derivar una potencia y la regla del múltiplo constante.

$$f'(x) = (-3)(5x^{5-1}) = -15x^4$$

Por tanto, si $f(x) = -3x^5$, entonces,

$$f'(x) = -15x^4.$$

2. Un tumor cancerígeno en crecimiento es aproximadamente esférico. Si el radio r se mide en micrómetros (μm), determinar el cambio en el volumen del tumor respecto a r, cuando $r = 5$ μm.

Primero, se calcula la derivada del volumen V con respecto al radio r. Como el volumen está dado por $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, entonces, se tiene que:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi(3r^2)$$

$$= 4\pi r^2$$

Luego, se calcula la deriva en $r = 5$.

$$\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=5} = 4\pi(5)^2 = 100\pi$$

Finalmente, se tiene que la variación del volumen del tumor con respecto al radio es de 100π $\mu m^3/\mu m$, es decir, aproximadamente 314,16 $\mu m^3/\mu m$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • E Ejercito • R Razono • S Soluciono problemas

Responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cómo se determina la derivada de una función de la forma $f(x) = x^n$?
2. ¿En qué consiste la regla del múltiplo constante?

E Determina la derivada de cada una de las siguientes funciones.

3. $f(x) = 2x^3$
4. $y = \sqrt{x^7}$
5. $g(x) = \frac{1}{x^3}$
6. $h(x) = \frac{x^4}{3}$
7. $y = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$
8. $j(x) = \sqrt[3]{4} - 2$
9. $y = x^{\frac{9}{2}}$
10. $y = x^{-\frac{3}{2}}$

Utiliza la definición formal de derivada para demostrar cada una de las siguientes proposiciones.

11. Si $f(x) = x^3$, entonces, $f'(x) = 3x^2$
12. Si $g(x) = 5x^4$, entonces, $g'(x) = 20x^3$

Determina, en cada caso, una función que cumpla las condiciones que se indican.

13. Una función $f(x)$ tal que $f'(x) = 10x^4$.
14. Una función $g(x)$ tal que $g'(x) = 4x^5$.
15. Una función $h(x)$ tal que $h'(x) = m$, donde m es un número real fijo.

Determina el valor de verdad de los siguientes enunciados. Justifica tu respuesta.

16. Si $f(x) = a^x$, entonces, $f'(x) = xa^{x-1}$
17. $g(x) = (n + m)x^{n+m-1}$ es la derivada de $f(x) = x^n x^m$
18. Si $f(x) = cx^n$ se verifica que $f'(x) = cx^{n-1}$
19. Toda función de la forma $y = f(x) = ax^n$ es derivable.
20. Toda función de la forma $y = f(x) = ax^n$ es derivada de otra función.

E Asocia cada función con su respectiva recta tangente, cuando $x = 1$.

21. $f(x) = \frac{1}{4}x$
22. $g(x) = \sqrt[3]{x}$
23. $h(x) = \frac{2}{x^2}$
24. $j(x) = \frac{1}{x}$
25. $k(x) = 2x^3$
26. $m(x) = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{4}$

a. $y = -4x + 6$
b. $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
c. $y = \frac{3}{20}x + \frac{1}{10}$
d. $y = \frac{1}{4}x$
e. $y = 6x - 4$
f. $y = -x + 2$

R Resuelve los siguientes problemas.

27. Determina los puntos de la gráfica de $y = 3x^5$ en los cuales la recta tangente es paralela a la recta $y = \frac{15x + 5}{16}$.
28. Encuentra los puntos en la gráfica de la función $f(x) = \frac{2}{x^2}$ en los cuales la recta normal tiene como pendiente 16.

S Un cohete viaja en el plano cartesiano de izquierda a derecha a través de la curva $y = 2x^3$. En el momento que apaguen los motores, el cohete seguirá viajando a través de la recta tangente en donde se encuentra en dicho momento.

29. Si la tripulación desea pasar por (7, 38), ¿en qué punto deben apagar los motores?
30. ¿Cuál es la ecuación de la recta por la cual se desplazaría el cohete para pasar por (7, 38)?

S Un globo esférico se expande de forma tal que su radio en el tiempo t (en segundos) viene dado por $r = 0{,}231t$, r en cm.

31. Determina una expresión A para el área superficial del globo.
32. Calcula $\frac{dA}{dt}$. ¿Qué significado tiene en el contexto del problema?

Lo que viene...

En las siguientes páginas trabajarás las derivadas de la suma de dos funciones. Escribe la fórmula para derivar una suma de dos funciones.

1.5 Derivada de la suma de funciones

Recurso imprimible

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en x, tales que existe una función
$$F(x) = f(x) + g(x),$$
entonces $F'(x) = f'(x) + g'(x)$

Si $F(x) = f(x) + g(x)$, entonces, la demostración de la regla para derivar una suma de funciones es:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$ Definición de derivada.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$ Se remplazan $F(x+h)$ y $F(x)$.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}$$ Se eliminan signos de agrupación.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h}$$ Se agrupan los términos.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$ Se aplican las propiedades de los límites.

$$= f'(x) + g'(x)$$ Se aplica la definición de derivada.

Por tanto, si $F(x) = f(x) + g(x)$, entonces, $F'(x) = f'(x) + g'(x)$. En notación de Leibniz, la derivada de una suma se puede expresar como:

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

En relación con la derivada de una resta se cumple que:

Si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en x, tales que existe una función $F(x) = f(x) - g(x)$, entonces:
$$F'(x) = f'(x) - g'(x)$$

La derivada de una resta se puede obtener a partir de la regla del múltiplo constante y de la regla de la suma.

Por tanto, si se escribe $f(x) - g(x)$ como $f(x) + [(-1)g(x)]$, se tiene que:

$$\frac{d}{dx}[f(x) + [(-1)g(x)]]$$
$$= \frac{df}{dx} + \frac{d}{dx}[-1g(x)]$$
$$= \frac{df}{dx} - \frac{dg}{dx}$$

Tanto la derivada de la suma como la derivada de la resta se pueden aplicar a dos o más funciones. Además, utilizando las reglas del múltiplo constante, de la suma y de la resta se puede obtener la derivada de cualquier polinomio de grado n.

Matemáticamente

Demuestra la regla para derivar una resta de funciones aplicando la definición de derivada.

EJEMPLOS

1. Calcular la derivada de $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[4]{x^3} - \frac{1}{x^3} + 3x^2$.

Se realizan los siguientes pasos:

$f(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{4}} - x^{-3} + 3x^2$	Se reescribe la función.
$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{4}}\right) - \frac{d}{dx}(x^{-3}) + \frac{d}{dx}(3x^2)$	Se aplica la derivada de una suma y la derivada de una resta.
$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}(x^{\frac{3}{4}}) - \frac{d}{dx}(x^{-3}) + 3\cdot\frac{d}{dx}(x^2)$	Se aplica la regla del múltiplo constante.
$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}\right) - (-3x^{-4}) + 3(2x)$	Se aplica la derivada de una potencia.
$f'(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{1}{4}} + 3x^{-4} + 6x$	Se simplifica.

Por tanto, la derivada de f es $f'(x) = \frac{3}{8\sqrt[4]{x}} + \frac{3}{x^4} + 6x$.

2. La posición de una partícula que se mueve según las leyes de movimiento está dada por la expresión:

$$s(t) = 2t^3 - 15t^2 + 36t - 10,\ t \geqslant 0$$

donde t se mide en segundos y s en metros.

a. ¿Cuándo la partícula está en reposo?

Primero, se calcula la derivada de la distancia con respecto al tiempo, es decir, se determina la expresión para calcular la velocidad del móvil. Por tanto, se tiene que:

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 30t + 36$$

Luego, la partícula está en reposo cuando $v(t) = 0$, es decir, cuando $6t^2 - 30t + 36 = 0$. Si se factoriza la expresión cuadrática se obtiene que $6(t-2)(t-3) = 0$, de donde $t = 2$ o $t = 3$.

Finalmente, la partícula está en reposo a los 2 o a los 3 segundos.

b. ¿Cuándo la partícula se mueve hacia adelante?

La partícula se mueve hacia adelante si $v(t) > 0$. Por tanto, se tiene que:

$$6t^2 - 30t + 36 \geqslant 0,\ \text{es decir},\ 6(t-2)(t-3) > 0$$

Para resolver esta desigualdad se analiza el signo del producto entre $(t-2)$ y $(t-3)$ en los intervalos $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, \infty)$.

$t-2$	$-$		$+$		$+$
$t-3$	$-$		$-$		$+$
Producto	$+$	2	$-$	3	$+$

Como el producto solo es negativo en el intervalo $(2, 3)$ y $t \geqslant 0$, entonces, la partícula se mueve hacia adelante en el intervalo $[0, 2) \cup (3, \infty)$.

> **Recuerda que...**
> Físicamente un móvil se desplaza hacia adelante si su velocidad es positiva, o se desplaza hacia atrás si su velocidad es negativa.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • E Ejercito • R Razono • S Soluciono problemas

Escribe V, si el enunciado es verdadero o F, si es falso. Justifica tu respuesta.

33. Si $f(x) = g(x) + ch(x)$, con g y h diferenciables, entonces, $f'(x) = g'(x) + h'(x)$. ( )

34. Los polinomios son funciones diferenciables en cualquier número real. ( )

E Encuentra la derivada de cada una de las siguientes funciones:

35. $f(x) = x^2 + 3x - 2$

36. $g(x) = \frac{2}{x} + x$

37. $h(x) = -4x^2 + x^{\frac{5}{3}} + 2x$

38. $j(x) = 3x^4 - 5x + 2$

39. $k(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{\sqrt{x}}{x} - x\sqrt[4]{x^3} + 2x - 3$

40. $m(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 2$

Sea $f(x)$ la función dada por la expresión

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 5x - 4}{x^2}.$$

41. Utiliza la propiedad distributiva para reescribir f, como suma de potencias en base x.

42. Utiliza el resultado del ejercicio anterior para determinar $f'(x)$.

En cada caso encuentra dos funciones que cumplan las condiciones propuestas.

43. Que su derivada sean polinomios de grado 2 y completos.

44. Que su derivada sea lineal con intersecto con el eje y igual a 0.

45. Que su derivada sea un polinomio cúbico sin término cuadrático.

Responde las siguientes preguntas, justificando tus razonamientos.

46. Si la diferencia entre dos funciones es una constante, ¿qué ocurre con sus derivadas?

47. Si $f'(x) = g'(x)$, ¿se verifica que $f(x) = g(x)$?

E Si $f'(-1) = -2$; $g'(-1) = 1$ y $h'(-1) = 3$, determina el valor de las siguientes derivadas en $x = -1$.

48. $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) =$ ______

49. $\frac{d}{dx}(g(x) - h(x)) =$ ______

50. $\frac{d}{dx}(7f(x) - 5g(x)) =$ ______

51. $\frac{d}{dx}(f(x) - 4g(x) + 3h(x)) =$ ______

52. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}f(x) - \frac{5}{6}g(x) + \frac{1}{2}h(x)\right) =$ ______

R Determina, en cada caso, el punto o los puntos (si los hay), donde la recta tangente a la gráfica de la función es horizontal.

53. $y = x^4 - 3x^2 + 4$

54. $y = x^3 - x$

55. $y = x^2 - 1$

56. $y = -x^4 + 2x^2 - 2$

57. $y = x^2 - 6x + 10$

58. $y = x^3 + 2x$

S Una ciudad es azotada por una epidemia de gripe. En el departamento contra enfermedades se estima que en t días después del inicio de la epidemia, el número de personas enfermas con la gripe está dado por $p(t) = 240t^3 - 3t^4$ para $0 \leq t \leq 50$.

59. ¿A qué tasa se expande la gripe en los instantes $t = 5$, $t = 25$ y $t = 50$?

60. ¿Existe algún instante para el cual $p'(t) = 0$? ¿Qué significado tiene $p'(t) = 0$?

S Una pelota rueda sobre un plano inclinado de forma que la distancia que recorre al cabo de t segundos es $s(t) = 2t^3 + 3t^2 + 4$; s en cm.

61. Hallar la velocidad de la pelota para cualquier instante t.

62. ¿Qué velocidad lleva la pelota en $t = 25$?

63. ¿En qué instante la velocidad de la pelota será de 72 cm/s?

Lo que viene...

A continuación vas a trabajar la derivada del producto y el cociente de dos funciones. Consulta las fórmula para derivar un producto entre dos funciones y deriva $f(x) = x^2(x^3 + 9)$.

1.6 Derivada del producto de dos funciones

Actividad

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en x tales que existe una función $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, entonces:

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

En palabras, la derivada del producto de dos funciones se puede expresar como la derivada de la primera función por la segunda, más la primera función por la derivada de la segunda función.

La regla para derivar el producto de dos funciones se demuestra así:

Primero, se aplica la definición de derivada.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Segundo, se suma y se resta $f(x+h)g(x)$ el numerador.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) + f(x+h)g(x) - f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}$$

Tercero, se reagrupan los términos en el denominador.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h)g(x) - f(x)g(x)] + [f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)]}{h}$$

Cuarto, se aplica la propiedad distributiva y se factoriza.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x)\right] + \left[f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

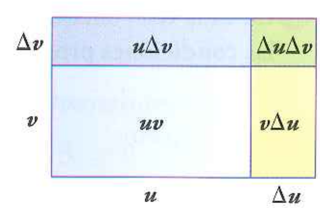
Luego, se aplican las propiedades de los límites.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} g(x) + \lim_{h \to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Finalmente, se calculan los límites y se aplica la definición de derivada.

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Geométricamente, la regla para derivar el producto de dos funciones se puede deducir considerando dos funciones $u = f(x)$ y $v = g(x)$ positivas, tales que su producto corresponde al área de un rectángulo como se muestra en la figura. Así, cuando x varía una cantidad Δx, los cambios en u y en v se expresan como Δu y Δv, respectivamente. Entonces, el cambio en el área del rectángulo está dado por:



$$\Delta(uv) = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) - uv$$
$$= u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v$$

Al dividir entre Δx se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Finalmente, si se aplica la definición de derivada y se calcula $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x}$, se obtiene la regla del producto: $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$.

Historia de las matemáticas

La derivada de un producto

Gottfried Leibniz, uno de los inventores del cálculo, mencionó en 1675, que la derivada de un producto es el producto de las derivadas. Tiempo después, Leibniz notó el error y propuso la regla correcta para derivar el producto de dos funciones.

1.7 Derivada del cociente de dos funciones

Recurso imprimible

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en x tales que existe una función $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$, entonces:

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

En palabras, la derivada del cociente de dos funciones se puede expresar como la derivada del numerador por el denominador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

Para demostrar la regla del cociente se puede utilizar la regla del producto. Por tanto, si $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$, se realizan los siguientes pasos:

$f(x) = F(x) \cdot g(x)$ Se expresa $f(x)$ como un producto.

$f'(x) = F'(x)g(x) + F(x)g'(x)$ Se calcula la derivada.

$F'(x) = \dfrac{f'(x) - F(x)g'(x)}{g(x)}$ Se despeja $F'(x)$.

$F'(x) = \dfrac{f'(x) - \dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot g'(x)}{g(x)}$ Se remplaza $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$F'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ Se multiplican el numerador y el denominador por $g(x)$.

Aplicando la regla del cociente junto con las reglas de derivación vistas anteriormente, se puede calcular la derivada de cualquier función racional.

Por ejemplo, para calcular la derivada de $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x}{x + 2}$ se realizan los siguientes pasos:

$f'(x) = \dfrac{\left[\dfrac{d}{dx}(x^2 - 8x)\right] \cdot (x + 2) - (x^2 - 8x) \cdot \left[\dfrac{d}{dx}(x + 2)\right]}{(x + 2)^2}$ Se aplica la regla del cociente.

$f'(x) = \dfrac{(2x - 8) \cdot (x + 2) - (x^2 - 8x)(1)}{(x + 2)^2}$ Se calculan las derivadas.

$f'(x) = \dfrac{2x^2 + 4x - 8x - 16 - x^2 + 8x}{(x + 2)^2}$ Se multiplica.

$f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 16}{(x + 2)^2}$ Se reducen términos semejantes.

Por tanto, la derivada de la función racional $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x}{x + 2}$ es

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 16}{(x + 2)^2}.$$

Recuerda que...

Una función f es racional si:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(x) \neq 0$.

EJEMPLOS

1. **Si $f(x) = \sqrt[3]{x}\, g(x)$, donde $g(3) = 4$ y $g'(3) = 2$, determinar $f'(3)$.**

Primero, se calcula la derivada de f así:

$f(x) = x^{\frac{1}{3}} g(x)$ — Se reescribe la función.

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}g(x) + x^{\frac{1}{3}}g'(x)$ — Se aplica la derivada de un producto.

$f'(x) = \frac{g(x)}{3\sqrt[3]{x^2}} + g'(x)\sqrt[3]{x}$ — Se expresa en forma radical.

Luego, se determina $f'(3)$, teniendo en cuenta que $g(3) = 4$ y $g'(3) = 2$.

$f'(3) = \frac{g(3)}{3\sqrt[3]{3^2}} + g'(3)\sqrt[3]{3}$ — Se remplaza $x = 3$.

$f'(3) = \frac{4}{3\sqrt[3]{3^2}} + 2\sqrt[3]{3}$ — Se remplazan $g(3)$ y $g'(3)$.

$f'(3) = \frac{22\sqrt[3]{3}}{9}$ — Se efectúan las operaciones.

Finalmente, se tiene que $f'(3) = \frac{22\sqrt[3]{3}}{9}$.

2. **Determinar los puntos en los cuales la recta tangente a la curva $y = \frac{3x}{x^2+1}$ es horizontal.**

Primero, se calcula la pendiente de la recta tangente.

$y' = \frac{3(x^2+1) - (3x)(2x)}{(x^2+1)^2}$ — Se aplica la regla del cociente.

$y' = \frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2}$ — Se simplifica.

Luego, como la recta tangente debe ser horizontal, entonces, $y' = 0$.

$\frac{-3x^2+3}{(x^2+1)^2} = 0$ — Se iguala la pendiente a cero.

$-3x^2 + 3 = 0$ — Se determina cuándo el denominador es cero.

$x^2 - 1 = 0$ — Se divide entre -3.

$(x-1)(x+1) = 0$ — Se factoriza.

$x = 1 \vee x = -1$ — Se escriben las posibles soluciones.

Finalmente, se hallan las ordenadas de los puntos de tangencia remplazando $x = 1$ y $x = -1$ en la función.

$$y = \frac{3(1)}{(1)^2+1} = \frac{3}{2} \text{ o } y = \frac{3(-1)}{(-1)^2+1} = -\frac{3}{2}$$

Por tanto, los puntos donde la recta tangente a la curva $y = \frac{3x}{x^2+1}$ es horizontal son $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ y $\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$.

La gráfica de la función y las tangentes horizontales se muestran en la figura 1.

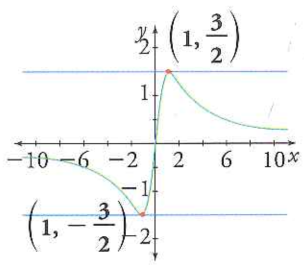


Figura 1.

3. Calcular la velocidad de un objeto en caída libre a los 2 segundos, si la función de posición es:

$$s(t) = 16t \cdot \left(t + \frac{1}{16}\right)$$

donde t está en segundos y s en metros.

Primero, se halla la velocidad $v(t)$ calculando $s'(t)$ así:

$s(t) = 16t \cdot \left(t + \frac{1}{16}\right)$ Función de posición.

$s'(t) = 16 \cdot \left(t + \frac{1}{16}\right) + (16t)(1)$ Se aplica la regla del producto.

$s'(t) = 16t + 1 + 16t$ Se múltiplica.

$s'(t) = 32t + 1$ Se reducen términos semejantes.

Luego, se calcula la velocidad a los 2 segundos.

$v(t) = s'(t) = 32t + 1$ Función de velocidad.

$s'(2) = 32(2) + 1$ Se remplaza $t = 2$.

$= 65$ Se efectúan las operaciones.

Finalmente, la velocidad del objeto es de 65 metros por segundo.

4. En un proyecto de acuicultura se introducen inicialmente 1.000 peces. Luego, la población de peces aumentan de acuerdo con la función $P(t) = 1.000\left(1 + \frac{5t}{25 + t^2}\right)$, donde t se mide en meses. Determinar la tasa de cambio de la población cuando $t = 4$ meses.

Se realizan los siguientes pasos:

$P(t) = 1.000 + \frac{5.000t}{25 + t^2}$ Se rescribe la función.

$\frac{dP}{dt} = 0 + \frac{(5.000)(25 + t^2) - (5.000t)(2t)}{(25 + t^2)^2}$ Se aplica la derivada de una suma y de un cociente.

$\frac{dP}{dt} = \frac{125.000 + 5.000t^2 - 10.000t^2}{(25 + t^2)^2}$ Se efectúan las operaciones.

$\frac{dP}{dt} = \frac{125.000 - 5.000t^2}{(25 + t^2)^2}$ Se reducen términos semejantes.

$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=4} = \frac{125.000 - 5.000(4)^2}{(25 + (4)^2)^2}$ Se remplaza $t = 4$.

$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=4} = \frac{45.000}{1.681}$ Se resuelven las operaciones.

$\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=4} \approx 26{,}77$ Se aproxima el resultado.

Por tanto, la tasa de cambio en la población de peces al cabo de 4 meses es de tan solo 26 individuos por mes.

Matemáticamente

Sean u y v funciones que dependen de x y derivables en $x = 0$, tales que

$u(0) = 3$, $u'(0) = 2$,

$v(0) = -4$ y $v'(0) = -2$,

halla $\frac{d}{dx}(u \cdot v)$ y $\frac{d}{dx}\left(\frac{4u}{v}\right)$

en $x = 0$.

Halla las siguientes derivadas teniendo en cuenta que las funciones f, g y h son derivables en $x = 1$ y además se cumple que:

$f(1) = -2$ $\qquad g(1) = 3$ $\qquad h(1) = 2$

$f'(1) = -4$ $\qquad g'(1) = -\frac{1}{2}$ $\qquad h'(1) = \sqrt{2}$

64. $(f \cdot g)'(1)$
65. $(f \cdot h)'(1)$
66. $(h \cdot g)'(1)$
67. $\left(\frac{f}{h}\right)'(1)$
68. $\left(\frac{g}{h}\right)'(1)$
69. $\left(\frac{f \cdot g}{h}\right)'(1)$

Obtén la derivada de cada una de las siguientes funciones utilizando la regla del producto.

70. $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 1)$
71. $f(x) = (x^3)\left(\frac{1}{x} - x^{-2}\right)$
72. $f(x) = \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x}\right)(x + 5x^3)$
73. $f(x) = \left(2x^{\frac{2}{3}} - x\right)(x^3 + 3x)$
74. $f(x) = (x + 3)(x - 1)(x^2 + 2)$
75. $f(x) = (\sqrt{x} + 4)(2\sqrt{x} + 3)$
76. $f(x) = \left(\frac{2}{3}x^6 + \frac{4}{5}x^5\right)(6x - 2)$
77. $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 4x - 2)(5x^7 - 3x)$
78. $f(x) = \left(\frac{7}{4}\sqrt{x} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}\right)(x^{-3} + 4)$

Determina si cada proposición es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

79. Si $y = f(x) \cdot g(x)$, entonces, $y' = f'(x) \cdot g'(x)$.
80. Si $y = (x + a)(x + b)(x + c)$, entonces, $y' = 3x^2 + 2ax + 2bx + 2cx + ab + ac + bc$.
81. La derivada de la función $f(x) = (x^3 + 5x + 2)(x + 1)$ es una función de grado 3.
82. La deriva de la función $F(x) = \frac{u - 3}{uv}$ es $F'(x) = \frac{u'v - uv' + 3v'}{4v^2}$, donde u y v son funciones de x.

Calcula la derivada de las siguientes funciones aplicando la regla del cociente.

83. $f(x) = \frac{x + 2}{x - 2}$
84. $g(x) = \frac{x^2 + 2x - 5}{x^2 + 6}$
85. $h(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{2 - \sqrt{x}}$
86. $r(x) = \frac{(x + 2)(x + 1)}{x^3 - 1}$
87. $s(t) = \frac{(t^2 + t)(t^2 - t + 1)}{t^4}$
88. $p(q) = \frac{q + 1}{q^3 - q} + \frac{q + 1}{q - 1}$
89. $v(x) = \frac{x^2 - 3}{(x - 1)^2 + (x - 1)^2}$

Encuentra la derivada de cada función en el punto indicado aplicando las reglas del producto y del cociente.

90. $y = (x - 2)(x^2 + 3x)$ en $x = 0$
91. $y = \frac{7}{2x - 3}$ en $x = 2$
92. $y = \frac{5x^2 + 1}{2x - 5}$ en $x = -1$
93. $y = x^{\frac{1}{2}} \cdot (x^2 - 4)$ en $x = 3$
94. $y = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{2x - 5}$ en $x = \frac{1}{2}$

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado.

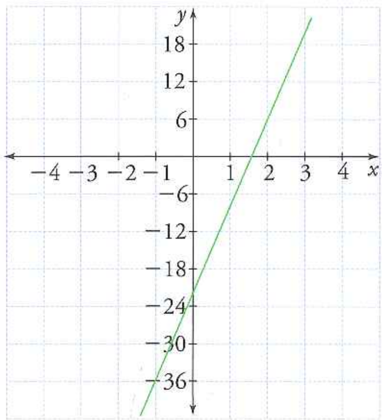
95. $y = \frac{x}{x - 3}$ en $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$
96. $y = \frac{x^2 - 2}{3x}$ en $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
97. $y = 5x\left[\frac{1 - x^2}{x - 7}\right]$ en $(0, 0)$
98. $y = \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 + 1}$ en $(2, 0)$

99. **Si g es una función derivable demuestra que:**

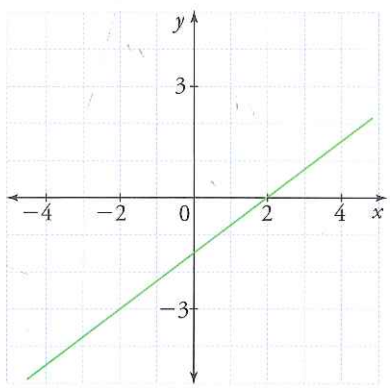
$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

R **Determina si la recta que se representa en cada gráfica es tangente a la función en el punto indicado.**

100. $f(x) = (x^2 - 2)(x + 1)$ en $x = -2$

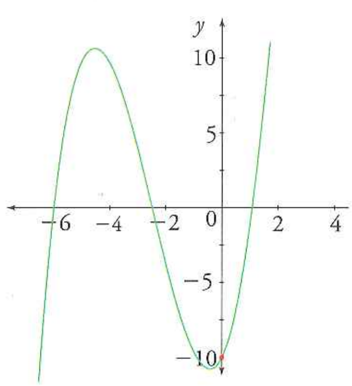


101. $f(x) = \dfrac{x^5}{2x - 1}$, en $x = 2$



R **Encuentra la recta normal de la función en el punto que se indica en la gráfica.**

102. $f(x) = (x - 1)\left(\dfrac{x}{3} + 2\right)(2x + 5)$



R **Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 9$ y $g(x) = x^3$, calcula las siguientes derivadas.**

103. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)$

104. $(f \cdot g)'(x)$

105. **Sean g, h y t funciones derivables en un intervalo abierto I. Probar que si $f(x) = g(x) \cdot h(x) \cdot t(x)$ para todo $x \in I$, entonces, se cumple que:**

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) \cdot t(x) + g(x) \cdot h'(x) \cdot t(x) + g(x) \cdot h(x) \cdot t'(x)$$

S **El voltaje en un circuito eléctrico que obedece la ley Ohm se define como $V = IR$, donde I es la corriente medida en amperios y R la resistencia medida en ohmios.**

106. Muestra que I decrece a una tasa proporcional al inverso del cuadrado de R.

107. Determina la tasa de variación de I respecto a R si $V = 60$ voltios y $R = 150\ \Omega$. Luego, interpreta el resultado.

S **Una partícula se mueve sobre el eje x y su posición en cada instante de tiempo t está dada por $s(t) = \dfrac{2t}{1 - t^2}$, donde $s(t)$ se mide en metros y t en segundos. Responde:**

108. ¿Cuándo se mueve la partícula hacia la derecha y cuándo hacia la izquierda?

109. Si la aceleración corresponde a la variación de la velocidad con respecto al tiempo, ¿cuándo desacelera la partícula?

S **Lee cada información. Luego, resuelve.**

110. La expansión de un gas según la ley de Boyle está definida por $P = \dfrac{c}{V}$, donde P es la presión en atmósferas, V el volumen en litros y c es una constante. Determina la tasa de variación de V respecto a P, cuando $P = 4$ atm y $V = 8$ L.

111. La temperatura de un alimento se expresa mediante la función $T(t) = \dfrac{500t}{3t^2 + 2t}$, donde t es el tiempo en horas. Halla la tasa de variación de la temperatura con respecto al tiempo, cuando t es igual a 5 horas.

Lo que viene...

En las siguientes páginas trabajarás la regla de la cadena. Consulta en qué consiste esta regla y en qué ocasiones se aplica.

Responde: ¿la función $f(x) = x^4 - e$ se debe derivar mediante la regla de la cadena?

Recurso imprimible

2. Derivadas de funciones compuestas

Para calcular la derivada de una función compuesta, se aplica un teorema que se conoce como **regla de la cadena.**

Ampliación multimedia

2.1 Regla de la cadena

Si la función $g(x)$ es derivable en x y $f(x)$ es derivable en $g(x)$, entonces, la función compuesta $F(x) = f \circ g = f(g(x))$ es derivable en x y se expresa como:

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

A $g'(x)$ se le llama **derivada interna**.

Para demostrar la regla de la cadena, cuando $h(x) = (f \circ g)(x)$ y $g(x) - g(a) \neq 0$, se aplican los siguientes pasos:

$$\begin{aligned} h'(a) &= \operatorname*{Lím}_{x \to a} \frac{f[g(x)] - f[g(a)]}{x - a} \text{ con } a \in \text{Dom } (f \circ g) \\ &= \operatorname*{Lím}_{x \to a} \left[\frac{f[g(x)] - f[g(a)]}{x - a} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g(x) - g(a)} \right] \\ &= \left[\operatorname*{Lím}_{x \to a} \frac{f[g(x)] - f[g(a)]}{g(x) - g(a)} \right] \cdot \left[\operatorname*{Lím}_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right] = f'[g(a)] \cdot g'(a) \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que $\forall\, x \in \text{Dom } (f \circ g)$ se cumple que $h'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$.

Este resultado puede escribirse también mediante la notación de Leibniz como sigue:

Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones diferenciables, entonces, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

Regla de la potencia de una función

Si n es un número real y $u(x)$ una función diferenciable tal que, $f(x) = [u(x)]^n$, entonces, $f'(x) = n[u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)$

EJEMPLOS

1. Determinar la derivada de $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x^2 + x^3}$.

Primero, se expresa $f(x)$ como $f(x) = [u(x)]^{\frac{1}{3}}$, donde $u(x) = 1 + 3x^2 + x^3$.

Luego, la derivada de $f(x)$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{3}[u(x)]^{\frac{1}{3}-1} \cdot u'(x)$$ Se aplica la regla de la cadena.

$$= \frac{1}{3}[1 + 3x^2 + x^3]^{-\frac{2}{3}}(6x + 3x^2)$$ Se remplaza $u(x)$ y $u'(x)$.

$$= \frac{6x + 3x^2}{3\sqrt[3]{(1 + 3x^2 + x^3)^2}}$$ Se expresa como raíz.

$$= \frac{2x + x^2}{\sqrt[3]{(1 + 3x^2 + x^3)^2}}$$ Se simplifica.

Finalmente, $f'(x) = \dfrac{2x + x^2}{\sqrt[3]{(1 + 3x^2 + x^3)^2}}$.

2. Expresar cada función como composición de dos funciones. Luego, hallar su derivada.

a. $h(x) = \left[\dfrac{x^3 - 2}{x^2 + 1}\right]^3$

Primero, se tiene que la función se puede escribir como la función compuesta, $h(x) = f[g(x)]$, donde $f(x) = x^3$ y $g(x) = \dfrac{x^3 - 2}{x^2 + 1}$.

Luego, se halla su derivada, así:

$h'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

$= 3\left[\dfrac{x^3 - 2}{x^2 + 1}\right]^2 \cdot \left[\dfrac{3x^2 \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot (x^3 - 2)}{(x^2 + 1)^2}\right]$ Se aplica la regla de la cadena.

$= 3\left[\dfrac{x^3 - 2}{x^2 + 1}\right]^2 \cdot \left[\dfrac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 + 4x}{(x^2 + 1)^2}\right]$ Se multiplica.

$= 3\left[\dfrac{x^3 - 2}{x^2 + 1}\right]^2 \cdot \left[\dfrac{x^4 + 3x^2 + 4x}{(x^2 + 1)^2}\right]$ Se resuelven las operaciones.

$= \dfrac{3(x^3 - 2)^2(x^4 + 3x^2 + 4x)}{(x^2 + 1)^4}$

Finalmente, $h'(x) = \dfrac{3(x^3 - 2)^2(x^4 + 3x^2 + 4x)}{(x^2 + 1)^4}$.

b. $k(x) = \dfrac{1}{(4x^3 - 5x^2 + 9x)^5}$

Primero, se expresa la función $k(x)$ como $k(x) = [u(x)]^{-5}$, donde $u(x) = 4x^3 - 5x^2 + 9x$.

Luego, la derivada de $k(x)$ es:

$k'(x) = -5[u(x)]^{-6} \cdot u'(x)$ Se aplica la regla de la cadena.

$= -5[4x^3 - 5x^2 + 9x]^{-6} \cdot (12x^2 - 10x + 9)$ Se sustituyen $u(x)$ y $u'(x)$.

$= \dfrac{-5 \cdot (12x^2 - 10x + 9)}{[4x^3 - 5x^2 + 9x]^6}$ Se expresa como fracción.

Finalmente, $h'(x) = \dfrac{-5 \cdot (12x^2 - 10x + 9)}{[4x^3 - 5x^2 + 9x]^6}$.

3. Encontrar la derivada de $y = \sqrt{1 + x^2}\,(x^2 - 1)$.

En esta función, el primer factor es una función compuesta y multiplica al segundo factor.

$y = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)$ Función dada.

$y' = \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x)(x^2 - 1) + 2x\sqrt{1 + x^2}$ Se aplica regla del producto y regla de la cadena.

$= \dfrac{x(x^2 - 1)}{\sqrt{1 + x^2}} + 2x\sqrt{1 + x^2}$ Se simplifica.

$= \dfrac{x(x^2 - 1) + 2x(1 + x^2)}{\sqrt{1 + x^2}}$ Se realiza la suma.

$= \dfrac{3x^3 + x}{\sqrt{1 + x^2}}$ Se resuelven las operaciones indicadas.

Por tanto, $y' = \dfrac{3x^3 + x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Matemáticamente

Halla la derivada de $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$.

4. La posición de una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta está definida por la función $s(t) = \sqrt{1 + 6t^2}$ con s en metros y t en segundos. Determinar la velocidad y la aceleración cuando $t = 3$ s.

Primero, se obtiene la velocidad derivando la función posición $s(t)$ respecto a t.

$$s'(t) = v(t) = \frac{1}{2}(1 + 6t^2)^{-\frac{1}{2}}(12t) = \frac{6t}{\sqrt{1 + 6t^2}}$$

Luego, se calcula la velocidad en $t = 3$ s.

$$s'(3) = v(3) = \frac{6(3)}{\sqrt{1 + 6(3)^2}}$$

$$= \frac{18\sqrt{55}}{55} \approx 2,42 \text{ m/s}$$

La aceleración se obtiene derivando $v(t) = \dfrac{6t}{\sqrt{1 + 6t^2}}$.

$$v'(t) = a(t) = \frac{(1 + 6t^2)^{\frac{1}{2}}(6) - (6t)\frac{1}{2}(1 + 6t^2)^{-\frac{1}{2}}(12t)}{\left((1 + 6t^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{6}{\sqrt{(1 + 6t^2)^3}}$$

De donde la aceleración en $t = 3$ s es:

$$a(3) = \frac{6}{\sqrt{(1 + 6(3)^2)^3}} = \frac{6}{55\sqrt{55}} \approx 0,014 \text{ m/s}^2$$

Finalmente, en 3 s la velocidad es 2,42 m/s y la aceleración es $0,014 \text{ m/s}^2$.

5. Una piscina que inicialmente está llena de agua, se comienza a drenar desde el fondo. De acuerdo con la ley de Torricelli, el volumen V de agua que queda en la piscina después de t minutos está dado por la función $V(t) = 10.000\sqrt[5]{\left(1.790 - \frac{25}{12}t\right)^2}$, donde V se mide en galones. Determinar la tasa de drenaje después de 10 minutos.

Se realizan los siguientes pasos:

$$\frac{dV}{dt} = 10.000\left(\frac{2}{5}\left(1.790 - \frac{25}{12}t\right)^{-\frac{3}{5}}\left(-\frac{25}{12}\right)\right)$$ Se aplica la regla de la cadena.

$$= -\frac{25.000}{3\sqrt[5]{\left(1.790 - \frac{25}{12}t\right)^3}}$$ Se efectúan las operaciones.

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=10} = -\frac{25.000}{3\sqrt[5]{\left(1.790 - \frac{25}{12}(10)\right)^3}}$$ Se evalúa el resultado en $t = 10$ min.

$$= -\frac{25.000}{3\sqrt[5]{\left(1.790 - \frac{125}{6}\right)^3}} \approx -93,8 \text{ gal/min}$$ Se realizan las operaciones y se aproxima.

Por tanto, como $V'(10)$ es negativo, significa que después de 10 minutos la tasa de drenaje es 93,8 gal/min.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • E Ejercito • R Razono • S Soluciono problemas

112. Completa la siguiente tabla.

$y = f(g(x))$	$u = g(x)$	$y = f(u)$	$y' = f'(u) \cdot \frac{du}{dx}$
$y = (3x - 4)^4$			
$y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$			
$y = \sqrt[4]{x^3 + 7}$			
$y = (x^3 - 2)^{\frac{4}{3}}$			
$y = \sqrt[5]{x(6 - x^2)}$			

E Determina la derivada de cada función, aplicando la regla de la cadena.

113. $f(x) = \left(\dfrac{x^3 + 3x^2 + 2}{x - 1}\right)^3$

114. $f(x) = \dfrac{x^4 + 5x}{\sqrt{x^4 + 5x}}$

115. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 6x - 2}$

116. $s(t) = \sqrt{\dfrac{t}{t^2 - 2}}$

117. $C(q) = ((q^2 + 3)^5 + q)^2$

R Determina $(f \circ g)'(x)$ en el punto indicado, teniendo en cuenta que $u = g(x)$.

118. $f(u) = u^4 + 1,\ u = \sqrt{x},\ x = 2$

119. $f(u) = 1 - \dfrac{1}{u^2},\ u = \dfrac{1 - x}{x},\ x = -1$

120. $f(u) = \left(\dfrac{1 - u}{1 + u}\right)^2,\ u = 1 - \dfrac{1}{x},\ x = \dfrac{1}{4}$

121. $f(u) = 2u^2,\ u = 5x^2 + x - 2,\ x = 0$

Determina el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.

122. Si $y = f(g(x)), f'(3) = -1, g'(2) = 5, g(2) = 3$, entonces, y' en $x = 2$ es 10.

123. Si $y = f(g(x)), f(-2) = 8, f'(-2) = 4, f'(5) = 3, g(5) = -2$ y $g'(5) = 6$, entonces, y' en $x = 5$ es -8.

Determina la recta normal a la gráfica de la función en el valor indicado.

124. $h(x) = (2x^5 - 1)^3$ en $x = -1$

125. $k(x) = \sqrt[4]{(x^2 - 4x + 2)^3}$ en $x = 4$

R Encuentra una función compuesta $h(x)$ para que su derivada sea la expresión indicada.

126. $h'(x) = \dfrac{2x + 2}{3\sqrt[3]{(x^2 + 2x + 1)^4}}$

127. $h'(x) = \dfrac{-8x^3 - 20x - 6}{(x^4 + 5x^2 + 3x + 6)^3}$

S Lee y resuelve.

La frecuencia F que produce el sonido de un avión en vuelo, percibida por un observador en reposo está dada por $F = 50 \times 10^3\,(340 \pm v)^{-1}$, donde v representa la velocidad de la aeronave.

Determina la tasa de cambio de F respecto a v cuando:

128. El avión se acerca a 120 m/s.

129. El avión se aleja a 120 m/s.

130. ¿Cómo interpretas los resultados obtenidos en los numerales anteriores?

S Lee y resuelve.

La presión absoluta de un vapor saturado a una temperatura de T grados Celsius es $P = \left(\dfrac{40 + T}{140}\right)^5$, $T > 80$ donde P está en atmósferas.

131. Calcula la tasa de cambio de P respecto a T, cuando $T = 100$ °C.

S Lee y resuelve.

La cantidad de calcio que permanece en una persona en un tiempo determinado se expresa mediante la función $P(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^3}}$, donde t es el tiempo en días.

132. Determina la variación P respecto a t, cuando $t = 1$, $t = 5$ y $t = 10$ días.

133. ¿Qué significado tendrán estos resultados?

S Lee y resuelve.

La velocidad de un fluido que sale por un orificio situado en el fondo de un tanque viene dada por $v = \sqrt{2gh}$, donde g es la aceleración de la gravedad y h la profundidad en metros del fluido en el tanque.

134. ¿Cuál es la tasa de cambio de v respecto a h cuando $h = 9$ y $h = 3$ metros.

135. ¿Cómo influye en el resultado el signo de g?

3. Derivadas de funciones trascendentes

En algunas situaciones relacionadas con crecimiento o fenómenos periódicos se hace necesario el estudio de las **derivadas de funciones trascendentes**.

3.1 Derivada de funciones logarítmicas

Ampliación multimedia

Si $f(x) = \text{Log}_a x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces, $f'(x) = \dfrac{1}{x \,\text{Ln}\, a}$.

En forma general, si $g(x) > 0$ y la función $g(x)$ es derivable en x, entonces, la derivada de $f(x) = \text{Log}_a (g(x))$ es $f'(x) = \dfrac{1}{g(x)\,\text{Ln}\, a} \cdot g'(x)$.

Para demostrar la regla de la derivada de una función logarítmica, se sigue:

$f(x) = \text{Log}_a x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\text{Log}_a (x+h) - \text{Log}_a x}{h}$$ Definición de la derivada de una función.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\text{Log}_a \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \text{Log}_a \frac{x+h}{x}$$ Se aplica propiedades de logaritmos.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x}{hx} \text{Log}_a \frac{x+h}{x} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \frac{x}{h} \left[\text{Log}_a \frac{x+h}{x}\right]$$ Se complifica por x.

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \left[\text{Log}_a \frac{x+h}{x}\right]^{\frac{x}{h}}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \left[\text{Log}_a \left(1 + \frac{h}{x}\right)\right]^{\frac{1}{\left(\frac{h}{x}\right)}}$$ Se aplica propiedades por límites.

$$= \frac{1}{x} \text{Log}_a \left[\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)\right]^{\frac{1}{\left(\frac{h}{x}\right)}}$$ Se aplica propiedad de límite.

$$= \frac{1}{x} \text{Log}_a (e)$$ Se aplica definición de e.

$$= \frac{1}{x \,\text{Ln}\, a}$$ Se realiza cambio de base.

Finalmente, se tiene $f'(x) = \dfrac{1}{x \,\text{Ln}\, a}$.

Si en la función $f(x) = \text{Log}_a x$, se cambia la base a por la base e, entonces, en la derivada el factor $\text{Ln}\, a$ se cambia por $\text{Ln}\, e = 1$. De esta forma se obtiene la fórmula para la derivada de la función logaritmo natural.

Si $f'(x) = \text{Ln}\, x$, entonces, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

En forma general, si $g(x)$ es una función positiva y diferenciable en x, entonces, la derivada de $f(x) = \text{Ln}\, g(x)$, es $f'(x) = \dfrac{1}{g(x)} g'(x)$.

En la notación de Leibniz si $u = g(x)$, entonces, $\dfrac{d}{dx}[\text{Ln}\, u] = \dfrac{1}{u} \dfrac{du}{dx}$.

Historia de las matemáticas

Leonard Euler (1707-1783)

Matemático suizo. Contribuyó al desarrollo de la teoría de las funciones, al estudio de variaciones, y al cálculo de diferenciales y de integrales, así como al estudio de las funciones transcendentes elementales, mediante sus desarrollos en series infinitas.

Recuerda que...

Para cualquier $x > 0$ y $y > 0$:

- $\text{Log}_a (xy) = \text{Log}_a x + \text{Log}_a y$
- $\text{Log}_a \dfrac{x}{y} = \text{Log}_a x - \text{Log}_a y$
- $\text{Log}_a x^n = n \,\text{Log}_a x$, $n \in \mathbb{R}$
- $\text{Ln}\, e = 1$
- $\text{Log}_a a = 1$
- $\lim_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e$
- $\text{Log}_a x = \dfrac{\text{Ln}\, x}{\text{Ln}\, a}$

3.2 Derivada de funciones exponenciales

Ampliación multimedia   Actividad

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces, la derivada de la función $f(x) = a^x$ es $f'(x) = a^x \cdot \text{Ln } a$.

En forma general, si el exponente es una función diferenciable $g(x)$, entonces, $f(x) = a^{g(x)}$ es diferenciable y su derivada es $f'(x) = a^{g(x)}\, g'(x) \cdot \text{Ln } a$.

Para demostrar la regla de la derivada de la función $f(x) = a^x$, se sigue:

$y = a^x$ Función dada.

$x = \text{Log}_a\, y$ Se despeja x.

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y \text{ Ln } a}$ Se deriva x respecto a y.

$dx \cdot y \text{ Ln } a = dy$ Se despeja dy.

$\dfrac{dy}{dx} = y \text{ Ln } a$ Se despeja $\dfrac{dy}{dx}$.

$\dfrac{dy}{dx} = a^x \text{ Ln } a$ Se remplaza y por a^x.

Finalmente, se tiene $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = a^x \text{ Ln } a$.

Si la base de la función exponencial es e, entonces, $f(x) = e^x$ y $f'(x) = e^x$.

En general, si $u = g(x)$ es una función derivable en x, entonces, la derivada de $f(x) = e^{g(x)}$ es $f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$.

En la notación de Leibniz si $u = g(x)$, entonces, $\dfrac{d}{dx}[e^u] = e^u \dfrac{du}{dx}$.

EJEMPLOS

1. Hallar la derivada de las siguientes funciones.

a. $y = \text{Ln}\,(x^3 + 4x^2 + 2x - 1)$

Sea $g(x) = x^3 + 4x^2 + 2x - 1$, se tiene que $y = \text{Ln}\,[g(x)]$.

$$y' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$$

$$y' = \underbrace{\frac{1}{x^3 + 4x^2 + 2x - 1}}_{\frac{1}{u}} \cdot \underbrace{(3x^2 + 8x + 2)}_{\frac{du}{dx}}$$

$$y' = \frac{3x^2 + 8x + 2}{x^3 + 4x^2 + 2x - 1}$$

Finalmente, $y' = \dfrac{3x^2 + 8x + 2}{x^3 + 4x^2 + 2x - 1}$.

b. $f(x) = \text{Log}_2\left[\dfrac{x+1}{x-1}\right]$

Sea $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, se tiene que: $f(x) = \text{Log}_2\,[g(x)]$

$$f'(x) = \frac{1}{\text{Ln } 2 \cdot g(x)} g'(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\text{Ln } 2\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)} \cdot \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x-1}{\text{Ln } 2 \cdot (x+1)} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2}{\text{Ln } 2 \cdot (x^2 - 1)}$$

Finalmente, si la función $f(x) = \text{Log}_2\left[\dfrac{x+1}{x-1}\right]$, entonces, su derivada es:

$$f'(x) = \frac{-2}{\text{Ln } 2 \cdot (x^2 - 1)}$$

c. $y = e^{x(x+5)^2}$

Sea $u(x) = x(x+5)^2$, se tiene que:

$y = e^{u(x)}$

$y' = e^{u(x)}\, u'(x)$

$y' = e^{x(x+5)^2}(x(2(x+5) \cdot 1) + 1 \cdot (x+5)^2)$

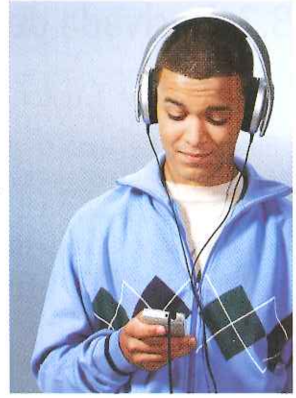
$y' = e^{x(x+5)^2}(2x^2 + 10x + (x+5)^2)$

$y' = e^{x(x+5)^2}(2x^2 + 10x + x^2 + 10x + 25)$

$y' = e^{x(x+5)^2}(3x^2 + 20x + 25)$

Finalmente, si $y = e^{x(x+5)^2}$, entonces, su derivada es $y' = e^{x(x+5)^2}(3x^2 + 20x + 25)$.

2. El nivel del sonido percibido por el oído humano depende de los niveles de intensidad, de acuerdo con $B(I) = 10\,\mathrm{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right)$, donde B está en decibeles y $I_0 = 1 \times 10^{-12}$ W/m² es la constante de intensidad de referencia. Determinar la tasa de cambio instantánea del nivel sonoro respecto a la intensidad I.



$B(I) = 10\,\mathrm{Log}\left(\frac{I}{I_0}\right)$ Función dada.

$B(I) = 10\,[\mathrm{Log}\,I - \mathrm{Log}\,I_0]$ Se aplica la propiedad de los logaritmos.

$\frac{dB}{dI} = 10\left[\frac{1}{I\,\mathrm{Ln}\,10} - 0\right]$ Se deriva.

$\frac{dB}{dI} = \frac{10}{I\,\mathrm{Ln}\,10}$ Se simplifica.

Finalmente, la tasa de cambio instantánea del nivel sonoro es $\frac{dB}{dI} = \frac{10}{I\,\mathrm{Ln}\,10}$.

3. La magnitud M de un sismo y la energía sísmica E, se relacionan por la función $M(E) = \frac{2}{3}[\mathrm{Log}\,E - 11{,}8]$, donde E se mide en ergios. Determinar la tasa de cambio instantánea de M respecto a E, cuando $E = 100$ erg.

$M(E) = \frac{2}{3}[\mathrm{Log}\,E - 11{,}8]$ Función dada.

$\frac{dM}{dE} = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{E\,\mathrm{Ln}\,10} - 0\right] = \frac{2}{3E\,\mathrm{Ln}\,10}$ Se deriva.

$\left.\frac{dM}{dE}\right|_{E=100} = \frac{2}{3(100)\,\mathrm{Ln}\,10} \approx 2 \times 10^{-3}\,\mathrm{erg}^{-1}$ Se evalúa en $E = 100$.

Finalmente, la tasa de cambio instantánea cuando $E = 100$ erg es 2×10^{-3} erg^{-1}.

4. La desintegración del polonio en función del tiempo satisface la función $m(t) = m_0 e^{-0{,}005t}$ donde t se mide en días, m en miligramos (mg) y m_0 es la masa inicial. Encontrar la rapidez con que se desintegra el polonio después de 10 días si inicialmente hay 300 mg de material.

La rapidez con que se desintegra el material, se obtiene derivando $m(t)$, respecto a t. Esto es:

$m(t) = m_0 e^{-0{,}005t}$ Función dada.

$\frac{dm}{dt} = (-0{,}005)\,m_0 e^{-0{,}005t}$ Se deriva.

$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{t=10} = -(0{,}005)(300)e^{-0{,}005(10)}$ Se remplaza la masa inicial y se evalúa en $t = 10$.

$= -1{,}5e^{-0{,}05} \approx -1{,}43$ mg/día Se efectúan las operaciones.

Finalmente, la rapidez aproximada es de $-1{,}43$ mg/día. El signo menos indica que el material está disminuyendo.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Explica, con tus palabras y mediante un ejemplo, cómo se obtiene la derivada de:

136. Una función logarítmica.

137. Una función exponencial.

Determina si las afirmaciones son falsas o verdaderas. Justifica tu respuesta.

138. Si $y = \text{Ln } x$, entonces, $y' = \frac{1}{x}$.

139. Si $y = \text{Ln } e$, entonces, $y' = 1$.

140. Si $y = a^e$, entonces, $y' = 0$.

141. Si $y = \text{Ln}(x + 5)$, entonces, $y' = \frac{1}{x + 5}$.

Determina la derivada de cada una de las siguientes funciones.

142. $y = \text{Log}_4 (5x^3 + 6)$

143. $y = \text{Ln}\left(\frac{x^4 - 5x}{x^3 + 6}\right)$

144. $y = \text{Log}_2\left(\frac{x^3 + 4x^2 - 1}{5x^3 + x}\right)$

145. $y = \text{Log}_3 x \cdot \text{Log}_6 x$

146. $y = \text{Log}_3\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^{\text{Ln } 3}$

147. $y = 3^{\text{Log}_3 x}$

148. $y = \frac{e^{3x + 4}}{e^{4x - 2}}$

149. $y = 2^{\sqrt{x + 1}} + 3^{\sqrt{x + 2}}$

150. $y = e^{(x^3 - x)(x + 7)}$

151. $y = e^{-x^4} + x^{4e}$

Aplica las propiedades de logaritmo. Luego, determina la derivada de cada función.

152. $y = \text{Ln}\left(\frac{x^{10}\sqrt{x^2 + 5}}{(8x^3 + 2)^8}\right)$

153. $f(x) = \text{Ln}\left(\sqrt{\frac{(2x + 1)(3x + 2)}{4x + 3}}\right)$

154. $y = \text{Ln}\left(60x^6\sqrt{x - 1}\sqrt[3]{x^2 - 2}\right)$

Lee y resuelve.

La concentración en el instante t de un medicamento que se inyecta en el torrente sanguíneo se expresa con la función $C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$ donde K, a y b son constantes.

155. Determina la rapidez con que el medicamento se disipa en la circulación.

156. ¿Cuándo esta rapidez es igual a cero?

Lee y responde.

El tiempo que gasta un avión en subir hasta una altura h se define por la función

$$t = 35\,\text{Log}\left(\frac{35.000}{35.000 - h}\right)$$

donde t se mide en minutos y h en pies y 35.000 es la altura máxima del avión.

157. ¿Cuál es la tasa de cambio de t respecto a h, cuando $h = 18.000$?

158. Cuando el avión se acerca a su altitud máxima, ¿qué puede decirse del tiempo que necesita para ascender?

Lee y resuelve.

Las señales para la comunicación entre las abejas están en el intervalo de frecuencias de 0 a 500 hercios. Estos sonidos se generan cuando mueven las alas. La velocidad a la que las abejas deben mover las alas depende de la frecuencia de la señal y se expresa mediante la función $v(f) = \frac{956}{10}e^{0,0049f}$, donde v es la velocidad del aire cerca de las alas en milímetros por segundo.

159. Determina la tasa de cambio de v respecto a f cuando $f = 100$ Hz y $f = 200$ Hz.

160. ¿Qué significado tienen los resultados obtenidos?

Lee y resuelve.

Una partícula se desplaza a lo largo de una recta y su posición en cualquier instante de tiempo se define por la función $s(t) = A \cdot 3^{kt} + B \cdot 3^{-kt}$, donde A y B son constantes y $k = 1$, s se mide en metros y t en segundos.

161. Demuestra que la aceleración es proporcional a s.

162. Determina la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $\left(1, 3A + \frac{B}{3}\right)$.

3.3 Derivada de funciones trigonométricas

Derivada de la función seno

Ampliación multimedia

Si $f(x) = \text{sen } x$, entonces, $f'(x) = \cos x$.

Recuerda que...

$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Para demostrar la regla de la derivada de la función $f(x) = \text{sen } x$, se sigue:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h}$$
Definición de la derivada de una función.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } x \cdot \cos h + \text{sen } h \cdot \cos x - \text{sen } x}{h}$$
Se aplica $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha$.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } x(\cos h - 1) + \text{sen } h \cdot \cos x}{h}$$
Se factoriza.

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\text{sen } x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \cdot \text{sen } h}{h} \right]$$
Se distribuye.

$$= \lim_{h \to 0} \text{sen } x \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \frac{\text{sen } h}{h}$$
Se aplica límite de una suma.

$$= \text{sen } x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } h}{h}$$
Se aplica límite de una función por un múltiplo constante.

$$= \text{sen } x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

Finalmente, si $f(x) = \text{sen } x$, entonces, $f'(x) = \cos x$.

Derivada de la función coseno

Si $f(x) = \cos x$, entonces, $f'(x) = -\text{sen } x$.

Al igual que el caso anterior, por medio de la definición de derivada, se obtiene la derivada de la función coseno.

$f(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$$
Definición de la derivada de una función.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \text{sen } h \cdot \text{sen } x - \cos x}{h}$$
Se aplica $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \text{sen } h \cdot \text{sen } x}{h}$$
Se factoriza.

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \frac{\text{sen } x \cdot \text{sen } h}{h} \right]$$
Se distribuye.

$$= \lim_{h \to 0} \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h \to 0} \text{sen } x \frac{\text{sen } h}{h}$$
Se aplica límite de una resta.

$$= \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \text{sen } x \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } h}{h}$$
Se aplica límite de una función por un múltiplo constante.

$$= \cos x \cdot 0 - \text{sen } x \cdot 1 = -\text{sen } x$$

Finalmente, si $f(x) = \cos x$, entonces, $f'(x) = -\text{sen } x$.

Matemáticamente

¿Cómo se obtiene la derivada de $y = \cos x$ si $\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$? Explica tu respuesta.

EJEMPLOS

1. Determinar la derivada de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \left[\dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}\right]^2$

$f(x)$ es una función compuesta, entonces, por regla de la cadena se obtiene:

$$f'(x) = 2\left[\frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}\right]\left[\frac{\operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x) - (1 + \cos x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}\right]$$ Se aplica la regla de la cadena.

$$f'(x) = 2\left[\frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}\right]\left[\frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right]$$ Se eliminan signos de agrupación.

$$f'(x) = 2\left[\frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}\right]\left[\frac{-(1 + \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}\right]$$ Se simplifican términos mediante identidades trigonométricas.

$$f'(x) = -2\left[\frac{(1 + \cos x)^2}{\operatorname{sen}^3 x}\right]$$ Se multiplica.

Finalmente, si $f(x) = \left[\dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}\right]^2$, entonces, $f'(x) = -2\left[\dfrac{(1 + \cos x)^2}{\operatorname{sen}^3 x}\right]$.

b. $y = \cos(\operatorname{Ln}(x^2 - 1))$

$$y' = -\operatorname{sen}(\operatorname{Ln}(x^2 - 1))\cdot\left(\frac{1}{x^2 - 1}\right)\cdot 2x$$ Se aplica la regla de la cadena.

$$y' = -\frac{2x\cdot\operatorname{sen}(\operatorname{Ln}(x^2 - 1))}{x^2 - 1}$$ Se multiplica.

c. $y = \cos^3(4x^2)$

$y = [\cos(4x^2)]^3$ Se expresa como función compuesta.

$y' = 3[\cos(4x^2)]^2(-\operatorname{sen}(4x^2))(8x)$ Se aplica la regla de la cadena.

$y' = -24x\cdot\cos^2(4x^2)\cdot\operatorname{sen}(4x^2)$ Se multiplica.

Finalmente, si $y = \cos^3(4x^2)$, entonces, $y' = -24x\cdot\cos^2(4x^2)\cdot\operatorname{sen}(4x^2)$.

2. Un yate que flota en el océano atado a un muelle describe un movimiento armónico simple. El desplazamiento se expresa por la función $y(t) = 0{,}5\cdot\operatorname{sen}(8\pi t + 6)$, donde y está en centímetros y t en minutos. Determinar la rapidez con que se mueve el yate hacia arriba o hacia abajo en 8 min.

La rapidez se obtiene derivando $y(t)$, entonces, mediante la regla de la cadena se tiene:

$y'(t) = 0{,}5\cdot\cos(8\pi t + 6)(8\pi)$ Se aplica la regla de la cadena.

$= 4\pi\cos(8\pi t + 6)$ Se multiplica.

$y'(8) = 4\pi\cos(8\pi(8) + 6)$ Se remplaza $t = 8$.

$= 4\pi\cos(64\pi + 6)$ Se multiplica.

$\approx 12{,}06$ cm/min. Se resuelven las operaciones y se simplifica.

Finalmente, la rapidez es 12,06 cm/min hacia arriba.

Actividad

Recurso imprimible

Derivadas de otras funciones trigonométricas

Las derivadas de las demás funciones trigonométricas se definen así:

Si $f(x) = \tan(x)$, entonces, $f'(x) = \sec^2(x)$

Si $f(x) = \cot(x)$, entonces, $f'(x) = -\csc^2(x)$

Si $f(x) = \sec(x)$, entonces, $f'(x) = \sec(x)\tan(x)$

Si $f(x) = \csc(x)$, entonces, $f'(x) = -\csc(x)\cot(x)$

Para verificar la derivada de las cuatro funciones trigonométricas restantes, se hace uso de las identidades trigonométricas así como de las reglas de derivación establecidas en las secciones anteriores.

Si $f(x) = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, entonces

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2}$$ Se aplica la derivada de un cociente de funciones.

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$ Se multiplica.

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$ Se aplican identidades trigonométricas.

Luego, $f'(x) = \sec^2 x$.

Ahora, si $f(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, entonces

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot 0 - 1 \cdot (-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{0 + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$ Se aplica derivada del cociente de funciones.

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$ Se aplican identidades trigonométricas.

$$= \sec x \cdot \tan x$$

Luego, $f'(x) = \sec x \cdot \tan x$.

Matemática*mente*

Demuestra que si $f(x) = \csc x$, entonces $f'(x) = -\csc(x)\cot(x)$.

EJEMPLOS

Hallar la derivada de cada función.

a. $f(x) = \sec\sqrt{x} \cdot \tan x^2$

$$f'(x) = \sec\sqrt{x}\,(\sec^2 x^2)(2x) + \tan x^2 \left(\sec\sqrt{x}\,\tan\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$f'(x) = 2x\sec\sqrt{x}\,(\sec^2 x^2) + \frac{\tan x^2\left(\sec\sqrt{x}\,\tan\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$$

Finalmente, $f'(x) = 2x\sec\sqrt{x}\,(\sec^2 x^2) + \dfrac{\tan x^2\left(\sec\sqrt{x}\,\tan\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$.

b. $y = \sqrt{1 - \cot x}$

$$y' = \frac{1}{2}(1 - \cot x)^{-\frac{1}{2}}(\csc^2 x) = \frac{\csc^2 x}{2\sqrt{1 - \cot x}}$$

Finalmente, si $y = \sqrt{1 - \cot x}$, entonces, $y' = \dfrac{\csc^2 x}{2\sqrt{1 - \cot x}}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Explica cómo se obtiene la derivada de las siguientes funciones.

163. $h(x) = \cos [u(x)]$

164. $f(x) = \cot x$

165. $k(x) = \csc x$

Encuentra la derivada de cada una de las siguientes funciones.

166. $y = \operatorname{sen} (x^2 + 1)$

167. $f(x) = \sec (x^3 + 5) \cdot \csc (2x^4 + 7x - 2)$

168. $y = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{x \cos x}$

169. $r(\theta) = \cot \theta\, (\theta + \csc \theta)$

170. $f(x) = \dfrac{\tan 2x - 1}{\sec 2x}$

171. $r(\theta) = \cos (\theta^2 + 5) - \tan 3\theta^2 + \cot (\theta^4 + 6)$

172. $y = \tan \sqrt{4x^2 + 7}$

173. $y = \operatorname{Ln} |\sec 8x + \tan 8x|$

174. $y = e^{\frac{\operatorname{sen} 3x}{\cos 2x}}$

175. $y = \dfrac{\sec x + \csc x}{\operatorname{Ln} |\sec x|}$

176. Determina los valores a, b, c en la función $f(x) = (ax + b) \operatorname{sen} x + (cx + d) \cos x$, tales que $f'(x) = x \operatorname{sen} x$. Justifica tu respuesta.

Determina los valores de x, donde las funciones dadas tienen una recta tangente horizontal.

177. $f(x) = x + 2 \cos x$

178. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$

179. $r(\theta) = \theta - \operatorname{sen} \theta$

Lee y resuelve.

Si $f(x) = \cos x$ y m_c es la pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $(x_c, \cos x_c)$, con $x_c = \dfrac{c\pi}{3}$, $c = 0, 1, 2, 3$, encuentra:

180. m_c para x_0

181. m_c para x_1

182. m_c para x_2

183. m_c para x_3

184. Ordena en forma ascendente los resultados obtenidos en los puntos 180 a 184.

Halla la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

185. $y = 4 \tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ en $x = \dfrac{1}{2}$.

186. $y = \operatorname{sen} 2x$ en $x = \pi$.

187. $y = 10e^{(-2 \cos x + 5)}$ en $x = 0$.

188. $y = \sec^2 x - 1$ en $x = \pi$.

Lee y resuelve.

Una partícula describe un movimiento armónico simple y su ecuación de movimiento se define como $s(t) = 3 \cos t + 2 \operatorname{sen} t$, donde s se mide en centímetros y t en segundos.

189. Determina la velocidad y la aceleración en cualquier instante t.

190. ¿Cuándo es máxima la magnitud de la velocidad?

191. ¿Cuándo pasa la masa por la posición de equilibrio?

192. ¿Cuál es la posición, velocidad y aceleración en el instante $t = \dfrac{\pi}{3}$.

193. ¿En qué dirección se desplaza en ese instante?

Lee y responde.

El crecimiento de una población de insectos está dado por la función $p(t) = e^{(5 - 2 \operatorname{sen} t)}$ donde P determina el crecimiento en cierto número de individuos en t años.

194. ¿Cuál es la tasa de variación instantánea?

195. ¿Cuál es la rapidez con la que crece la población al cabo de 4 años?

El desgaste de un motor se representa mediante la función $d(t) = 6e^{-\tan(t^2 + \sqrt{t})}$, donde t está en años.

196. Halla la variación instantánea de $d(t)$ cuando el motor tiene 30 meses de funcionamiento.

197. Determina con qué rapidez se desgasta el motor en los primeros 5 años.

198. ¿Es posible que el motor funcione para siempre? Explica tu respuesta.

4. Derivación implícita

Actividad

Generalmente, las funciones están escritas de la forma $y = f(x)$, lo que significa que y está definida en forma explícita respecto de x. Sin embargo, expresiones como:

$$x^2 - xy = 1,\ x^3y^3 + xy = x + y,\ y^2 = \text{Ln}\, xy$$

Relacionan a las variables x y y de tal manera que no definen a y explícitamente. A este tipo de expresiones se les llama **funciones implícitas** y su notación, en general, es $F(x, y) = 0$.

En algunas de estas ecuaciones se puede despejar y, mientras que en otras no es posible. Sin embargo, la derivada de este tipo de funciones se puede calcular mediante el método de derivación implícita.

La **derivación implícita** es un proceso en el que se supone que y es una función derivable de x, y que utiliza la regla de la cadena.

Para derivar implícitamente una expresión se realizan los siguientes pasos:

Primero, se halla la derivada con respecto a x de la expresión implícita dada.

Luego, se asocian en un solo miembro de la igualdad todos los términos que contienen $\frac{dy}{dx}$ o se agrupan en un solo miembro de la igualdad los términos que contienen dy y, en el otro miembro, los términos que contienen dx.

Finalmente, se despeja $\frac{dy}{dx}$.

EJEMPLOS

1. Determinar la derivada de las siguientes funciones, mediante derivación implícita.

a. $x^2y - 2y = x^3 - 1$

$$\left[2xy + x^2\frac{dy}{dx}\right] - 2\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad \text{Se deriva.}$$

$$x^2\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2xy \quad \text{Se agrupan términos.}$$

$$\frac{dy}{dx}[x^2 - 2] = 3x^2 - 2xy \quad \text{Se factoriza.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2xy}{x^2 - 2} \quad \text{Se despeja } \frac{dy}{dx}.$$

b. $2x^2 + 3xy + y^2 - 6y = 5$

$$[4x] + \left[3y + 3x\frac{dy}{dx}\right] + \left[2y\frac{dy}{dx}\right] - \left[6\frac{dy}{dx}\right] = 0 \quad \text{Se deriva.}$$

$$3x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 6\frac{dy}{dx} = -4x - 3y \quad \text{Se agrupan los términos.}$$

$$\frac{dy}{dx}[3x + 2y - 6] = -4x - 3y \quad \text{Se factoriza.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x - 3y}{3x + 2y - 6} \quad \text{Se despeja } \frac{dy}{dx}.$$

2. **Determinar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ en el punto (1, 2). Luego, realizar la representación gráfica.**

$$x^2 + xy + y^2 = 7$$ Ecuación de la curva.

$$[2x] + \left[y + x\frac{dy}{dx}\right] + \left[2y\frac{dy}{dx}\right] = 0$$ Se deriva.

$$x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -2x - y$$ Se transponen términos.

$$\frac{dy}{dx}[x + 2y] = -2x - y$$ Se factoriza.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$ Se despeja $\frac{dx}{dy}$.

Luego, $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$.

Ahora, se evalúa la derivada en el punto (1, 2).

$$y' = \frac{-2 \cdot 1 - 2}{1 + 2 \cdot 2} = -\frac{4}{5}$$ Se halla la pendiente de la recta tangente.

Luego, con $m_T = -\frac{4}{5}$ y el punto (1, 2), se halla la ecuación de la recta tangente:

$$y - 2 = -\frac{4}{5}(x - 1)$$ Se aplica la ecuación de la recta.

$$y - 2 = -\frac{4}{5}x + \frac{4}{5}$$ Se resuelven operaciones.

$$y = -\frac{4}{5}x + \frac{14}{5}$$ Se despeja y.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva es $y = -\frac{4}{5}x + \frac{14}{5}$.

Como la recta normal es perpendicular a la recta tangente, entonces, la pendiente de la recta normal es $\frac{5}{4}$.

Luego, con $m_N = \frac{5}{4}$ y el punto (1, 2), se halla la ecuación de la recta normal:

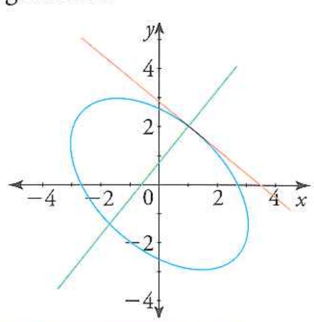
$$y - 2 = \frac{5}{4}(x - 1)$$ Se aplica la ecuación de la recta.

$$y - 2 = \frac{5}{4}x - \frac{5}{4}$$ Se resuelven operaciones.

$$y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$$ Se despeja y.

Por tanto, la ecuación de la recta normal a la curva es $y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$.

Finalmente, la representación gráfica es:



Recuerda que...

La ecuación de la recta con pendiente m y que pasa por el punto (x_1, y_1) es $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Además, la pendiente de una recta perpendicular a la recta de pendiente m es $m_T = -\frac{1}{m}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • E Ejercito • R Razono • S Soluciono problemas

Responde. Explica con un ejemplo.

199. ¿Cómo se expresa una función implícita?

200. ¿Cómo se derivan funciones implícitas?

201. ¿Por qué es necesario utilizar la notación de Leibniz en el cálculo de derivadas implícitas?

E Determina la derivada de cada una de las siguientes funciones implícitas.

202. $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$

203. $xy^2 + x^2y = 3y$

204. $ye^{x^2} + y^5 = x^2y^3$

205. $1 - y = \cos(xy)$

206. $e^{xy} = x + y$

207. $\cos x = x\,1 + \cot y$

208. $\operatorname{Ln}(xy) = e^{\frac{x}{y}}$

209. $y^3 = \dfrac{x - y}{x + 1}$

R Lee y resuelve.

210. Si $f(x) + x^2\,[(f(x))]^3 = 10$ y $f(1) = -2$, determina $f'(1)$.

211. Si $g(x) + x \cos g(x) = x^2$, $g(0) = 0$, determina $g'(0)$.

212. Si $r(t) + \operatorname{Ln} r(t) = 5$, $r(2) = 2$, determina $r'(2)$.

R Lee y resuelve.

213. Determina la ecuación de la recta tangente a la función $x^my^n = k^{m+n}$ en un punto (x_1, y_1) de la curva.

214. Encuentra la ecuación de la recta normal.

215. Demuestra, mediante derivación implícita, que la tangente a la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0) es $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$.

Determina $\dfrac{ds}{dr}$ y $\dfrac{dr}{ds}$ para cada función. Luego, compara los resultados.

216. $\operatorname{sen} r + \cos s + r^2 = sr^3$

217. $\dfrac{2}{3}r^3s^2 + \dfrac{3}{4}r^2s - 2 = 0$

218. $r^2 = \dfrac{5}{4}rs^2$

Determina si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Justifica tu respuesta.

219. $y = x^2 + 5x + 3$ es una función expresada en forma implícita.

220. La derivada de $y - x = xy + 1$, es $y' = -\dfrac{x}{y}$.

221. La recta tangente a la curva $x^2 + xy = 1$, en el punto $(-1, 2)$ es $y = -x + 3$.

222. Si la derivada implícita de $g(x)$ con respecto a x es $y' = \dfrac{x(x-1)}{y}$, entonces,

$g(x)$ es $x^3 + y^3 = x^3$.

R Determina la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

223. $x^2 + xy + y^2 = 3$ en el punto $(1, 1)$

224. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$ en el punto $(1, 2)$

225. $y^2 + x^2 = y^4 - 2x$ en el punto $(-2, 1)$

226. $xy + y^2 = 1$ en el punto $(0, -1)$

Lee y resuelve. Si $x^4 + y^4 = 16$:

227. Aplica derivación implícita para hallar y'.

228. Comprueba que $y'' = -48\dfrac{x^2}{y^7}$.

S Lee y resuelve.

En una estrella, la relación entre su masa y su luminosidad L se expresa como $\operatorname{Log} m = 0{,}05 + 0{,}25 \operatorname{Log} L$.

229. Determina la tasa de variación instantánea de m respecto a L.

La cantidad de esferos producidos por una fábrica se determina mediante la expresión $E = x^{0,3}y^{0,4}$ donde:

E es la cantidad de esferos producidos.

x es la cantidad de empleados

y es el gasto anual en miles de pesos.

230. Halla $\dfrac{dy}{dx}$ cuando $x = 100$ y con nivel de producción de 10.000 esferos.

231. Halla $\dfrac{dx}{dy}$ cuando $y = 100$

232. ¿Se puede interpretar este resultado de la misma forma como se interpreta $\dfrac{dy}{dx}$? ¿Por qué?

4.1 Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

Recurso imprimible

Ampliación multimedia

Las derivadas de las funciones trigonométricas inversas son:

- Si $y = \operatorname{sen}^{-1} x$, entonces, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ si $|x| < 1$ y $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$.
- Si $y = \cos^{-1} x$, entonces, $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ $|x| < 1$ y $0 < y < \pi$.
- Si $y = \tan^{-1} x$, entonces, $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ $x \in \mathbb{R}$ y $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$.
- Si $y = \cot^{-1} x$, entonces, $y' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$ $x \in \mathbb{R}$ y $0 < y < \pi$.
- Si $y = \sec^{-1} x$, entonces, $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ $x < -1, x > 1$ y $0 < y < \pi, y \neq \dfrac{\pi}{2}$.
- Si $y = \csc^{-1} x$, entonces, $y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ $x < -1, x > 1$ y $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}, y \neq 0$.

Para demostrar las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, se aplica la derivación implícita.

$y = \operatorname{sen}^{-1} x$ Función inversa seno.

$\operatorname{sen} y = x$ si $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ Se aplica la función seno.

$\cos y \cdot \dfrac{dy}{dx} = 1$ Se deriva.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos y}$ Se despeja $\dfrac{dy}{dx}$.

Como $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, entonces, $\cos y \geqslant 0$ y $\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ Se remplaza $\cos y$ por $\sqrt{1 - x^2}$.

Finalmente, si $y = \operatorname{sen}^{-1} x$, entonces, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

En forma general, si $y = \operatorname{sen}^{-1} [f(x)]$, entonces, $y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$, siempre que $|f(x)| < 1$.

Para comprobar la derivada de la función $y = \cos^{-1} x$, se tiene:

$y = \cos^{-1} x$ Función inversa coseno.

$\cos y = x$ si $0 \leqslant y \leqslant \pi$ Se aplica la función de coseno.

$-\operatorname{sen} y \cdot \dfrac{dy}{dx} = 1$ Se deriva.

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\operatorname{sen} y}$ Se despeja $\dfrac{dy}{dx}$.

Como $0 \leqslant y \leqslant \pi$, entonces, $\operatorname{sen} y \geqslant 0$ y $\operatorname{sen} y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$.

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ Se remplaza $\operatorname{sen} y$ por $\sqrt{1 - x^2}$.

Finalmente, si $y = \cos^{-1} x$, entonces, $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Matemáticamente

Demuestra las reglas de las derivadas de las otras funciones trigonométricas inversas.

Recuerda que...

En general, si

$y = \cos^{-1} [f(x)]$

entonces,

$y' = -\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - [f(x)]^2}}$

siempre que $|f(x)| < 1$.

EJEMPLOS

Determinar las derivadas de las siguientes funciones.

a. $f(x) = \tan^{-1}\sqrt{x^2 - 1}$

$f(x) = \tan^{-1}(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ Se expresa la raíz en forma de potencia.

$f'(x) = \dfrac{1}{1 + (\sqrt{x^2 - 1})^2} \cdot \left(\dfrac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}(2x)\right)$ Se aplica regla de la cadena.

$f'(x) = \dfrac{1}{x^2} \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ Se simplifican términos semejantes.

$= \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

Finalmente, si $f(x) = \tan^{-1}\sqrt{x^2 - 1}$, entonces,

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Matemáticamente

¿Cuál es la derivada de la función $y = \tan^{-1}[f(x)]$?

b. $y = x^3 \operatorname{sen}^{-1}(e^{3x})$

$y' = x^3\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - (e^{3x})^2}}\right)(3e^{3x}) + 3x^2 \operatorname{sen}^{-1}(e^{3x})$ Se aplican regla del producto y regla de la cadena.

$y' = \dfrac{3x^3 e^{3x}}{\sqrt{1 - e^{6x}}} + 3x^2 \operatorname{sen}^{-1}(e^{3x})$ Se eliminan signos de agrupación.

Finalmente, si $y = x^3 \operatorname{sen}^{-1}(e^{3x})$, entonces,

$$y' = \frac{3x^3 e^{3x}}{\sqrt{1 - e^{6x}}} + 3x^2 \operatorname{sen}^{-1}(e^{3x}).$$

c. $f(x) = \csc^{-1}\left(\dfrac{x}{x - 4}\right)$ Se aplican la regla de la cadena y la regla del cociente.

$$f'(x) = -\frac{1}{\left(\frac{x}{x-4}\right)\sqrt{\left(\frac{x}{x-4}\right)^2 - 1}} \cdot \frac{(x - 4)(1) - x(1)}{(x - 4)^2}$$

$$= -\frac{1}{\left(\frac{x}{x-4}\right)\sqrt{\frac{x^2}{(x-4)^2} - 1}} \cdot \frac{(x - 4 - x)}{(x - 4)^2}$$ Se efectúan las operaciones indicadas.

$$= -\frac{1}{\left(\frac{x}{x-4}\right)\frac{\sqrt{8x - 16}}{(x - 4)}} \cdot \frac{(-4)}{(x - 4)^2}$$ Se extrae raíz cuadrada y se resta.

$$= \frac{(x - 4)^2}{2x\sqrt{2x - 4}} \cdot \frac{4}{(x - 4)^2}$$ Se simplifican los factores.

$$= \frac{2}{x\sqrt{2x - 4}}$$ Se multiplica y se simplifica.

Finalmente, si $f(x) = \csc^{-1}\left(\dfrac{x}{x - 4}\right)$, entonces,

$$f'(x) = \frac{2}{x\sqrt{2x - 4}}.$$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Responde.

233. ¿Cómo se obtiene la regla de la derivada de la inversa de la función seno?

234. ¿Cuál es la derivada de $y = \tan^{-1}[f(x)]$?

235. ¿Cuál es la derivada de $y = \sec^{-1}(x)$?

Relaciona cada función con su correspondiente derivada.

236. $\tan^{-1}(x-1)^2$	a. $f'(x) = -\dfrac{2x-2}{(x-1)^4+1}$
237. $\operatorname{sen}^{-1}(x-1)^2$	b. $f'(x) = \dfrac{2x+2}{1+(x+1)^4}$
238. $\cos^{-1}(x-1)^2$	c. $f'(x) = \dfrac{2x-2}{\sqrt{1-(x-1)^4}}$
239. $\tan^{-1}(x+1)^2$	d. $f'(x) = \dfrac{2x-2}{(x-1)^4+1}$
240. $\cot^{-1}(x+1)^2$	e. $f'(x) = -\dfrac{2x+2}{1+(x+1)^4}$
241. $\cot^{-1}(x-1)^2$	f. $f'(x) = \dfrac{2-2x}{\sqrt{1-(x-1)^4}}$

Determina la derivada de cada una de las siguientes funciones.

242. $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(4x^2+3)$

243. $f(x) = \csc^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x^2+2x+3}\right)$

244. $y = \operatorname{arcsen}^2(x^3-4x^2+5x+3)$

245. $f(x) = \dfrac{\tan^{-1}(x+4)}{\operatorname{sen}^{-1}(x+4)}$

246. $f(x) = \dfrac{5}{3}\operatorname{sen}(x^2+4) + \operatorname{sen}^{-1}(x^2+4)$

247. $f(x) = \sec^{-1}(4x^2+5x)$

248. $f(x) = \operatorname{Ln}[\cos^{-1}(x+4)]$

249. $y^2 = \sec^{-1}\sqrt{xy}$

250. $f(x) = \tan^{-1}(e^{4x+2})$

251. $y = \operatorname{Ln}\left(\dfrac{\tan^{-1}(x^2)}{\cot^{-1}(x^2)}\right)$

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto dado.

252. $y = \operatorname{sen}^{-1}x^2$ en $x = \dfrac{1}{2}$

253. $y = \cot^{-1}(x+2)$ en $x = \dfrac{1}{4}$

254. $y = \sec^{-1}(x+3)$ en $x = 2$

Determina si la ecuación dada corresponde a la recta normal a la curva en el punto dado. Justifica tu respuesta.

255. $f(x) = \cos^{-1}(x-2)$ en $x = 2$. Ecuación de la recta normal $-x + y - 2 = 0$.

256. $f(x) = \tan^{-1}(x+3)$ en $x = 1$. Ecuación de la recta normal $x + 4y - 3 = 0$.

257. $f(x) = \sec^{-1}(x-1)$ en $x = 0$. Ecuación de la recta normal $-x + 3y - 4 = 0$.

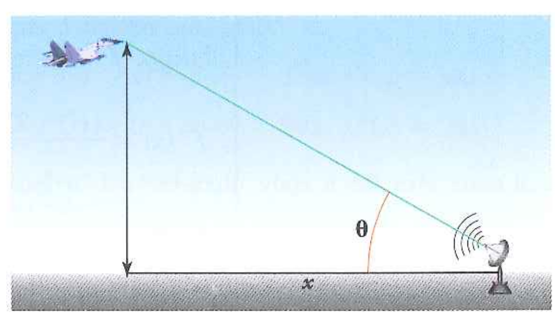
Lee y resuelve. A medida que la Luna gira alrededor de la Tierra, la cara que da a la Tierra está parcialmente iluminada por el Sol. Las fases de la Luna muestran qué tanto de su superficie está iluminada por el Sol. La fracción F del disco lunar que está iluminada cuando el ángulo entre el Sol, la Luna y la Tierra es θ se define como $F = \dfrac{1}{2}(1 - \cos\theta)$.

258. Expresa a θ como una función de F.

259. Determina la rapidez con que cambia θ cuando $F = 0$ (luna nueva), $F = 0{,}25$ (cuarto creciente), $F = 0{,}5$ (cuarto creciente o cuarto menguante), $F = 1$ (luna llena).

260. Determina los ángulos θ para cada una de las fases lunares.

Lee y resuelve. Un avión que viaja a 3,5 km de altitud se acerca a una estación de radar como se muestra en la figura.



261. Expresa el ángulo de elevación θ del avión en función de la separación horizontal x entre el avión y la estación de radar.

262. ¿Cuál es la tasa de cambio de θ respecto a x, cuando x está a 1; 0,5 y 0,25 millas de la estación de radar?

263. ¿Cómo interpretarías los resultados anteriores?

Actividad

5. Derivadas de orden superior

Recurso imprimible | Ampliación multimedia

El proceso de derivación se puede aplicar en forma secuencial, siempre y cuando la derivada de la nueva función exista. Así, si $f(x)$ es derivable, entonces, $f'(x)$ se denomina **primera derivada** de $f(x)$. De igual forma si $f'(x)$ es derivable, entonces, $f''(x) = (f'(x))'$ se denomina **segunda derivada**. De este modo se pueden obtener derivadas de orden superior, derivando sucesivamente la función $f(x)$.

En general, la derivada enésima de una función se expresa como $f^{(n)}(x)$, donde n indica el número de veces que se deriva $f(x)$.

Historia de las matemáticas

La función cuadrática y la parábola

Joseph Louis Logrange en 1754 publicó su primer trabajo en matemáticas, relacionado con las derivadas sucesivas del producto de funciones.

EJEMPLOS

1. Determinar $y^{(n)}$ de la función $y = 4x^3 - x^2 + 2x - 7$.

$y' = 12x^2 - 2x + 2$ Primera derivada.

$y'' = 24x - 2$ Segunda derivada.

$y''' = 24$ Tercera derivada.

$y^{(4)} = 0$ Cuarta derivada.

La cuarta derivada de la función es cero y como la derivada de cero es cero, entonces, todas las derivadas de orden superior a cuatro son cero.

Por tanto, la enésima derivada de f es cero si $n \geq 4$, es decir, $y^{(n)} = 0$.

2. Obtener la segunda derivada de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 2}$.

$$f'(x) = \frac{(x^3 - 2)(1) - x(3x^2)}{(x^3 - 2)^2}$$ Se aplica regla del cociente.

$$f'(x) = \frac{(x^3 - 2) - 3x^3}{(x^3 - 2)^2}$$ Se multiplica.

$$= \frac{-2x^3 - 2}{(x^3 - 2)^2}$$ Se reducen términos semejantes.

Luego, $f'(x) = \dfrac{-2x^3 - 2}{(x^3 - 2)^2}$. Ahora, se deriva $f'(x)$.

$$f''(x) = \frac{(x^3 - 2)^2(-6x^2) - (-2x^3 - 2)(2)(x^3 - 2)(3x^2)}{(x^3 - 2)^4}$$ Se aplica regla del cociente.

$$f''(x) = \frac{-6x^2(x^3 - 2)^2 - 6x^2(-2x^3 - 2)(x^3 - 2)}{(x^3 - 2)^4}$$ Se multiplica.

$$= \frac{-6x^2(x^3 - 2)[(x^3 - 2) + (-2x^3 - 2)]}{(x^3 - 2)^4}$$ Se factoriza.

$$f''(x) = \frac{-6x^2(x^3 - 2)[x^3 - 2 - 2x^3 - 2]}{(x^3 - 2)^4}$$ Se simplifica.

$$= \frac{-6x^2(-x^3 - 4)}{(x^3 - 2)^3}$$

Finalmente, la segunda derivada es $f''(x) = \dfrac{6x^2(x^3 + 4)}{(x^3 - 2)^3}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Responde.

264. ¿Cómo se obtiene la tercera derivada de una función?

265. ¿Cuál es la quinta derivada de $f(x)=e^x$?

Halla $f''(x)$ para cada una de las siguientes funciones.

266. $f(x) = \operatorname{sen}(x^3)$

267. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+3}$

268. $y = x^3 - 4x^2 + \cos 2x$

269. $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

270. $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x - 1}$

271. $f(x) = \dfrac{1}{1+\cos^2 x}$

272. $f(x) = e^{4x} + \operatorname{Ln} 2x$

273. $y = x^3 \operatorname{Ln} x$

274. $f(x) = \tan x \cdot \cot x$

275. $y = \operatorname{Ln}\sqrt{x-1}$

276. $f(x) = \sec\sqrt{x}$

Determina si cada una de las afirmaciones es falsa o verdadera. Justifica tu respuesta.

277. La tercera derivada de $f(x) = 4 \operatorname{sen} x$ es $f'''(x) = -4 \operatorname{sen} x$.

278. Si $f(x) = 2e^x$, entonces, $f'(x) = f''(x) = 2e^x$.

279. Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, entonces, $f^{(4)}(x) = 0$.

280. Si $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, entonces,
$$f^{(n)}(x) = -\frac{2x(n)}{(1+x^2)^{2n}}.$$

281. Si $f(x) = x^e$, entonces, $f^{(n)}(x) = ex^{e-n}$

282. Si $f(x)$ es un polinomio de grado n, entonces, $f^{(n+1)}(x) = 0$

Encuentra una fórmula para la enésima derivada de cada función.

283. $f(x) = \operatorname{Ln} x$

284. $f(x) = \operatorname{sen}(nx)$

285. $f(x) = x^n$

286. $f(x) = e^{ax}$, a constante

287. Copia y completa la siguiente tabla en tu cuaderno.

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$
$y = \cos \pi x$			
	$3 - x^2$		
		$x - 8$	
			$-1 + x$

Encuentra el mayor entero n tal que $f^{(n)}(x) \neq 0$ en cada una de las siguientes funciones.

288. $f(x) = x^2 + 5x$

289. $f(x) = \dfrac{2}{3}x^5 + 6x^4 + x$

290. $f(x) = \dfrac{1}{2} - x^5 + 6x^6$

291. $f(x) = ax^2 + bx + c$

292. $f(x) = x^8 + 7x^4 + 6x^2 + 1$

Halla la derivada que se indica en cada caso.

293. $f''(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^3}$

294. $f''(x)$ si $f(x) = \sqrt[5]{x^2-1}$

295. $f^{(4)}(x)$ si $f(x) = \operatorname{sen} 5x$

296. $f^{(3)}(x)$ si $f(x) = x\cos x$

297. $f^{(3)}(x)$ si $f(x) = \dfrac{e^x}{\operatorname{sen} x}$

Determina una función $f(x)$ que cumpla las condiciones dadas en cada caso.

298. $f''(x) = x^2 - 1$

299. $f''(x) = 0$

300. $f'''(x) = \operatorname{sen} x$

301. $f'''(x) = 24x$

Resuelve. Un vehículo viaja a 60 m/s cuando se aplican los frenos. La posición del vehículo está dada por la función $s(t) = -8{,}25t^2 + 60t$, donde s se mide en metros y t en segundos.

302. Usa la función para completar la tabla en cada instante de tiempo.

t	1	2	3	4
$s(t)$				
$v(t)$				
$a(t)$				

EJERCICIOS PARA REPASAR

Reglas de derivación

Determina el valor de k tal que la línea recta sea tangente a la gráfica de la función en el valor indicado para x.

303. $f(x) = x^2 - kx$ recta: $y = 5x - 4$ $x = 2$

304. $f(x) = \frac{k}{x}$ recta: $y = -\frac{3}{4}x + 3$ $x = -1$

Halla la derivada en cada caso, si

$g(3) = -3$, $g'(3) = -2$, $h(3) = -1$, $h'(3) = 6$

305. $f'(3)$ si $f(x) = g(x)h(x)$

306. $f'(3)$ si $f(x) = 2g(x) + h(x)$

307. Demuestra que $\frac{dg}{dx} = \frac{a}{g}$. Si la media geométrica de x y de $x + n$ es $g = \sqrt{x(x+n)}$ y la media aritmética es $a = \frac{x + (x+n)}{2}$.

Encuentra la derivada que se indica, si las funciones $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = x^2 + 3x - 4$, $h(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{4}{5}$.

308. $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot h(x))$

309. $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x) + h(x))$

310. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)} + h(x)\right)$

311. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)} \cdot h(x)\right)$

Aplica las reglas de derivación para determinar la derivada de cada función.

312. $f(x) = (7x^3 - 8x^2 + 15x - 1)(2\sqrt[3]{x} + \sqrt{5})$

313. $g(x) = \frac{3\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt[4]{x^3} - 6\sqrt[3]{x}}$

314. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la función $h(x) = \left(\frac{3}{4}x^2 - 1\right)(5x^3 - 2x)$ en el punto $(0, 0)$.

315. Encuentra una parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pase por el punto $(1, 4)$ y cuyas pendientes de las rectas tangentes en $x = 1$ y $x = 5$ sean 6 y -2, respectivamente.

Derivada de funciones compuestas

Determina la derivada de las siguientes funciones compuestas.

316. $f(x) = (5x^6 - 4x^5 + 8x^3 + 12x^2 - 9)^{\frac{1}{4}}$

317. $h(x) = \left[\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right]^2$

318. Si la derivada interna de tres funciones $s(x)$, $t(x)$ y $m(x)$ es $2x + 4$, escribe la expresión algebraica que determina a $s(x)$, $t(x)$ y $m(x)$, si las tres funciones son distintas.

Derivada de funciones trascendentes

Utiliza la regla de la cadena para encontrar la derivada de cada función.

319. $r(t) = \sqrt{t \operatorname{Ln}(t^4)}$

320. $y = x + \cos^{-1} x^2$

321. $f(x) = (e^{x+4})(\operatorname{Ln}(x^2 + 6x))$

322. $f(x) = \dfrac{7^{(x^2+3x-8)}}{\operatorname{Log}_6(x^2 + 3x + 4)} + 6x^2$

323. $f(x) = \tan\sqrt{4x^2 + 7}$

324. **Resuelve.**

Si $f(x) = (ax + b)$ sen $x + (cx + d)$ cos x, con a, b, c, d constantes. Determina los valores a, b, c, d tales que $f'(x) = xc$ sen x.

325. Determina la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $y = (2 + x)e^{-x}$, en el punto $(0, 2)$.

Derivación implícita

Halla $\dfrac{dy}{dx}$ en cada caso.

326. $9x + 4y = \dfrac{7}{3}x^2y$

327. $9e^{x}y + \operatorname{Ln} xy = 0$

328. $x^2 - y = \cos^2 xy$

Derivadas de orden superior

Halla la derivada que se indica según el caso, si $f(x) = \dfrac{3}{4}$sen $2x$ y $g(x) = 6\cos 3x$.

329. $f^{(10)}(x) =$ ______

330. $f^{(30)}(x) =$ ______

331. $g^{(8)}(x) =$ ______

332. $g^{(31)}(x) =$ ______

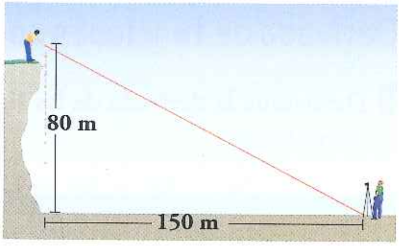
333. **Encuentra $y^{(3)}$ si $x^8 + y^8 = 1$.**

PROBLEMAS PARA REPASAR

En un experimento de caída libre, se deja caer un objeto desde una altura de 80 metros. Si se coloca una cámara en el suelo a 150 metros del punto de impacto para tomar imágenes de la caída del objeto:

¿En qué momento llega al suelo? ¿Cuál es la velocidad en $t = 2$ segundos?

¿Cuál es la tasa de cambio del ángulo de elevación de la cámara cuando $t = 2$ segundos?



Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿En qué momento llega al suelo?

¿Cuál es la velocidad en $t = 2$ segundos?

¿Cuál es la tasa de cambio del ángulo de elevación de la cámara cuando $t = 2$ segundos?

¿Cuáles son los datos del problema?

Se deja caer un objeto desde una altura de 80 metros. A una distancia de 150 m, se ubica una cámara fotográfica.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se determinan las expresiones matemáticas que modelan la situación. Así:

Para identificar la altura del objeto como función del tiempo, se aplican las ecuaciones de movimiento, entonces, de acuerdo con el sistema de referencia, la ecuación es:

$y(t) = 80 - 4{,}9t^2$ Se aplica $y(t) = y_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$.

Ahora, para expresar el ángulo de elevación como una función del tiempo, se utiliza la razón trigonométrica tangente, así:

$$\tan\theta = \frac{y(t)}{150}$$ Se aplica $\tan\theta$.

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left[\frac{y(t)}{150}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{80 - 4{,}9t^2}{150}\right]$$ Se despeja θ y se remplaza $y(t)$.

Segundo, el instante en que el cuerpo llega al suelo, se obtiene cuando $y(t) = 0$.

$80 - 4{,}9t^2 = 0$ entonces, $t = \sqrt{\frac{80}{4{,}9}} \approx 4{,}04$ s

Tercero, para obtener la velocidad y la tasa de cambio del ángulo de elevación, se deriva $y(t)$ y $\theta(t)$.

$y'(t) = v(t) = 0 - 9{,}8t = -9{,}8t$

$v(2) = -9{,}8(2) = -19{,}6$ m/s Se evalúa en $t = 2$ s.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + \left(\frac{80 - 4{,}9t^2}{150}\right)^2} \cdot \frac{0 - 9{,}8t}{150} = \frac{(150)^2}{(150)^2 + (80 - 4{,}9t^2)^2}\left(\frac{-9{,}8t}{150}\right) = -\frac{1.470t}{(150)^2 + (80 - 4{,}9t^2)^2}$$

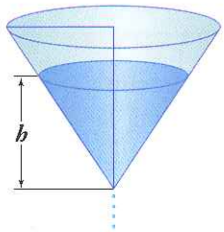
$$\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{t=2} = -\frac{1.470(2)}{(150)^2 + (80 - 4{,}9(2)^2)^2} = -\frac{2.940}{26.148{,}16} = -0{,}112 \text{ rad/s}$$ Se evalúa en $t = 2$ s.

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que las operaciones sean correctas. Luego, se tiene que el cuerpo llega al suelo en 4,04 segundos. La velocidad del objeto en 2 s es $-19{,}6$ m/s, el signo negativo indica que se mueve hacia abajo. La tasa de cambio del ángulo de elevación en 2 s es $-0{,}112$ rad/s, el signo negativo indica que el ángulo está disminuyendo.

Resuelve las preguntas 334 y 335, de acuerdo con la siguiente información.

La altura del agua en un tanque cónico invertido en función del tiempo está definida por la función $h(t) = \sqrt[5]{(243 - t)^2}$, donde h se mide en metros y t en segundos. Si el tanque tiene una fuga de agua en su vértice.



334. ¿Con qué rapidez cambia la altura h cuando $t = 2$ minutos?

____

____

335. ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse?

____

____

Resuelve las preguntas 336 a 338, de acuerdo con la siguiente información.

La posición de una partícula que se mueve en línea recta se define por la función $s(t) = t^3 - 3t^2 + 3t$, donde t se mide en segundos y s en metros.

336. ¿Cuál es la velocidad después de 3 y 6 segundos?

____

____

337. ¿Cuándo la partícula está en reposo?

____

____

338. ¿En qué momento se mueve en dirección positiva?

____

____

Resuelve las preguntas 339 y 340, de acuerdo con la siguiente información.

El costo mensual del inventario de un fabricante satisce la función $C(x) = 2.000\left(\frac{100}{q^2} + \frac{q}{q+50}\right)$, $q > 1$, donde C se mide en pesos y q es el tamaño del pedido cuando se reponen las existencias.

339. ¿Cuál es la tasa de cambio de C respecto a q cuando $q = 100$, $q = 150$ y $q = 200$?

____

____

340. ¿Cómo se interpretarían estos resultados?

____

____

341. Un satélite en la órbita terrestre es atraído por la Tierra con una fuerza $F = G\frac{Mm}{r^2}$, donde G es la constante de gravitación universal.

Si M es la masa de la Tierra, la masa del satélite es $m = 1.000$ kg determina $\frac{dF}{dr}$, cuando $r = 20.000$ km, $r = 10.000$ km, $r = 5.000$ km.

Resuelve las preguntas 342 a 344, de acuerdo con la siguiente información.

La frecuencia de las vibraciones en una cuerda vibrante se expresa por medio de $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\theta}}$, donde L es la longitud de la cuerda, T, la tensión y θ, la densidad lineal.

342. Determina la razón de cambio de la frecuencia con respecto a T.

343. Determina la longitud, cuando T y θ son constantes.

344. Determina la tensión, cuando L y θ son constantes.

345. La posición para una partícula en movimiento armónico está dada por la función

$$y(t) = \frac{1}{4}\cos 8t - \frac{2}{3}\operatorname{sen} 8t.$$

Determina la posición y la velocidad del objeto cuando $t = \frac{\pi}{8}$ segundos.

346. La cantidad M de supermercados que emplean cajas computarizadas en cierto país se define por la función $M(t) = \frac{2.000e^t}{(1.999 + e^t)}$, donde t se mide en años. ¿Cuál es la tasa de cambio de M respecto a t cuando $t = 3$ años?

347. Un rumor se esparce según la ecuación:

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}},$$

donde $P(t)$ es la porción de la población que lo conoce en el instante de tiempo t. a y k son constantes positivas.

Halla la velocidad de esparcimiento del rumor.

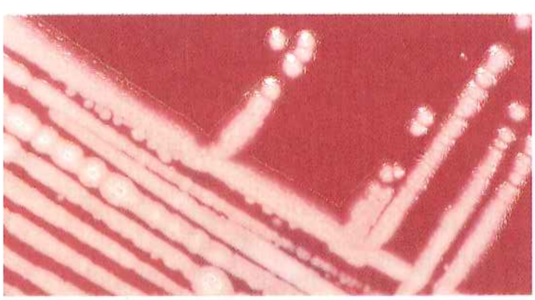
...Para hallar la velocidad de producción de plásticos biodegradables.

Galería de imágenes

Los plásticos biodegradables son aquellos que se fabrican con materias primas que se descomponen fácilmente por medio de agentes biológicos como los microorganismos. Este tipo de plástico también es denominado doblemente verde, porque además de ser biodegradable, también es creado a partir de fuentes renovables de energía como las plantaciones de papas, maíz y trigo.

En la actualidad, este plástico se utiliza en la fabricación de bolsas, empaques y botellas que se encuentran en el mercado actual.

Para la producción de plásticos biodegradables se utilizan algunas bacterias como las *Pseudomonas* y la *Ralstonia eutropha* que se cultivan en condiciones aerobias o anaerobias y que provienen de insumos agrícolas.



Para garantizar una óptima producción de este plástico, se evalúa la cantidad que se produce en función del tiempo de fermentación. Para esto, se utilizan funciones logarítmicas que indican que, a medida que el tiempo pasa, la producción tiende a ser menor, por lo cual se debe mantener bien alimentados los cultivos de bacterias.

Por ejemplo, una expresión que determina la producción de plástico $P(t)$ en gramos por litro g/L es:

$$P(t) = 2{,}567 \cdot \text{Ln}\,(t) + 2{,}343$$

Donde t se mide en horas desde la primera hora.

A partir de esta expresión, se puede obtener la velocidad de producción de plástico biodegradable hallando su derivada.

$$P'(t) = 2{,}567 \cdot \frac{1}{t \cdot \text{Ln}\, e}$$

Y simplificando, se obtiene la expresión:

$$P'(t) = \frac{2{,}567}{t}$$

Esta expresión es importante porque permite conocer en qué momento es necesario alimentar a las bacterias para que no se extingan y se produzca plástico biodegradable continuamente.

1. **¿Por qué es importante la fabricación de plásticos biodegradables?**
2. **Si la velocidad de producción a la cual debe darse alimento a las bacterias es 0,641 g/L, ¿en cuántas horas se debe realizar este proceso?**
3. **La siguiente expresión muestra la producción de plástico biodegradable en función del tiempo t en horas.**

$$P(t) = 2{,}3 \cdot \text{Ln}\,(t) + 3$$

   a. Traza un bosquejo de la gráfica que representa la producción de plástico desde la primera hora de iniciada la fermentación.

   b. Determina la velocidad de producción cuando han transcurrido cinco horas.

4. **Realiza un cuadro comparativo de las ventajas que tiene la utilización de envases biodegradables frente a la utilización de aquellos envases fabricados mediante procesos químicos.**

Trabaja con Microsoft Mathematics

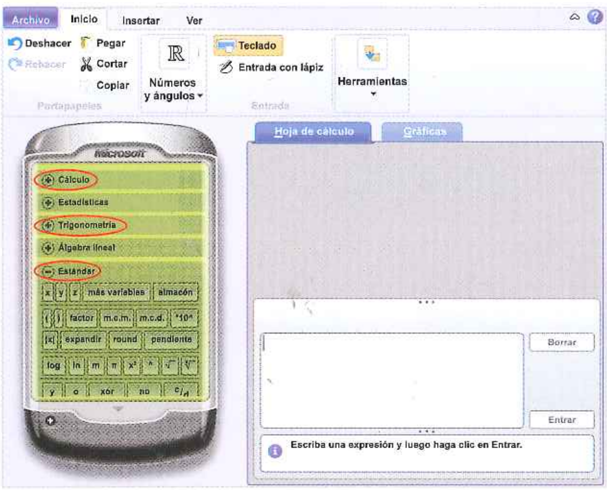
Objetivo: calcular la derivada de funciones polinómica, racional, con radical y trascendentales.

Descripción: hallar la derivada de una función polinómica, racional, con radical y trigonométrica.

Para acceder a Microsoft Mathematics, ingresa y descarga el programa en: www.microsoft.com/download/en/search.aspx?q=Math

1. Haz clic en Microsoft Mathemathics.

2. Observa la ventana que se despliega. Luego, reconoce el menú y las herramientas, como se muestra en la figura.

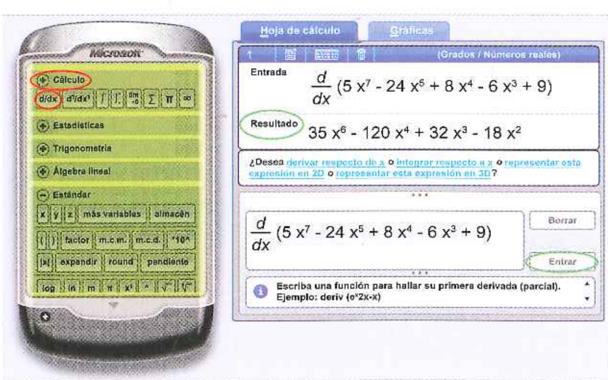


3. Para hallar la derivada de la función polinómica $y = 5x^7 - 24x^5 + 8x^4 - 6x^3 + 9$, selecciona la herramienta ***d/dx*** ubicada en **Cálculo**.

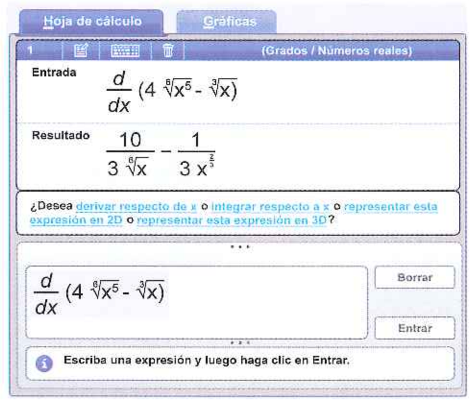
   Luego, escribe la función.

   Después, haz clic en **Entrar**.

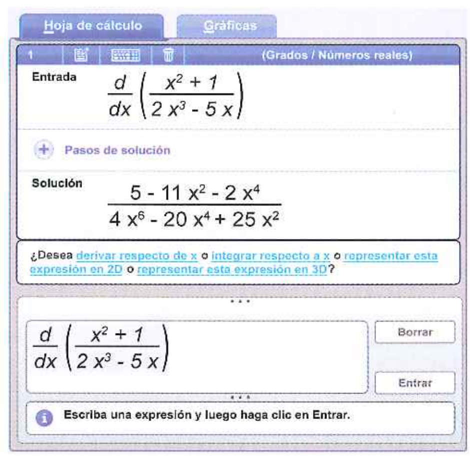
   Finalmente, observa la derivada en **Resultado**, como se muestra en la figura.



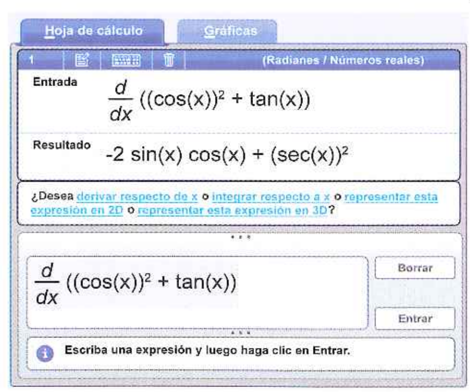
4. Repite el paso 3, para encontrar la derivada de $y = 4\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[3]{x}$, como se muestra en la figura.



5. Repite el paso 3, para encontrar la derivada de $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x^3 - 5x}$, como se muestra en la figura.



6. Repite el paso 3, para encontrar la derivada de $y = \cos^2 x + \tan x$, como se muestra en la figura.



6 Aplicaciones de la derivada

Estándares: pensamientos numérico y variacional

Tu plan de trabajo...

- Utilizar esquemas o problemas conocidos en la **aplicación a problemas de optimización.**
- **Aplicar la derivada** en la solución de problemas de otras áreas del conocimiento.
- **Aplicar los teoremas básicos de la derivada** en diversas funciones.
- Elaborar **gráficas de funciones mediante los criterios de la derivación.**

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño

- 5 Multimedia
- 1 Galería
- 5 Actividades
- 1 Audio
- 7 Imprimibles
- 2 Enlaces web

Lo que sabes...

1. Dibuja una función $y = f(x)$ que cumpla las condiciones indicadas.
   - Continua en el intervalo $[-3, 6]$.
   - Creciente en el intervalo $[-3, 0)$.
   - Decreciente en el intervalo $[0, 2)$.
   - Creciente en el intervalo $[2, 5]$
2. Determina los siguientes límites.

   a. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$

   b. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{t^2 + t - 1}$
3. Calcula $f'(1)$ en cada una de las siguientes funciones.

   a. $f(x) = 5x - 3$

   b. $f(x) = x^2 - 4$

   c. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x}$

   d. $f(x) = \sqrt{10x^2 - x}$

Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para saber cuándo se pueden consumir los frutos de una cosecha.

Una cosecha se recoge antes de que el fruto esté en el momento de maduración, ya que así se pueden seleccionar, empacar y transportar frutos de mejor calidad, de tal manera que estén aptos para el consumo humano. La maduración de un fruto se obtiene cuando este logra la máxima concentración de fructuosa, es decir, cuando alcanza la máxima concentración de azúcar.

Lee más acerca de este tema en la página 248.

Cronología de las aplicaciones de la derivada

1625 d. C. **Alemania.** Johannes Kepler realizó estudios acerca de los valores máximos y mínimos de una curva.

1629 d. C. **Francia.** Pierre de Fermat postuló un teorema para hallar máximos y mínimos de funciones derivables, en su trabajo *Metudos ade disquiredam maximan and miniman*.

1669 d. C. **Inglaterra.** Isaac Barrow proporcionó un método para obtener la recta tangente a una curva en su obra *Lectiones geometricae* que posteriormente fue utilizado por Newton.

1691 d. C. **Francia.** Michael Rolle estableció el teorema que lleva su nombre, en el cual define que si una curva llega a la misma altura existe por lo menos un punto donde su derivada es cero.

1696 d. C. **Francia.** Guillaume François Antoine, Marqués de l'Hôpital dio a conocer la regla de l'Hôpital en su obra *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, que se utiliza para evaluar límites de funciones indeterminadas.

1797 d. C. **Francia.** Joseph Lagrange postuló el teorema del valor medio, en el cual se analizan las funciones derivables en un intervalo continuo.

1838 d. C. **Francia.** Antoine Augustin Cournot realizó escritos sobre análisis marginal donde introdujo el concepto de derivada a análisis de las ciencias económicas.

1. Análisis gráfico

Ampliación multimedia

Hasta el momento el método utilizado para trazar la gráfica de una función consistía en localizar algunos puntos en el plano cartesiano y luego trazar la curva. Este proceso produce algunas imprecisiones al momento de realizar las curvas, es por esto que en esta unidad se hará uso de la derivada para realizar el trazo más preciso de algunas gráficas. Para ello, se mostrará cómo hallar los máximos y mínimos, se determinará en qué intervalos la función es creciente o decreciente, y en qué intervalos la función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

Historia de las matemáticas

Christiaan Huygens (1629-1695)

Fue el primer matemático en dibujar una función en forma correcta, aplicando las ideas de los puntos máximos y mínimos y el punto de inflexión.

1.1 Valores máximo y mínimo de una función

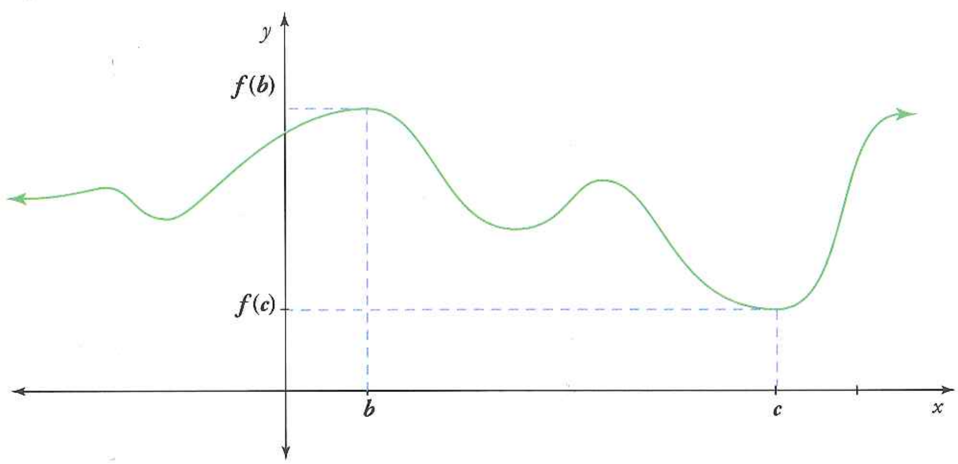
Actividad

Los valores máximo y mínimo de una función reciben el nombre de **extremos de la función**.

Sea f una función definida en un dominio D, y sea c un número real que pertenece a D, entonces:

- $f(c)$ es un **valor máximo absoluto** de f en D si $f(c) \geq f(x)$, para todo x en D.
- $f(c)$ es un **valor mínimo absoluto** de f en D si $f(c) \leq f(x)$, para todo x en D.

Al observar la siguiente gráfica de la función f se puede ver que el máximo absoluto lo tiene en $f(b)$ y el mínimo absoluto lo tiene en $f(c)$.



Extremos relativos de una función

Una función f alcanza un **máximo relativo** en el punto c, si existe un intervalo abierto (a, b), tal que $c \in (a, b)$ y para todo $x \in (a, b)$, $f(x) \leq f(c)$.

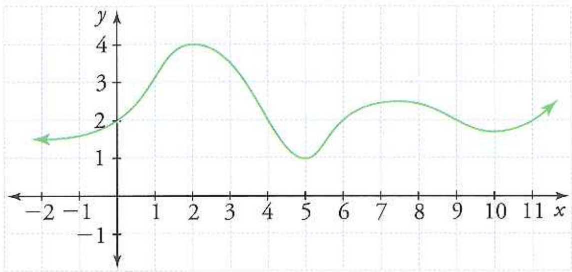
Una función f alcanza un **mínimo relativo** en el punto c, si existe un intervalo abierto (a, b), tal que $c \in (a, b)$ y para todo $x \in (a, b)$, $f(x) \geq f(c)$.

Los máximos relativos de una función f son los valores $f(c)$ que son mayores que los $f(x)$ para todos los $x \neq c$ próximos a c.

Y los mínimos relativos de una función f son los valores $f(c)$ que son menores que los $f(x)$, para todos los $x \neq c$ próximos a c.

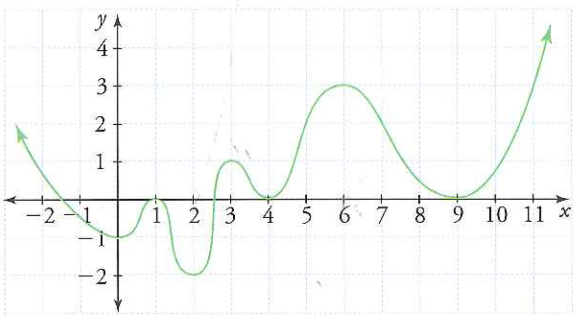
EJEMPLOS

1. Observar la gráfica y determinar los valores máximo absoluto y mínimo absoluto, en el intervalo (0, 9).



La gráfica presenta un máximo absoluto cuando $x = 2$ y su valor es $f(2) = 4$. Es decir, $f(2) \geqslant f(x)$, para todo x en el intervalo (0, 9). Y presenta un mínimo absoluto cuando $x = 5$ y su valor es $f(5) = 1$.

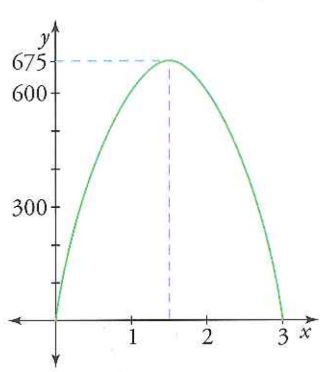
2. Hallar los máximos relativos y los mínimos relativos de la gráfica de la siguiente función en el intervalo (−2; 3,5).



En este intervalo la función presenta dos máximos relativos en $x = 1$ y en $x = 3$, cuyos valores correspondientes son $f(1) = 0$ y $f(3) = 1$. Y presenta dos mínimos relativos en $x = 0$ y en $x = 2$, cuyos valores correspondientes son $f(0) = -1$ y $f(2) = -2$.

3. La capacidad de concentración de un atleta, que realiza saltos de altura, durante tres horas está dada mediante la función $f(t) = 300t(3 - t)$, donde t representa el tiempo en horas. ¿Cuál es el mejor momento, en términos de capacidad de concentración, para que el atleta pueda batir su propia marca?

La gráfica de la función para las primeras tres horas es:



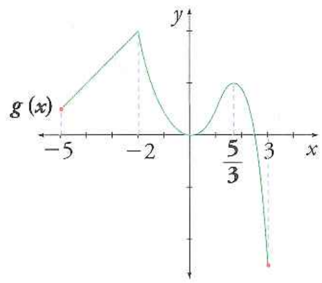
La función corresponde a una parábola con dos ramas hacia abajo.

Luego, como se pregunta por el momento de concentración máxima, se debe hallar el máximo de la función, como su máximo corresponde al vértice (1,5; 675), entonces, se puede afirmar que su capacidad de concentración es máxima a las 1,5 horas, y es en este preciso momento cuando puede batir su propia marca.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Modelo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

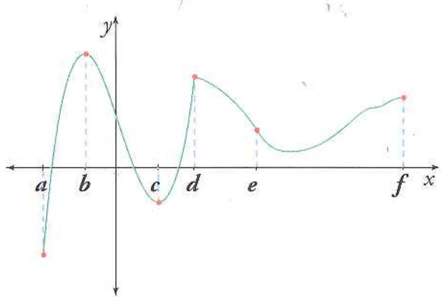
Observa la gráfica de la función $g(x)$, definida en el intervalo $[-5, 3]$. Luego, resuelve.



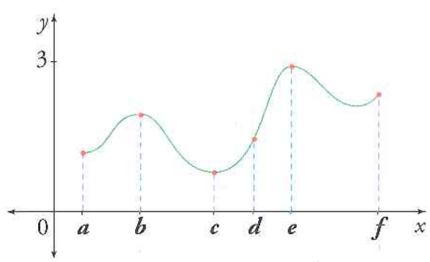
1. Indica las abscisas de los puntos en los que la función tiene el máximo y el mínimo absoluto.
2. Encuentra los extremos relativos de la función $g(x)$.

Clasifica cada uno de los números a, b, c, d, e y f como puntos extremos, puntos relativos o ninguno, a partir de la gráfica de cada función.

3.



4.



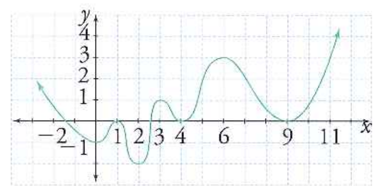
Esboza el gráfico de una función que cumpla las condiciones propuestas en cada caso.

5. En el intervalo $[-4, 4]$ tiene dos mínimos relativos en $x = 0$ y en $x = 2$. Su máximo absoluto está en $x = 1$.
6. Posee un mínimo relativo para el intervalo $[-3, 1]$ cuando $x = -2$ y el mínimo absoluto se encuentra en $x = 0$.
7. Una función definida sobre el conjunto de los números reales que posea infinitos mínimos absolutos pero solo un máximo absoluto.

Realiza la gráfica de cada función. Luego, indica los valores máximo y mínimo y los extremos relativos de cada función según el caso.

8. $y = f(x) = 2 - x^2$ en $[-3, 4]$.
9. $y = g(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4; x > 1 \\ 2x - 3; x \leqslant 1 \end{cases}$ en $[-2, 5]$.
10. $y = h(x) = \text{sen } x$ en $[-2\pi, 3\pi]$.
11. $y = j(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ en $(-5, 5)$.

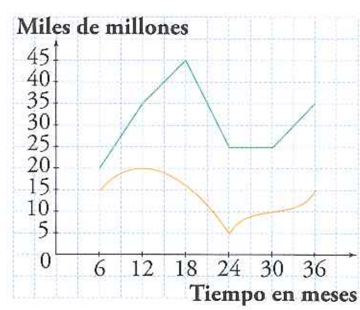
Observa la gráfica de la función. Luego, determina el valor de verdad de cada uno de los siguientes enunciados. Justifica tu respuesta.



12. $x = 6$ representa un máximo relativo para la función en el intervalo $[5, 10]$.
13. La función no posee mínimo absoluto para el intervalo $[-2, 8]$.
14. En $x = 3$ se obtiene el máximo absoluto para el intervalo $[1, 5]$.

Lee y responde.

La siguiente gráfica muestra los ingresos (en verde) y los gastos (en naranja) de una empresa por un período de tres años.



15. ¿En qué momento la empresa obtuvo sus mayores ingresos?
16. ¿En qué momento se produjo el costo más bajo para la empresa?
17. ¿Cuál fue la ganancia que obtuvo la empresa en el punto donde el costo alcanzó su máximo nivel?

1.2 Crecimiento y decrecimiento

Actividad

Cuando se desea trazar la gráfica de una función es necesario conocer en qué intervalos esa función es creciente y en qué intervalos es decreciente.

Una función f es **creciente** en un intervalo I, si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en el intervalo I.

Una función f es **decreciente** en un intervalo I, si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en el intervalo I.

La derivada de una función ayuda a determinar dónde una función es creciente o decreciente, sin necesidad de observar su gráfica.

Si una función $y = f(x)$ es derivable en un intervalo I, se cumple que:

- Si $f'(x) > 0$, para todo $x \in I$, entonces, $f(x)$ es creciente en I.
- Si $f'(x) < 0$, para todo $x \in I$, entonces, $f(x)$ es decreciente en I.
- Si $f'(x) = 0$, para todo $x \in I$, entonces, $f(x)$ es constante en I.

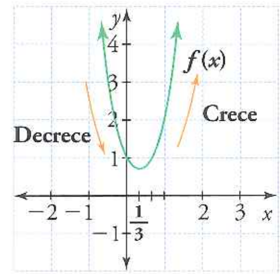
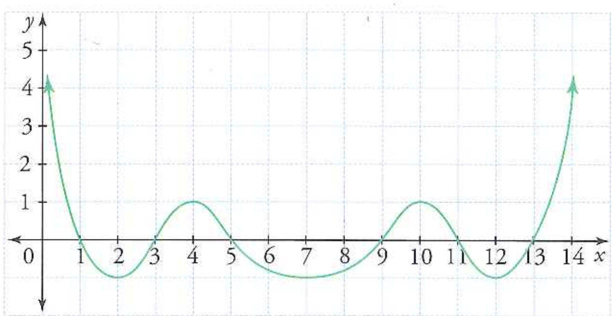


Figura 1.

EJEMPLOS

1. Observar la gráfica de la función y determinar los intervalos en los que la función es creciente y los intervalos en los que la función es decreciente.



Los intervalos donde esta función es creciente son: $(2, 4)$, $(7, 10)$ y $(12, \infty)$.

Los intervalos donde esta función es decreciente son: $(-\infty, 2)$, $(4, 7)$ y $(10, 12)$.

2. Utilizar la derivada para hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x) = x^3$.

Primero, se halla la derivada de $f(x)$ así:

$$f'(x) = 3x^2$$

Segundo, se iguala a cero esta derivada.

$$f'(x) = 0 \text{, luego, } 3x^2 = 0.$$

Ya que $f'(x) = 3x^2$

Tercero, se resuelve la ecuación $3x^2 = 0$, así:

$3x^2 = 0$ Se plantea la ecuación.

$\frac{3x^2}{3} = \frac{0}{3}$ Se divide entre 3 ambos lados.

$x^2 = 0$ Se realizan operaciones.

$x = 0$ Se extrae la raíz cuadrada de ambos lados.

Luego, se determinan los intervalos a partir del valor hallado anteriormente.

Los intervalos en este caso son: $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

Después, se toma un valor de prueba para cada intervalo y se remplaza en la derivada. Si el valor resultante es positivo, la función es creciente en ese intervalo y si el valor es negativo, la función es decreciente.

Para ello resulta útil elaborar una tabla como la siguiente:

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Valor de prueba	-1	1
Signo de $f'(x)$	$f'(-1) = 3(-1)^2 = 3;\ 3 > 0$	$f'(1) = 3(1)^2 = 3;\ 3 > 0$
Conclusión	Creciente	Creciente

Finalmente, se puede concluir que la función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

1.3 Puntos críticos y picos

- Se dice que $x = c$ es un **punto crítico** de f, si $f'(c) = 0$ o si $f'(c)$ no está definida.
- Se dice que $(c, f(c))$ es un **pico** de la función f, si $f'(c)$ no existe. En este caso la recta tangente a la gráfica de la función en este punto no existe o es vertical.

EJEMPLOS

Dada la función $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x$.

a. Hallar los puntos críticos.

Primero, se halla la derivada de la función.

$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x$ — Función dada.

$f'(x) = \frac{3x^2}{3} + \frac{2x}{2} - 6$ — Se calcula la derivada.

$f'(x) = x^2 + x - 6$ — Se simplifica la derivada.

Luego, se iguala a cero la derivada y se hallan las soluciones de la ecuación resultante.

$f'(x) = 0$ — Se iguala la derivada a cero.

$x^2 + x - 6 = 0$ — Se plantea la ecuación.

$(x + 3)(x - 2) = 0$ — Se factoriza.

$x = -3$ y $x = 2$ — Se hallan las soluciones.

Finalmente, los puntos críticos de la función son $x = -3$ y $x = 2$.

b. Determinar los intervalos en que la función es creciente o decreciente y realizar su gráfica.

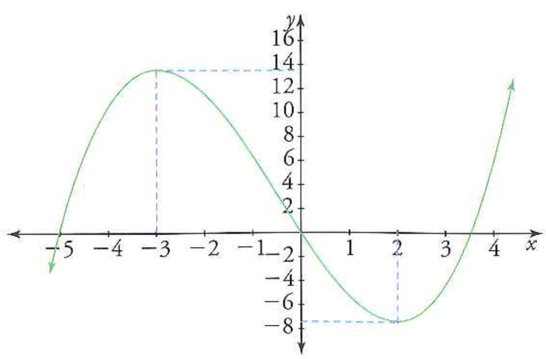
Primero, se determinan los intervalos para hacer el análisis de la función. A partir de los valores hallados en el literal anterior se obtienen los siguientes intervalos:

$$(-\infty, -3), (-3, 2) \text{ y } (2, \infty).$$

Luego, se toma un valor de prueba para cada intervalo y se calcula el valor de la derivada en cada punto, para determinar si la función es creciente o decreciente en cada intervalo, como se muestra en la tabla.

Finalmente, se traza la gráfica de la función.

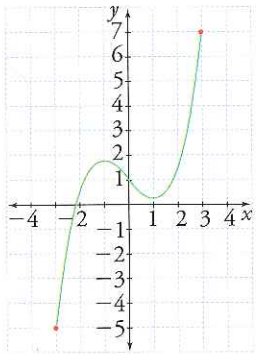
Intervalo	Valor de prueba	Signo de $f'(x)$	Conclusión
$(-\infty, -3)$	-4	$f'(-4) = 6$ $6 > 0$	Creciente
$(-3, 2)$	1	$f'(1) = -4$ $-4 < 0$	Decreciente
$(2, \infty)$	3	$f'(3) = 6$ $6 > 0$	Creciente



Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Observa la gráfica de la función f definida en $[-3, 3]$. Luego, resuelve.

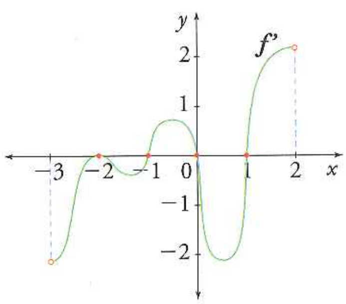


18. Indica el valor de la derivada de f en $x = -1$ y $x = 1$.

19. Completa la siguiente tabla con el signo de la derivada de f en el valor indicado.

x	-3	-1	1		3
$f'(x)$				$+$	

Resuelve a partir de la gráfica de la derivada de la función f'.



20. Determina un intervalo donde la función f es creciente.

21. Determina un intervalo donde la función f es decreciente.

22. Encuentra los posibles puntos críticos de la función f.

Determina los intervalos para los que cada función es creciente y los intervalos para los que cada función es decreciente.

23. $f(x) = x^3 + x^2$
24. $f(x) = \text{Ln } x$
25. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$
26. $f(x) = x^3 + 5x + 1$
27. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$
28. $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

Demuestra cada enunciado, aplicando derivadas.

29. La función $f(x) = x^3 + x$ es creciente en todo su dominio.

30. Si $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = x$, entonces $f'(x) \leqslant g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Determina los picos de cada función, si existen.

31. $f(x) = \sqrt{x}$
32. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$
33. $g(x) = |2x - 5|$
34. $h(x) = \dfrac{3 + x}{\sqrt[5]{x^2 - 1}}$

Halla los extremos relativos de cada función, aplicando la primera derivada.

35. $k(x) = 4x^2 - 4x + 6$
36. $h(x) = -6x^3 - 9x$
37. $f(x) = x^4 - 4x^3$
38. $g(x) = -3x^4 - 2x$
39. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Determina si los valores dados son los puntos críticos de cada función. Justifica la respuesta.

40. $f(x) = x^3 + 5x + 1$

    Puntos críticos $x = 0$ y $x = 1$

41. $f(x) = 4x^2 + 20x$

    Puntos críticos $x = -\dfrac{5}{4}$

42. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

    Puntos críticos: no tiene.

43. **Halla el valor de k, en $f(x) = x^3 - x^2 + kx$ para que sea creciente en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \cup (1, \infty)$ y decreciente en $\left(-\dfrac{1}{3}, 1\right)$.**

Lee y resuelve.

La siguiente función determina el peso que un recién nacido pierde y que después de algunos días recupera.

$$w(t) = 0{,}033t^2 - 0{,}397t + 7{,}303$$

44. Indica el intervalo de tiempo en el que el recién nacido pierde peso y el intervalo en el que gana peso.

45. ¿En qué día alcanza su peso mínimo?

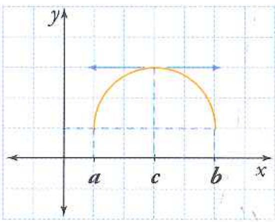
1.4 Análisis con la primera derivada

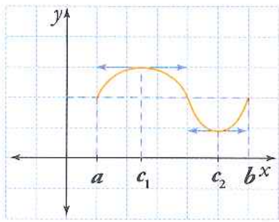
En ocasiones, es difícil encontrar los números críticos de una función, es por ello que el uso del teorema de Rolle es de utilidad para asegurar la existencia de extremos en el interior de un intervalo.

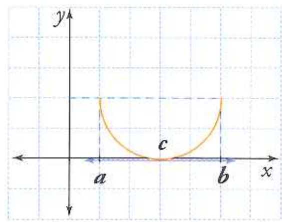
Teorema de Rolle

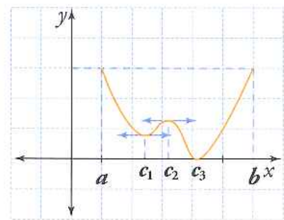
Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces, existe por lo menos un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

En las siguientes figuras se muestran las gráficas de funciones que cumplen las condiciones del teorema.









El teorema de Rolle se demuestra cuando se consideran los siguientes casos:

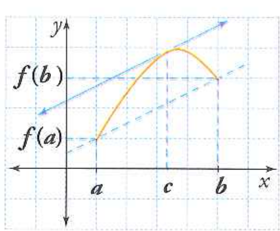
- **Caso 1.** $f(x) < f(a) = f(b)$, en este caso el valor mínimo de f en el intervalo $[a, b]$ es menor que $f(a)$ y que $f(b)$, y por tanto, el valor mínimo está en algún número c del intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = 0$.
- **Caso 2.** $f(x) > f(a) = f(b)$, en este caso el valor máximo de f en el intervalo $[a, b]$ es mayor que $f(a)$ y que $f(b)$, y por tanto, el valor máximo está en algún número c del intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = 0$.
- **Caso 3.** $f(x) = f(a) = f(b)$, para todo $x \in (a, b)$, en este caso f es una función constante y, por tanto, $f'(c) = 0$ para todo x. Luego, todo número c en el intervalo (a, b) es un número crítico con $f'(c) = 0$.

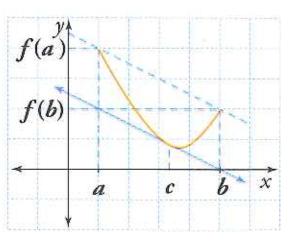
Teorema de Lagrange o del valor medio

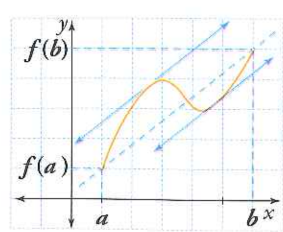
El **teorema de Lagrange**, también llamado **teorema del valor medio,** es una generalización del teorema de Rolle y se aplica cuando $f(a) \neq f(b)$.

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces, existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

El teorema del valor medio afirma que existe un punto $(c, f(c))$ sobre la gráfica, tal que la recta tangente en el punto es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$







EJEMPLOS

1. Hallar los puntos de cada función para los cuales $f'(x) = 0$.

a. $f(x) = x^3 - x$

Primero, se iguala a cero la función.

$x^3 - x = 0$ Ecuación.

$x(x^2 - 1) = 0$ Se factoriza.

$x = 0, x = \pm 1$ Se hallan las soluciones.

El intervalo es $(-1, 1)$.

Segundo, se determina un c que cumpla el teorema de Rolle.

Por el teorema de Rolle, existe c *en* el intervalo $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Luego, para hallar c, se iguala $f'(x)$ a cero.

$f'(x) = 3x^2 - 1$

Luego, $3x^2 - 1 = 0$

Las soluciones de la ecuación son:

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Finalmente, $c_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ y $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ son los valores que satisfacen $f'(c) = 0$.

b. $g(x) =$ **sen** x **en** $[0, \pi]$.

Primero, la función es continua en el intervalo $[0, \pi]$, luego, por el teorema de Rolle, existe al menos un punto c en $(0, \pi)$ tal que $g'(x) = 0$

Segundo, se deriva $g(x)$.

$$g'(x) = \cos x$$

$\cos x = 0$ se iguala a cero la función.

$x_1 = \frac{\pi}{2}$ Se resuelve la ecuación.

Finalmente, x_1 está en el intervalo $[0, \pi]$ y se cumple el teorema.

2. Determinar si la función $h(x) = |x - 2|$ satisface las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$.

Primero, se determina la función $h(x)$ de la siguiente manera.

$$h(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 < x \leqslant 4 \end{cases}$$

Segundo, se estudia la continuidad de $h(x)$ en $[0, 4]$.

Continuidad en $x = 2$.

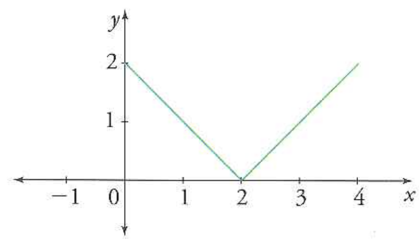
$\lim_{x \to 2^-} (-x + 2) = 0$

$\lim_{x \to 2^+} (x - 2) = 0$

Como los límites laterales son iguales a $h(2)$, entonces, la función $h(x)$ es continua en $x = 2$ y, por tanto, también es continua en $[0, 4]$.

Tercero, se estudia la derivabilidad en $[0, 4]$.

La función no es derivable en $x = 2$, en este punto la gráfica tiene un pico, luego $h(x)$ no es derivable en $(0, 4)$. La gráfica de la función es:



Por tanto, la función $h(x)$ no satisface las condiciones del teorema de Rolle.

3. Dada la función $f(x) = x^2 - 4x + 5$, realizar lo indicado.

a. Determinar si $f(x)$ satisface las condiciones del teorema de Lagrange en el intervalo $[0, 5]$.

La función $f(x)$, por ser una función polinómica, es continua en todo $\mathbb{R}$ y, por tanto, es continua en el intervalo $[0, 5]$, además es derivable en el intervalo $(0, 5)$.

b. Determinar el punto $(c, f(c))$ en el que la tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos $(0, 5)$ y $(5, 10)$.

Para determinar el punto $(c, f(c))$, se calcula la derivada de $f(x)$ y se aplica el teorema de Lagrange, así:

$$f'(x) = 2x - 4 \text{ entonces, } f'(c) = 2c - 4$$

Como $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ se sustituyen los extremos del intervalo así:

$$2c - 4 = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0}$$

$2c - 4 = \frac{10 - 5}{5}$ se tiene entonces que $c = \frac{5}{2}$.

Se halla $f(c)$ así $f(c) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{5}{2}\right) + 5 = \frac{5}{4}$.

Por tanto, el punto buscado es $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

Responde las siguientes preguntas.

46. ¿Qué conclusión se obtiene del teorema de Rolle?

47. ¿Cuál es la hipótesis formulada en el teorema de Lagrange o del valor medio?

Dada la función y el intervalo encuentra el valor de c que satisface el teorema de Rolle.

48. $f(x) = x^3 - 4x$ en el intervalo $[0, 2]$.

49. $f(x) = x^2 - 6x + 5$ en el intervalo $[-1, 7]$.

50. $f(x) = 2x + \pi \cos x$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

51. $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$ en $[-1, 3]$.

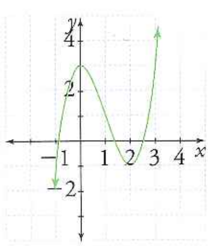
Justifica por qué no es posible aplicar el teorema de Rolle en los siguientes casos.

52. En el intervalo $[-2, 2]$ con la función $f(x) = |x|$.

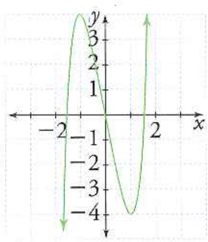
53. Con la función $f(x) = \operatorname{Ln} x^2$ en el intervalo $[-3, 3]$.

Señala en cada gráfica los valores para los cuales se verifica el teorema de Rolle.

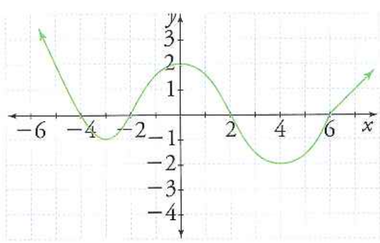
54.



56.



55.



57. **Demuestra que dada la función cuadrática $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ con $A \neq 0$, el valor de c dado por el teorema del valor medio para un intervalo $[a, b]$ es el punto medio de dicho intervalo.**

Resuelve si $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$.

58. Demuestra que $f(-1) = f(1)$ y, sin embargo, no existe un número c en $[-1, 1]$ tal que $f'(c) = 0$.

59. ¿Por qué no contradice este hecho el teorema de Rolle?

Halla los valores de c para los cuales

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

60. $f(x) = \sqrt{x^3}$ con $a = 0$ y $b = 1$.

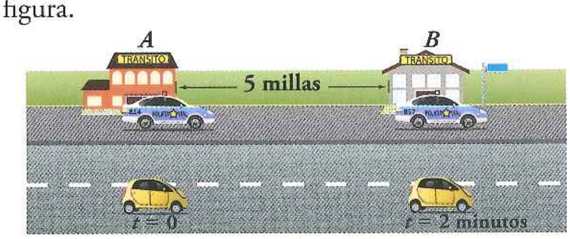
61. $f(x) = x^3 + x + 1$ con $a = 0$ y $b = 2$.

62. $f(x) = \arctan x$ con $a = 0$ y $b = 1$.

63. $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$ con $a = 3$ y $b = 9$.

Lee, observa y resuelve.

Un automóvil gasta 2 minutos en pasar frente a dos patrullas de control como se muestra en la siguiente figura.



Cuando pasa frente a la patrulla A el sensor indica que viaja a 55 mi/h y cuando pasa frente a la patrulla B el sensor indica 50 mi/h. El límite de velocidad en carretera es de 60 mi/h.

64. Demuestra que el conductor excedió el límite de velocidad permitido y por tanto debe ser multado.

65. ¿En cuánto excedió el límite de velocidad permitido en carretera?

Lee y resuelve.

La función $\sigma(x) = x(x + 2)^2$, para $x \in [0, 2]$, indica la cantidad de masa en gramos que contiene una varilla desde la posición $a = 0$ hasta la posición $x = b$.

66. Determina la función de densidad teniendo en cuenta que $\rho(x) = \frac{d\sigma}{dx}$, es la función de densidad.

67. ¿Cuál es el valor promedio de densidad de la varilla?

68. Encuentra el valor c para el cual se satisface

$$\rho(c) = \frac{\sigma(2) - \sigma(0)}{2 - 0}.$$

69. ¿Qué significado posee el dato encontrado en el ejercicio anterior en el contexto del problema?

Criterio de la primera derivada

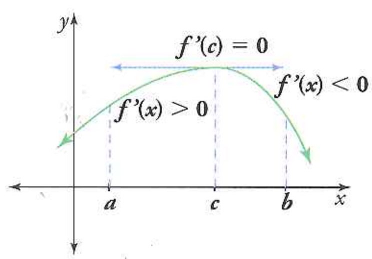
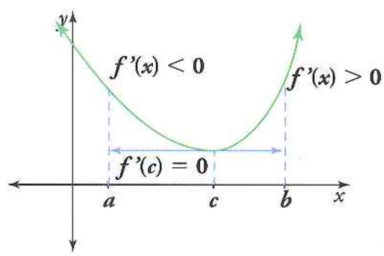
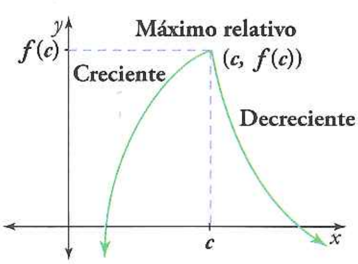
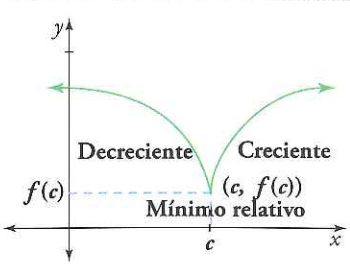
Actividad

Ya que los extremos relativos de una función son también puntos críticos, por medio de la derivada se establecen algunos criterios para determinar los valores máximo y mínimo relativo de una función.

Sea f una función continua en el intervalo (a, b) y $c \in (a, b)$, tal que c es un punto crítico de f.

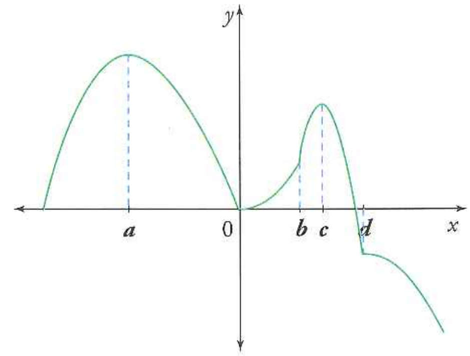
- Si $f'(x) > 0$ para $a < x < c$ y $f'(x) < 0$ para $c < x < b$, es decir, si f es creciente para $a < x < c$ y f es decreciente para $c < x < b$, entonces, f tiene un **máximo relativo** en c.
- Si $f'(x) < 0$ para $a < x < c$ y $f'(x) > 0$ para $c < x < b$, es decir, si f es decreciente para $a < x < c$ y f es creciente para $c < x < b$, entonces, f tiene un **mínimo relativo** en c.

La siguiente tabla muestra el criterio para hallar los extremos, cuando la derivada de la función es cero y cuando no existe.

Derivada de la función igual a cero		Entre a y c, $f(x)$ crece, entre c y b, $f(x)$ decrece. $f(c)$ es un máximo relativo.
		Entre a y c, $f(x)$ decrece, entre c y b, $f(x)$ crece. $f(c)$ es un mínimo relativo.
Derivada de la función no existe		$f(c)$ es un máximo relativo.
		$f(c)$ es un mínimo relativo.

EJEMPLOS

1. Determinar, a partir de la gráfica, si la función f tiene máximos o mínimos relativos en $x = 0$ y en los puntos cuyas abscisas son a, b, c y d.



Primero, se tiene que en $x = a$ y en $x = c$ la derivada cambia de signo, de tal forma que para valores cercanos a a o a c, por la izquierda, la derivada es positiva, y para valores cercanos por la derecha la derivada es negativa. Por tanto, en estos dos puntos hay dos máximos relativos.

Luego, en $x = 0$ también la derivada cambia de signo. Sin embargo, en este caso para valores cercanos a cero por la izquierda, la derivada es negativa y para valores cercanos a cero por la derecha, la derivada es positiva. Por tanto, en $x = 0$ hay un mínimo relativo.

Finalmente, se tiene que en $x = b$ y en $x = d$, la derivada no cambia de signo. Por tanto, en estos puntos no hay ni máximos ni mínimos relativos.

2. Hallar los máximos o mínimos relativos de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Primero, se hallan los puntos críticos de la función.

$f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ — Función dada.

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ — Se calcula la función derivada.

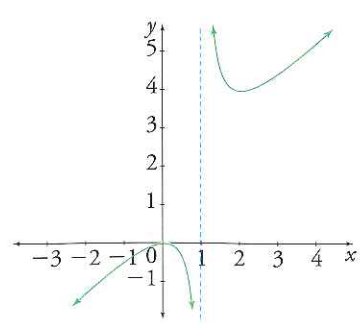
$\dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0$ — Se iguala la derivada a cero.

$x(x-2) = 0$ — Se factoriza el numerador.

Luego, la función tiene puntos críticos en $x = 0$ y en $x = 2$ porque su derivada es igual a cero, además, tiene otro punto crítico en $x = 1$ porque $f'(x)$ no está definida en ese punto. Por tanto, se definen los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, \infty)$ y se analiza el signo de la derivada en cada uno así:

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Valor de prueba	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	3
Signo de $f'(x)$	$f'(-1) > 0$	$f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0$	$f'\left(\frac{3}{2}\right) < 0$	$f'(3) > 0$
Conclusión	Creciente	Decreciente	Decreciente	Creciente

Finalmente, se tiene que en $x = 0$ cambia la derivada de positiva a negativa, por lo que hay un máximo relativo en ese punto. En cambio, en $x = 2$ la derivada cambia de negativa a positiva por lo que en este punto hay un mínimo relativo, como se muestra en la gráfica.



Recuerda que...

Una función f que sea continua en $x = a$, puede tener un máximo o un mínimo relativo en este punto, aunque no sea derivable en él.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono

Determina el valor de verdad en las proposiciones teniendo en cuenta que f y g son funciones continuas en los intervalos $(-4, 5)$ y $(-2, 2)$, respectivamente.

70. Si en el intervalo $(-4, 0)$ se cumple que f es creciente, y en el intervalo $(0, 5)$ es decreciente, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

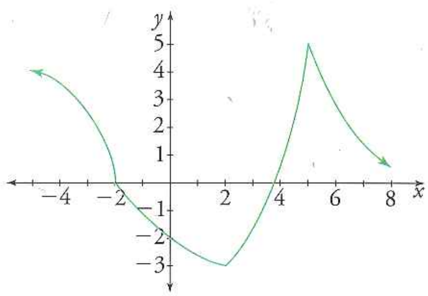
71. Si en el intervalo $(-2, 1)$ se cumple que g es decreciente y en el intervalo $(1, 2)$ es creciente, entonces g tiene un mínimo relativo en $x = 1$.

72. Si f no es derivable en $x = 4$, entonces f no puede tener un máximo relativo en ese punto.

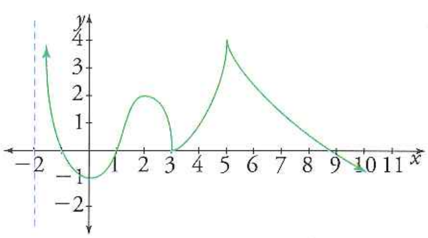
73. Si tanto f como g tienen un máximo relativo en $x = -1$, entonces $f + g$ también tiene un máximo relativo en ese punto.

Determina en cuáles intervalos cada función es creciente y en cuáles es decreciente.

74.

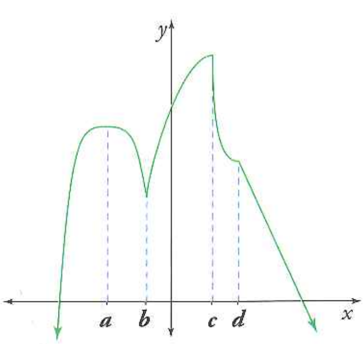


75.



Determina si la función f tiene máximos o mínimos relativos en los puntos que se indican en la gráfica. Justifica tu respuesta.

76.



Aplica el criterio de la primera derivada para determinar los máximos o mínimos relativos de cada función.

77. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

78. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3$

79. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 4}$

80. $f(x) = x^3 - 2x - 1$

81. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

82. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

83. Traza la gráfica de una función continua en todo su dominio que cumpla las siguientes condiciones.

- La pendiente de la recta tangente en $x = -2$ es cero.
- No es derivable en $x = -1$, ni en $x = 3$.
- En el intervalo $(-2, -1)$ la función es decreciente.
- En los intervalos $(-1, 3)$ y $(3, \infty)$ la función es creciente.

Analiza la existencia de máximos o mínimos relativos en los puntos donde cambia cada función por partes.

84. $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \leqslant 2 \\ -x^2 + 5x - 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

85. $g(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \leqslant 0 \text{ o } x \geqslant \dfrac{1}{4} \\ 7x^2 - x & \text{si } 0 < x < \dfrac{1}{4} \end{cases}$

86. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x - \frac{1}{2}} & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x^2 + x + 7}{\sqrt{2x - 1}} & \text{si } x > \dfrac{1}{2} \\ 5 & \text{si } x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Determina los valores de a y de b en cada función, si es posible, para que se cumplan las condiciones indicadas.

87. $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$, si $(1, 2)$ es un máximo relativo de f.

88. $f(x) = \dfrac{x^2 + a}{x + b}$ si $(4, 8)$ es un mínimo relativo de f y pasa por $(0, -8)$.

89. $f(x) = \dfrac{ax}{\sqrt{x + b}}$ si $x = 6$ es punto crítico de f y pasa por $(4, 4)$.

1.5 Análisis con la segunda derivada

Para realizar el trazo de la gráfica de una función, de manera más acertada, se hace necesario tener una información adicional a los máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos críticos. Por tanto, resulta útil utilizar la segunda derivada para obtener mayor información, como la concavidad y los puntos de inflexión.

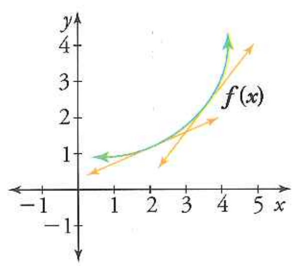
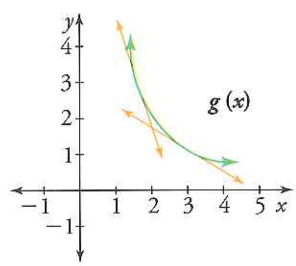
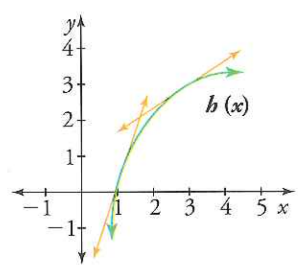
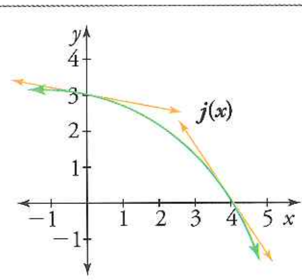
Concavidad

Recurso imprimible

Actividad

Si f es una función dos veces derivable en un intervalo abierto (a, b), entonces:
Si $f''(c) > 0$, para todo $x \in (a, b)$; f es **cóncava hacia arriba**.
Si $f''(c) < 0$, para todo $x \in (a, b)$; f es **cóncava hacia abajo**.

En las siguientes gráficas se muestra la forma de una función cuando es cóncava hacia arriba y cuando es cóncava hacia abajo.

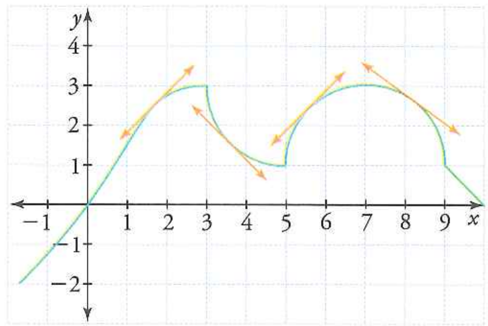
Cóncava hacia arriba	 	En este caso, las rectas tangentes se ubican por debajo de la gráfica de la función.
Cóncava hacia abajo	 	En este caso, las rectas tangentes se ubican por encima de la gráfica de la función.

Puntos de inflexión

Los **puntos de inflexión** son aquellos en los cuales la gráfica cambia de concavidad.

Un punto $(c, f(c))$ sobre la gráfica de una función $f(x)$ es un punto de inflexión si cumple alguna de las siguientes afirmaciones.
$f''(x) > 0$ si $a < x < c$ y $f''(x) < 0$ para $c < x < b$.
$f''(x) < 0$ si $a < x < c$ y $f''(x) > 0$ para $c < x < b$.

Por ejemplo, en la siguiente gráfica los puntos de inflexión son (3, 3) y (5, 1).



- En el punto (3, 3) la gráfica cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba. Además este punto es un pico de la función.
- En el punto (5, 1) la función cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo. Este punto representa también un pico de la función.

El punto (7, 3) no es un punto de inflexión porque la función mantiene el sentido de concavidad hacia abajo.

EJEMPLOS

Determinar los intervalos de concavidad de las funciones dadas en cada caso.

a. $h(x) = -x^3 - x + 7$

Primero, se calculan la primera derivada y la segunda derivada de $h(x)$.

$h'(x) = -3x^2 - 1$ Primera derivada.

$h''(x) = -6x$ Segunda derivada.

Segundo, se iguala a cero la segunda derivada para determinar los puntos de inflexión. Luego, se evalúa la función en el punto resultante.

$-6x = 0$ Segunda derivada de $h(x)$ igualada a cero.

$x = 0$ Se despeja x.

$h(0) = -(0)^3 - (0) + 7$ Se evalúa la función en $x = 0$.

$h(0) = 7$

Tercero, se plantea una tabla para evaluar la concavidad en el punto dado así.

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
Valor de prueba	-1	1
Signo de $h''(x)$	$h''(-1) = -6(-1) = 6 > 0$	$h''(1) = -6(1) = -6 < 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo

La gráfica de la función se puede observar en la figura 2.

La función $h(x) = -x^3 - x + 7$ tiene un punto de inflexión en (0, 7).

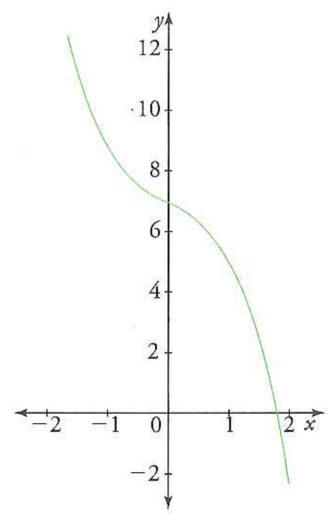


Figura 2.

b. $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$

Primero, se calculan la primera derivada y la segunda derivada de $f(x)$.

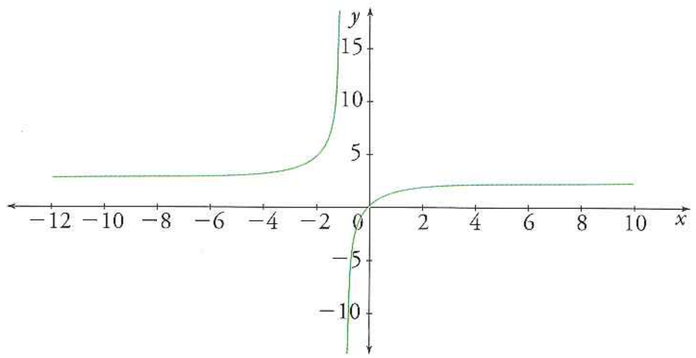
$f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ Primera derivada de $f(x)$.

$f''(x) = \dfrac{-4}{(x+1)^3}$ Segunda derivada de $f(x)$.

Luego, se analiza la segunda derivada de la función para determinar las concavidades. Como la función no está definida en $x = -1$, entonces no hay punto de inflexión.

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
Valor de prueba	-2	1
Signo de $f''(x)$	$f''(-2) = \dfrac{-4}{(-2+1)^3} = \dfrac{-4}{-1}$ $= 4; 4 > 0$	$f''(1) = \dfrac{-4}{(1+1)^3} = \dfrac{-4}{8}$ $= -\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2} < 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo

Finalmente, la gráfica de la función es:



c. $g(x) = x^4 - 8x^2$

Primero, se calculan la primera derivada y la segunda derivada de $g(x)$.

$g'(x) = 4x^3 - 16x$ Primera derivada de $g(x)$.

$g''(x) = 12x^2 - 16$ Segunda derivada de $g(x)$.

Segundo, se iguala a cero la segunda derivada y se factoriza para hallar las raíces de $12x^2 - 16 = 0$. Luego, $x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, a partir de estos dos valores, se analiza la función mediante la siguiente tabla.

Intervalo	$\left(-\infty, -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
Signo de $g''(x)$	$g''(x) > 0$	$g''(x) < 0$	$g''(x) > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

La gráfica de la función se observa en la figura 3.

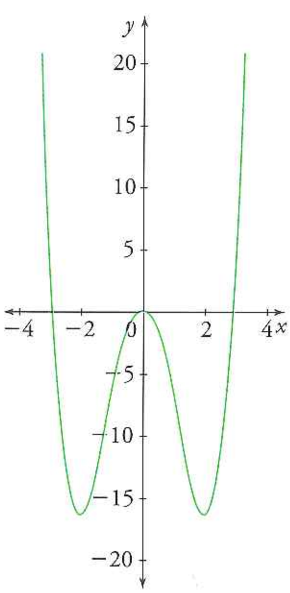


Figura 3.

Criterio de la segunda derivada

Ampliación multimedia

La información acerca de la concavidad de una gráfica se puede utilizar para probar si un punto crítico es un máximo relativo o un mínimo relativo, para ello se utiliza el denominado **criterio de la segunda derivada.**

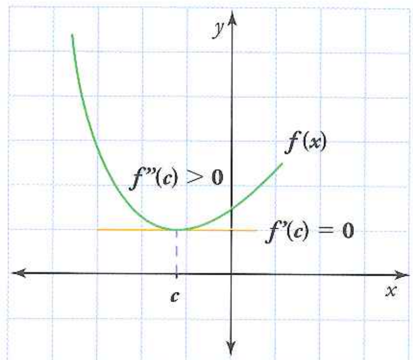
Dada f una función dos veces derivable en un intervalo abierto que contiene a c tal que c es un punto crítico de f, es decir, $f'(c) = 0$. Entonces.

Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en c.

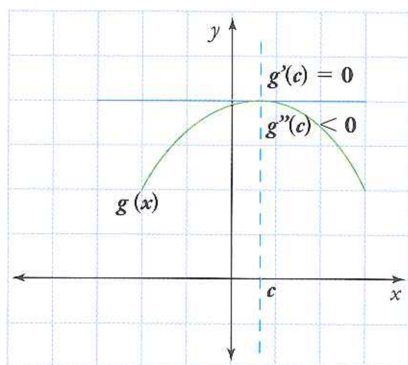
Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en c.

Si $f''(c) = 0$, entonces el criterio no decide.

La gráfica de la función $f(x)$ presenta en $f(c)$ un mínimo relativo, ya que $f'(c) = 0$. Se observa que la recta tangente a la gráfica es horizontal en ese punto y se ubica por debajo de la gráfica; por tanto, $f''(c) > 0$. Luego, la gráfica es cóncava hacia arriba.



La gráfica de la función $g(x)$ muestra que en $g(c)$ hay un máximo relativo, y se observa que $g'(c) = 0$, entonces la recta tangente a la gráfica es horizontal en dicho punto y se ubica por encima de la gráfica; por tanto, $g''(c) < 0$. Luego, la gráfica es cóncava hacia abajo.



Puntos máximos y mínimos absolutos

En las páginas anteriores se desarrollaron métodos para determinar máximos y mínimos relativos de una función. A continuación, se muestra un procedimiento para determinar los máximos y mínimos absolutos de una función.

Para determinar el valor máximo absoluto y el valor mínimo absoluto de una función continua en un intervalo dado, se deben realizar los siguientes pasos:

Primero, se determinan los puntos críticos de la función.

Segundo, se calcula el valor de la segunda derivada en los números críticos, para determinar si es un máximo o un mínimo relativo.

Luego, se encuentran los valores de la función en los números críticos y en los extremos del intervalo.

Finalmente, se toma el mayor de los valores anteriores, este es el máximo absoluto. Y se toma el menor de los valores anteriores y este es el mínimo absoluto.

EJEMPLOS

1. **Utilizar la segunda derivada para hallar los extremos relativos de cada función.**

a. $f(x) = 3x^4 - 3x^2 - 3$

Primero, se calcula la primera derivada y se iguala a cero para hallar los puntos críticos.

$f'(x) = 12x^3 - 6x$ Primera derivada.

$12x^3 - 6x = 0$ Se iguala a cero.

$6x(2x^2 - 1) = 0$ Se factoriza.

Los números críticos son $x_1 = 0$ y $x_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Luego, se utiliza el criterio de la segunda derivada para saber si los números hallados en el paso anterior son máximos o mínimos relativos.

$f''(x) = 36x^2 - 6$ Segunda derivada.

$f''(0) = 36(0)^2 - 6 = -6$ luego en $x = 0$ hay un máximo relativo.

$f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 36\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 6 = 12$, luego en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ hay un mínimo relativo.

$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 36\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 6 = 12$,

Luego en $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ hay un mínimo relativo.

b. $f(t) = 3t^4 - 4t^3 - 12t^2 + 5$

Primero, se calcula la primera derivada y se iguala a cero para hallar los puntos críticos.

$f'(t) = 12t^3 - 12t^2 - 24t$ Primera derivada.

$12t^3 - 12t^2 - 24t = 0$ Se iguala a cero.

$12t\,(t - 2)(t + 1) = 0$ Se factoriza.

Los números críticos son entonces:

$t_1 = 0$, $t_2 = 2$ y $t_3 = -1$.

Segundo, se halla la segunda derivada y se utiliza el criterio respectivo para determinar si los puntos críticos son máximos o mínimos relativos.

$f''(t) = 36t^2 - 24t - 24$ Segunda derivada.

Para $t = 0$

$f''(0) = 36(0)^2 - 24(0) - 24 = -24$

Luego, $t = 0$ es un máximo relativo.

Para $t = 2$

$f''(2) = 36(2)^2 - 24(2) - 24 = 72$

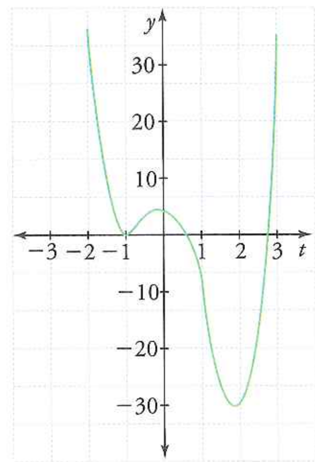
Luego, $t = 2$ es un mínimo relativo.

Para $t = -1$

$f''(-1) = 36(-1)^2 - 24(-1) - 24 = 36$

Luego, $t = -1$es un mínimo relativo.

La gráfica de la función es:



2. **Determinar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de la función $f(x) = 5x^3 - 15x$ en $[-3, 3]$.**

Primero, se hallan los puntos críticos.

$f'(x) = 15x^2 - 15$ Primera derivada.

$15x^2 - 15 = 0$ Se iguala a cero.

$15(x - 1)(x + 1) = 0$ Se factoriza.

Los números críticos son: $x = 1$ y $x = -1$.

Segundo, se utiliza el criterio de la segunda derivada para determinar si son máximos o mínimos relativos.

$f''(x) = 30x$

Se calcula la segunda derivada en los números críticos.

$f''(1) = 30(1) = 30$ y $f''(-1) = 30(-1) = -30$

Luego, $x = 1$ es un mínimo relativo y $x = -1$ es un máximo relativo.

Finalmente, se evalúa la función en los puntos críticos y en los extremos del intervalo

$f(1) = -10, f(-1) = 10, f(-3) = -90, f(3) = 90$

Por tanto, en $x = 3$ se encuetra el máximo absoluto para el intervalo y en $x = -3$ se encuentra el mínimo absoluto para el intervalo.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Modelo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Responde las siguientes preguntas.

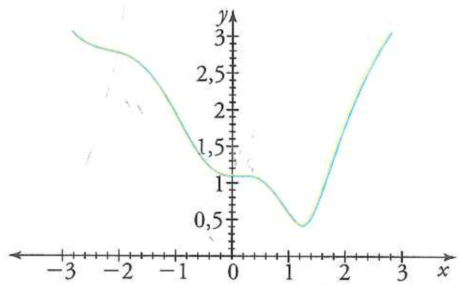
90. ¿Cuáles son las condiciones para aplicar la segunda derivada respecto a la concavidad de la gráfica de una función y qué conclusión se puede obtener?

91. ¿Cuál es el significado geométrico del punto de inflexión de una función?

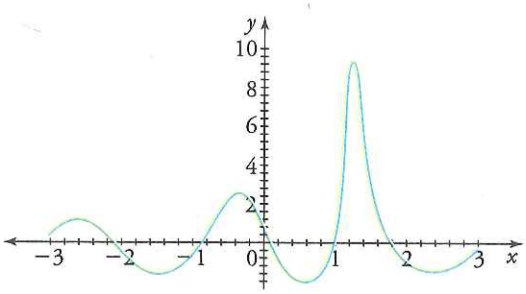
92. ¿En qué consiste el criterio de la segunda derivada?

Encuentra los intervalos en los cuales la función es cóncava hacia arriba y en los que es cóncava hacia abajo. Señala los posibles puntos de inflexión.

93.



94.



Determina si existen los puntos de inflexión de las siguientes funciones.

95. $f(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 7x + 4$

96. $h(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 5$

97. $g(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$

98. $f(x) = \cos x$

99. $h(x) = e^x$

Aplica el criterio de la segunda derivada para encontrar los puntos máximos relativos y mínimos relativos de cada función.

100. $f(x) = \text{Ln}\,(x+1)$

101. $f(x) = x^2\,\text{Ln}(x)$

102. $f(x) = x^2e^{-x}$.

103. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-4}$

Lee y resuelve.

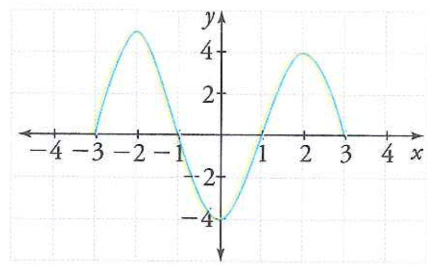
104. Si $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$. Determina a y b, sabiendo que la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión es la recta $y = 2x + 3$.

105. Si $f(x) = (x - 3)e^x$. Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en su punto de inflexión.

106. **Comprueba:**

$f(x) = \dfrac{e^x + \text{sen}\,x}{e^x}$ tiene un máximo relativo en $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Observa la gráfica de f' la derivada de la función f. Luego, resuelve.



107. Determina los puntos de inflexión de f.

108. Encuentra los intervalos donde la gráfica de la función es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo.

Se vierte agua con rapidez constante en un vaso como el que se muestra en la figura.

La gráfica $f(x)$ que relaciona la profundidad del agua con relación a un tiempo es:

109. ¿Qué significado tiene la concavidad de la gráfica con respecto a la rapidez de llenado? ¿A qué se debe esto?

110. ¿En qué punto del vaso, la rapidez con la que se llena de agua es máximo? ¿A qué se debe esto?

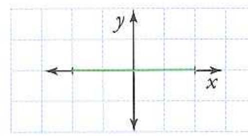
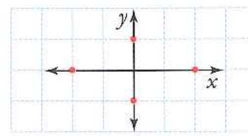
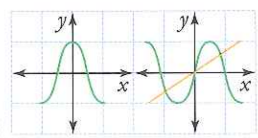
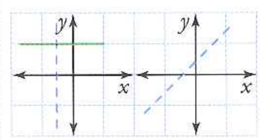
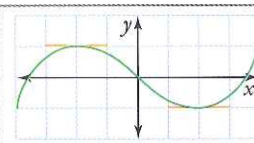
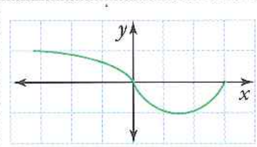
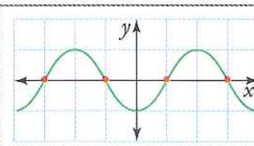
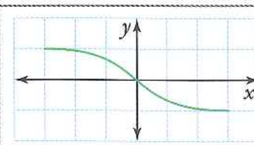
Recurso imprimible

Ampliación multimedia

1.6 Representación gráfica de funciones

En la siguiente tabla se presenta, en resumen, todo el procedimiento para realizar la gráfica de funciones.

Procedimiento general para representar funciones gráficamente

Pasos		Significado geométrico	
Primero **Dominio**	Determinar el conjunto de valores para los cuales x está definida.	Hallar la extensión horizontal de la gráfica.	
Segundo **Intersecciones**	Determinar $f(0)$ y los valores de x para los cuales $f(x) = 0$.	Hallar los puntos donde la gráfica corta a los ejes y y x.	
Tercero **Simetría**	Determinar si f es una función par o impar.	Si f es una función par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y. Si f es impar, es simétrica con respecto al origen.	
Cuarto **Asíntotas**	Verticales. Examinar el denominador de la función (si la función es racional). Horizontales. Examinar $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ Oblicuas. Examinar $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.	Hallar asíntotas horizontales, verticales u oblicuas a la gráfica de la función.	
Quinto	Hallar la primera derivada.		
Sexto **Puntos críticos y picos**	Determinar los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no está definida. Calcular las imágenes de los números críticos.	Hallar los puntos donde la recta tangente a la gráfica es horizontal, vertical (picos) o no existe.	
Séptimo **Crecimiento y decrecimiento**	Determinar el conjunto de los valores de x para los cuales $f'(x)$ es positiva o negativa.	Encontrar los intervalos donde f es creciente ($f'(x) > 0$) y los intervalos donde f es decreciente ($f'(x) < 0$).	
Octavo	Hallar la segunda derivada.		
Noveno **Puntos de inflexión**	Determinar los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$	Determinar los puntos donde la función cambia de concavidad.	
Décimo **Concavidad**	Determinar el conjunto de los valores de x para los cuales $f''(x)$ es positiva o negativa.	Hallar los intervalos donde f es cóncava hacia abajo ($f''(x) < 0$) o donde es cóncava hacia arriba ($f''(x) > 0$).	
Undécimo	Trazar la gráfica de la función.	Emplear la información obtenida en los pasos anteriores.	

EJEMPLOS

Representar cada función.

a. $f(x) = |8 - x^2|$

Se expresa la función de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8 & \text{si } x < -\sqrt{8} \\ 8 - x^2 & \text{si } -\sqrt{8} \leqslant x \leqslant 8 \\ x^2 - 8 & \text{si } \sqrt{8} < x \end{cases}$$

Dominio

La función es continua en $\mathbb{R}$. Por tanto, se tiene que $\text{Dom } f = \mathbb{R}$.

Intersecciones con los ejes

Con el eje x, $f(x) = 0$ entonces $x = -\sqrt{8}$ y $x = \sqrt{8}$.

Con el eje y, si $x = 0$, entonces $y = 8$.

Simetrías

Se verifica si la función es par o impar, como $f(x) = f(-x)$, f es función par, entonces la función es simétrica respecto al eje y.

Asíntotas

La función no tiene asíntotas.

Puntos críticos y picos

Para calcular la derivada se estudia la derivabilidad en $x = -\sqrt{8}$ y $x = \sqrt{8}$.

Primero, se calculan las derivadas laterales en $x = -\sqrt{8}$.

$$f'_-(-\sqrt{8}) = \lim_{x \to -\sqrt{8}^-} \frac{x^2 - 8}{x + \sqrt{8}}$$
$$= \lim_{x \to -\sqrt{8}^-} (x - \sqrt{8}) = -2\sqrt{8}$$

$$f'_+(-\sqrt{8}) = \lim_{x \to -\sqrt{8}^+} \frac{-x^2 + 8}{x + \sqrt{8}}$$
$$= \lim_{x \to -\sqrt{8}^+} (-x + \sqrt{8}) = 2\sqrt{8}$$

Como $f'_-(-\sqrt{8}) \neq f'_+(-\sqrt{8})$, la función no es derivable en $x = -\sqrt{8}$.

De forma análoga, se obtiene que $f'_-(\sqrt{8}) \neq f'_+(\sqrt{8})$, de donde se deduce que $f(x)$ no es derivable en $x = \sqrt{8}$.

Luego, se halla la derivada de f. Por tanto, se tiene que:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -\sqrt{8} \\ -2x & \text{si } -\sqrt{8} \leqslant x \leqslant \sqrt{8} \\ 2x & \text{si } \sqrt{8} < x \end{cases}$$

Finalmente, se calculan los valores que anulan $f'(x)$.

$f(x) = 0$ se tiene cuando $-2x = 0$, es decir, si $x = 0$. Luego, $x = 0$ es un punto crítico.

Crecimiento y decrecimiento

Se obtienen cuatro intervalos a partir de los puntos donde no está definida la función derivada y el punto recién obtenido.

Intervalo	Valor de prueba	Signo de $f'(x)$	Conclusión
$(-\infty, -\sqrt{8})$	-10	$f'(x) = 2(-10) = -20$. Luego, $-20 < 0$	Decreciente
$(-\sqrt{8}, 0)$	-1	$f'(x) = -2(-1) = 2$. Luego, $2 > 0$	Creciente
$(0, \sqrt{8})$	1	$f'(x) = -2(1) = -2$. Luego, $-2 < 0$	Decreciente
$(\sqrt{8}, \infty)$	3	$f'(x) = 2(3) = 6$. Luego, $6 > 0$	Creciente

En los puntos $(\sqrt{8}, 0)$ y $(-\sqrt{8}, 0)$ la función es continua y pasa de ser decreciente a creciente. Luego, tiene en dichos puntos mínimos relativos.

En el punto (0, 8) la función pasa de ser creciente a decreciente. Luego, tiene en dicho punto un máximo relativo.

Concavidad

Se determina la segunda derivada de $f(x)$.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -\sqrt{8} \\ -2 & \text{si } -\sqrt{8} < x < 8 \\ 2 & \text{si } \sqrt{8} < x \end{cases}$$

Intervalo	$(-\infty, -\sqrt{8})$	$(-\sqrt{8}, 0)$	$(0, \sqrt{8})$	$(\sqrt{8}, \infty)$
Signo de $f''(x)$	$2 > 0$	$-2 < 0$	$-2 < 0$	$2 > 0$
Conclusión	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

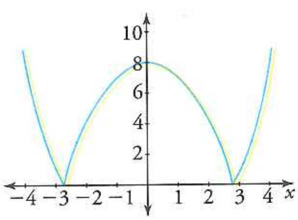


Figura 4.

Luego, la gráfica de la función se muestra en la figura 4.

b. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

Intersecciones con los ejes: con el eje x no tiene ya que no hay raíces reales y con el eje y tampoco tiene porque $x = 0$ no pertenece al dominio de la función.

Simetrías: como $-f(x) = f(-x)$, la función es impar, entonces la función es simétrica con respecto al origen.

Asíntotas:

Horizontales: como $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 + 1}{x} = \pm\infty$ no hay asíntotas horizontales.

Verticales: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 + 1}{x} = \infty$ y $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 + 1}{x} = -\infty$, luego, en $x = 0$ hay una asíntota vertical.

Oblicuas: $y = mx + b$ donde:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1 \text{ y}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2+1}{x} - x\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x} = 0$$

Así, $y = x$ es la asíntota oblicua.

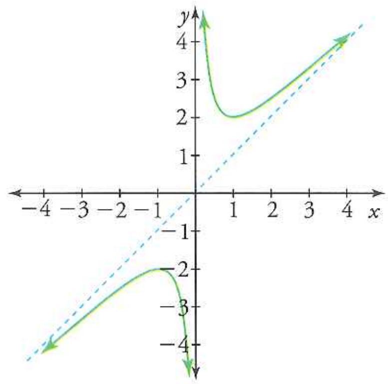
- **Puntos críticos:** $x = -1$ y $x = 1$. $(f'(x) = 0)$
- **Intervalos de crecimiento y decrecimiento:**

  Creciente: $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$. $(f'(x) > 0)$

  Decreciente: $(-1, 0)$ y $(0, 1)$. $(f'(x) < 0)$
- **Puntos de inflexión:** no tiene ya que $f''(x)$ no tiene raíces.
- **Intervalos de concavidad:**

  Es cóncava hacia abajo en: $(-\infty, 0)$ y es cóncava hacia arriba en: $(0, \infty)$

La gráfica de la función se puede observar en la figura del lado.



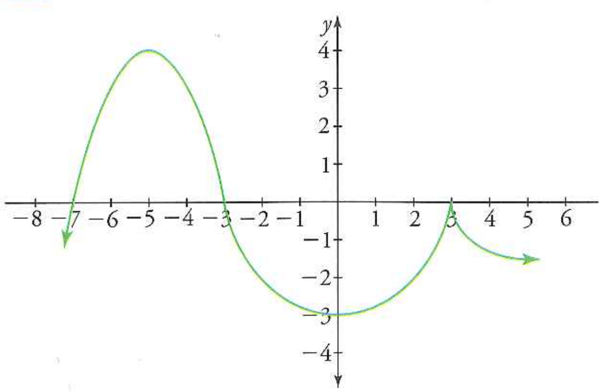
Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Modelo • Ejercito • Soluciono problemas

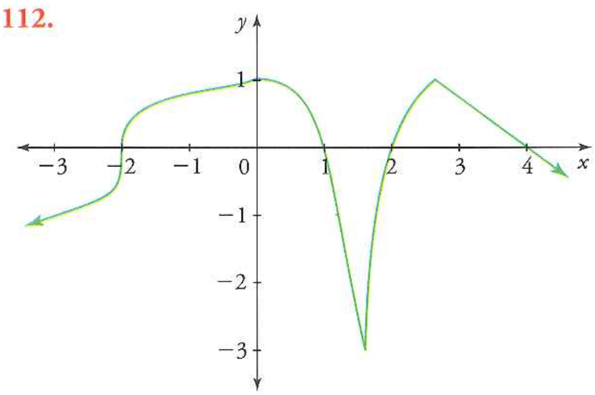
Determina en cada gráfica:

- Interceptos con el eje x.
- Interceptos con el eje y.
- Máximos y mínimos.
- Intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
- Puntos de inflexión.
- Intervalos de concavidad.

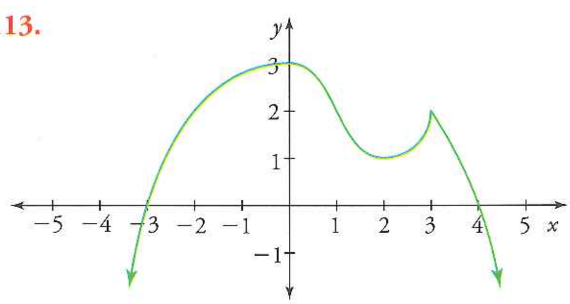
111.



112.



113.

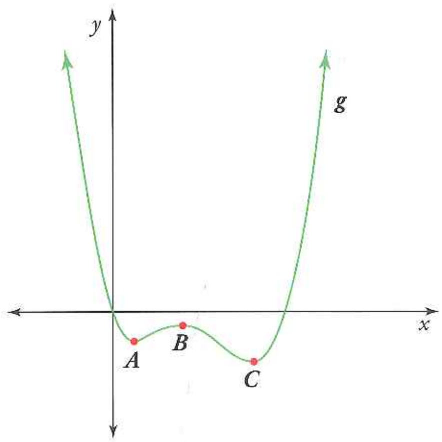


E La siguiente gráfica representa la función

$$g(x) = \frac{x^4}{36} - \frac{11}{27}x^3 + \frac{31}{18}x^2 - \frac{7}{8}x - 2$$

114. Determina las abscisas de los puntos A, B y C.

115. Indica cuál es el valor mínimo absoluto de g.



E **Realiza el procedimiento de la página 222 para trazar un bosquejo de la gráfica de cada función.**

116. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3$

117. $g(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7x + 5$

118. $h(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x - 1}$

119. $f(x) = -\text{Ln}\,(x^2 - 3)$

120. $g(x) = x \cdot (\text{sen}\, x)$

121. $h(x) = 2xe^{-x+2}$

122. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

123. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

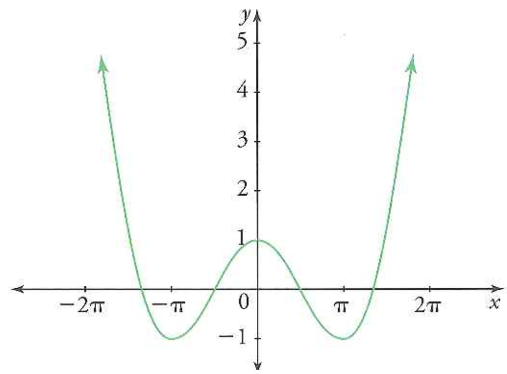
124. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

125. $f(x) = \begin{cases} -(x + 4)^2 & \text{si } x \leqslant -3 \\ (x + 4)^2 - 2 & \text{si } -3 < x < -2 \\ (x + 2)^3 + 2 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ -x^2 + 4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

126. $g(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x \cdot \text{sen}\, x & \text{si } 0 < x < \pi \\ \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2} & \text{si } \pi \leqslant x \leqslant 2\pi \\ -(x - 2\pi)^2 & \text{si } x > 2\pi \end{cases}$

Explica por qué la gráfica no corresponde a la función indicada. Justifica tu respuesta.

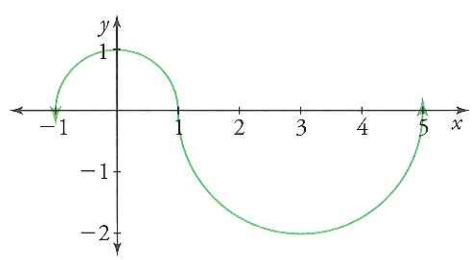
127. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$



128. Traza la gráfica de una función f que cumpla las condiciones dadas.

- Dom $f = \mathbb{R}$ y Ran $f = \mathbb{R}$
- Creciente y cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2)$.
- Creciente y cóncava hacia abajo en $(-2, 0)$.
- Decreciente y cóncava hacia arriba en $(0, 5)$.
- Constante en $(5, 6)$.
- Periódica en $(6, \infty)$.

M **Observa la siguiente gráfica. Luego, resuelve.**



129. Escribe la expresión algebraica de la función que se representa en la gráfica.

130. Determina lo intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

131. Determina los puntos de inflexión de la función.

S **La expresión que representa la velocidad de un líquido que se extrae de un recipiente está dado por la expresión:**

$$v(t) = \frac{6 - t}{6t + 1}$$

Donde t se mide segundos y v en litros por segundo.

132. Traza la gráfica de $v(t)$. Luego, interpreta la gráfica y sus características según el contexto del problema.

2. Diferenciales

Recurso imprimible

Con frecuencia, se suelen utilizar modelos matemáticos que se crean a partir de relaciones que existen entre variables relacionadas de diversas situaciones. Estas relaciones se determinan mediante el incremento y, por ende, con las diferenciales.

2.1 Incremento

El número Δx se denomina **incremento de x**, cuando x cambia de una posición x_1 a una posición x_2:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

El número Δy se denomina **incremento de la variable dependiente y**.

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

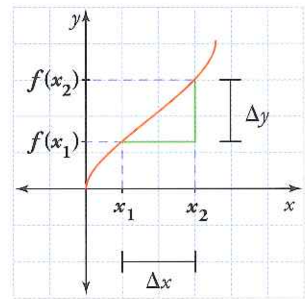


Figura 5.

Si $\Delta x = x_2 - x_1$, entonces, $x_2 = x_1 + \Delta x$, luego, $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$.

Por ejemplo, si se quiere determinar el incremento Δy de $f(x) = 3x^2 - x$ cuando $x_1 = -1$ cambia a $x_2 = 3$, se realiza lo siguiente:

Primero, se calcula Δx, así:

$\Delta x = x_2 - x_1 = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$

Luego, se determina Δy, así:

$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$

$= f(-1 + 4) - f(-1)$

$= f(3) - f(-1)$

$= (3(3)^2 - (3)) - (3(-1)^2 - (-1))$

$= (27 - 3) - (3 + 1) = 24 - 4 = 20$

Finalmente, el incremento Δy de $f(x)$ de $x_1 = -1$ a $x_2 = 3$ es 20.

2.2 Diferencial de una función

Sea $y = f(x)$ en donde f es una función derivable, entonces la diferencial dx es una variable independiente, además $dx = \Delta x$.

La diferencial dy se define como $dy = f'(x)dx$.

Por ejemplo, si se quiere hallar la diferencial de $f(x) = \text{sen}^2(2x)$, se determina la derivada implícita de $f(x)$ así:

$\frac{d}{dx}(\text{sen}^2(2x)) = 2\,\text{sen}(2x)\frac{d}{dx}(\text{sen}(2x))$

$\frac{d}{dx}(\text{sen}^2(2x)) = 2\,\text{sen}(2x)(\cos(2x))(2)$

$d(\text{sen}^2(2x)) = 4\,\text{sen}(2x)\cos(2x)dx$

Luego, la diferencial de $f(x)$ es $dy = d(\text{sen}^2(2x)) = 4\,\text{sen}(2x)\cos(2x)dx$.

EJEMPLOS

1. Comparar los valores dy y Δy si $f(x) = x^3 + 2x^2$; $x = 1$ y $\Delta x = 0,1$.

De acuerdo con la definición de incremento, se deduce que:

$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) = f(1,1) - f(1)$

$\Delta y = ((1,1)^3 + 2(1,1)^2) - ((1)^3 + 2(1)^2)$

$\Delta y = (1,331 + 2,42) - (1 + 2)$

$\Delta y = 3,751 - 3 = 0,751$

Entonces, $\Delta y = 0,751$

Ahora $dy = f'(x)dx$

$dy = (3x^2 + 4x)dx$

$dy = (3x^2 + 4x)(0,1)$

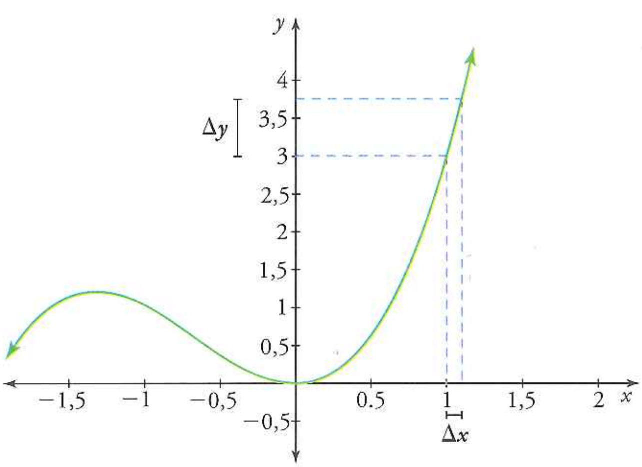
Como $x = 1$, entonces

$d(y) = f'(1)dx = (3(1)^2 + 4(1))(0,1) = 0,7$

Entonces $dy = 0,7$.

Como $\Delta y = 0,751$ y $dy = 0,7$, se puede afirmar que estos valores son cercanos, es decir, $\Delta y \approx dy$, si Δx se reduce más, entonces la aproximación entre los valores Δy y dy es mucho mejor.

La gráfica de la función $f(x) = x^3 + 2x^2$ para $x_2 = 1,1$ y $x_1 = 1$ es la siguiente:



2. Calcular un valor aproximado para $\sqrt{2}$.

Primero, se toma la función $f(x) = \sqrt{x}$ para realizar una aproximación de $\sqrt{2}$.

Segundo, se considera un número menor que 2 cuya raíz cuadrada es exacta.

Un número que satisface esta condición, con dos lugares después de la coma, es 1,96.

Tercero, se hace uso de las aproximaciones con incrementos así:

$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x$ para $x = 1,96$ y $\Delta x = 0,04$.

$\sqrt{2} = f(2) = f(1,96 + 0,04) \approx f(1,96) + f'(1,96) \cdot 0,04$

Como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, se tiene que:

$\sqrt{2} \approx \sqrt{1,96} + \dfrac{1}{2\sqrt{1,96}} \cdot 0,04$

$\sqrt{2} \approx 1,4 + \dfrac{1}{2 \cdot 1,4} \cdot 0,04$

$\sqrt{2} \approx 1,414285714$

Así, para tener una idea de la aproximación, se puede elevar al cuadrado este último resultado.

$$(1,414285714)^2 = 2,000204081.$$

3. Camilo tomó la medida del radio de su balón y encontró que esta era de 20 cm, con un posible error de estimación de 0,04 cm. Estimar el error máximo al calcular el volumen del balón.

El volumen del balón se trabaja con el volumen de la esfera cuya fórmula es:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Si se representa el error medido de r como $dr = \Delta r$, entonces el valor correspondiente al error calculado del volumen es ΔV, el cual se expresa como:

$$\Delta V \approx dV = 4\pi r^2 dr$$

Al remplazar $r = 20$ y $dr = 0,04$ en la fórmula anterior, se obtiene:

$$\Delta V \approx 4\pi(20)^2(0,04)$$

$$\Delta V \approx 201,06$$

Por tanto, el error máximo del volumen calculado es 201,06 cm^3.

Es posible calcular el error relativo, dividiendo el error calculado entre el volumen total, así:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3dr}{r}$$

Luego, el error relativo en la medida del volumen es tres veces el error relativo del radio.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Modelo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Responde las siguientes preguntas.

133. ¿Cuál es el significado de las notaciones Δx y Δy?

134. ¿En qué tipo de situaciones se utilizan los diferenciales?

Determina los respectivos valores de Δx y Δy para cada función.

135. $f(x) = x^2 + 1$ con $x_1 = 1$ y $x_2 = 1{,}1$.

136. $f(x) = \sqrt{x}$ con $x_1 = 0{,}16$ y $x_2 = 0{,}25$.

137. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ con $x_1 = 2$ y $x_2 = 2{,}5$.

138. $f(x) = e^x$ con $x_1 = 0$ y $x_2 = 0{,}003$.

139. $f(x) = \cos x$ con $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$ y $x_2 = 1{,}5$.

140. $f(x) = \text{Log}_2 (x - 2)$ con $x_1 = 10$ y $x_2 = 18$.

Responde V, si el enunciado es verdadero o F, si es falso. Justifica tu respuesta.

141. Si $\Delta y = 0$, entonces la función es constante en el intervalo $[x_1, x_2]$.

142. Si una función es creciente en un intervalo $[a, b]$ cualquier incremento en x generará un incremento positivo en y.

143. Si cualquier incremento de una función en un intervalo $[a, b]$ es negativo entonces la función es decreciente en dicho intervalo.

Asocia cada función con su respectivo diferencial.

144. $f(x) = x^2 - 7x + 5$ — a. $\dfrac{4x}{1 + x^2}dx$

145. $g(x) = 4 \arctan x$ — b. $\text{sen}\,(2x)dx$

146. $h(x) = \text{sen}^3 x$ — c. $(2x - 7)dx$

147. $i(x) = \text{Ln}\,|x - 1|$ — d. $\dfrac{x+1}{x-1}dx$

148. $j(x) = 2\,\text{Ln}\,(1 + x^2)$ — e. $\dfrac{4}{1 + x^2}dx$

149. $k(x) = x + 2\,\text{Ln}\,|x - 1|$ — f. $3\,\text{sen}^2 x \cos x\, dx$

150. $l(x) = -\cos^2 x$ — g. $\dfrac{1}{x-1}dx$

Considera la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$.

151. Utiliza una calculadora para evaluar la función en $x = 1$, $x_1 = 1{,}1$ y $x_2 = 1{,}01$.

152. Determina los valores $\Delta y_1 = f(x_1) - f(x)$ y $\Delta y_2 = f(x_2) - f(x)$.

153. Evalúa la expresión $f'(x)\Delta x_i$, donde $\Delta x_i = x_i - x$. Compara tus resultados con los obtenidos en el ejercicio anterior.

Utiliza los diferenciales para estimar, sin usar calculadora, los siguientes valores. Justifica la elección de los valores utilizados.

154. $\sqrt{8{,}9}$

155. sen 0,2

156. Ln 1,001

157. $e^{0{,}02}$

El diseño de una pieza metálica corresponde con el de un círculo de 7 cm de radio.

158. Estima, en forma aproximada, el error cometido al calcular el área de la pieza si su radio tiene un error máximo de 1 mm.

La velocidad de un automóvil de carreras que gira en un circuito automovilístico viene dada por la expresión

$$v(t) = 10\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{45}t\right) + 70$$

Donde v está dada en m/s y t en segundos. El automóvil pasa por la línea de meta cada minuto y medio.

159. El detector de velocidad en la meta tarda aproximadamente una milésima de segundo en registrar la información en el computador. Estima la velocidad del automóvil en el momento que su velocidad se registra en el computador.

La organización de la carrera tiene dispuesto otro punto de control de velocidad el cual debe ser alcanzado promediando los 52,5 segundos de haberse iniciado la vuelta.

160. Estima la velocidad que lleva el automóvil cuando se registra la velocidad si la cámara en este punto tarda aproximadamente 5 centésimas en realizar el registro.

Para elaborar señales de tránsito, se utilizan moldes con formas de triángulo equilátero, cuyo lado debe ser de unos 60 cm.

161. Estima el error en el área de la señal si el perímetro tiene un error máximo de 1,5 cm.

3. Razón de cambio

Recurso imprimible | Enlace web

La **razón de cambio** es otra de las aplicaciones de las derivadas. Esta es una expresión que relaciona dos o más variables que cambian con el tiempo.

Para resolver un problema de razón de cambio se realiza el siguiente procedimiento:

Primero, se dibuja, si es posible, un esquema de la situación planteada.

Segundo, se identifican las variables que intervienen en la situación y se identifica el valor que se quiere hallar.

Tercero, se escribe la relación existente entre las cantidades dependientes del tiempo, mediante una expresión algebraica, es decir, se escribe la ecuación correspondiente.

Luego, se aplica la derivación implícita con respecto a t en la ecuación planteada.

Finalmente, se resuelve la ecuación o las ecuaciones. Puede ser necesario referirse a la ecuación original para hacer las sustituciones correctas en la ecuación final.

EJEMPLOS

1. **Un punto se mueve sobre una parábola de ecuación $y = x^2 - 6x$. ¿En qué punto de la curva la variación de la ordenada es cuatro veces la de la abscisa, asumiendo que esta variación nunca se anula?**

Primero, se tiene que la curva que está definida con la función dada es $y = x^2 - 6x$.

Donde x y y son funciones del tiempo.

Como la variación de la ordenada es cuatro veces la de la abscisa se tiene que $\frac{dy}{dt} = 4\frac{dx}{dt}$.

Segundo, se realiza la derivada de $y = x^2 - 6x$ utilizando la regla de la cadena.

$$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} - 6\frac{dx}{dt}$$

Tercero, se remplaza $\frac{dy}{dt} = 4\frac{dx}{dt}$ en la derivada anterior.

$$4\frac{dx}{dt} = (2x - 6)\frac{dx}{dt}$$

De donde se tiene que $4 = 2x - 6$.

Cuarto, se despeja x en la ecuación $4 = 2x - 6$.

$4 = 2x - 6$

$4 + 6 = 2x - 6 + 6$ Se suma 6 a ambos lados.

$10 = 2x$ Se realizan operaciones.

$\frac{10}{2} = \frac{2x}{2}$ Se divide entre dos a ambos lados.

$5 = x$

Quinto, se halla la imagen de $x = 5$.

$y = 5^2 - 6(5) = 25 - 30$

$y = -5$

Luego, el punto donde la variación de la ordenada es cuatro veces la de la abscisa es $(5, -5)$.

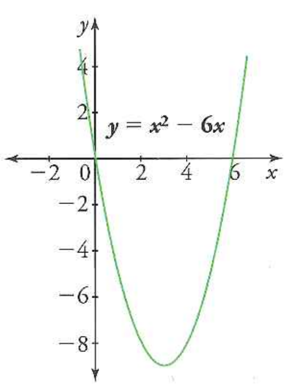


Figura 6.

2. **La longitud del lado de un cuadrado aumenta a razón de 2 cm/s. ¿Con qué velocidad aumentará su área cuando el lado tenga 30 cm?**

Primero, se determinan los datos del problema.

Lado del cuadrado: l, y $l = 30$ cm

El área del cuadrado es: $A = l^2$

Razón de cambio de la longitud del lado: $\frac{dl}{dt} = 2\text{ cm/s}$.

Segundo, se aplica la regla de la cadena para A. Así,

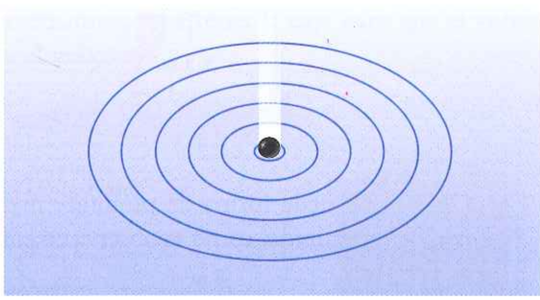
$$\frac{dA}{dt} = 2l\frac{dl}{dt}$$

Luego, se remplazan los datos del problema en la derivada anterior.

$$\frac{dA}{dt} = 2(30\text{ cm})(2\text{ cm/s}) = 120\text{ cm}^2/\text{s}$$

Finalmente, se tiene que el área del cuadrado aumenta a razón de 120 cm^2/s cuando su lado tiene 30 cm.

3. **Al caer un objeto sobre el agua, el área de la región circular que este forma aumenta produciendo ondas concéntricas. Si el radio de estas ondas crece a razón de 1,5 cm/s, ¿a qué ritmo crece el área total circular cuando $r = 4$ cm?**



Primero, se escribe la ecuación que determina el área del círculo.

$$A = \pi r^2$$

Segundo, se deriva con respecto al tiempo.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2)$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$$

Luego, se remplazan $r = 4$ cm y $\frac{dr}{dt} = 1,5$ cm/s en $\frac{dA}{dt}$.

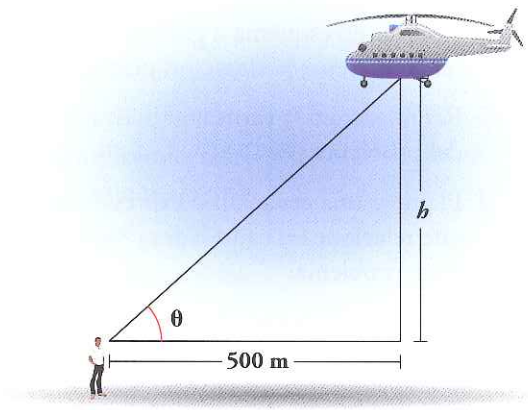
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(4\text{ cm})(1,5\text{ cm/s})$$

$$\frac{dA}{dt} = 12\pi\text{ cm}^2/\text{s}$$

Por tanto, el área total del círculo crece a un ritmo de 12π cm^2/s cuando $r = 4$ cm.

4. **Un helicóptero despega a 500 m de un observador y se eleva a razón de 10 m/s. Determinar la velocidad con la cual varía el ángulo de elevación del helicóptero respecto del observador cuando el helicóptero está a 400 m del suelo.**

Primero, se realiza el esquema correspondiente, así:



Segundo, se plantea una expresión que relacione el ángulo, la altura y la distancia horizontal del helicóptero al observador.

$$\tan\theta = \frac{h}{500}$$

Tercero, se despeja el ángulo de la expresión anterior.

$$\theta = \arctan\frac{h}{500}$$

Cuarto, se deriva la función anterior con respecto a t, mediante la derivación implícita.

$$\theta = \arctan\frac{h}{500} \qquad \text{Ecuación dada.}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{h}{500}\right)^2}\cdot\frac{1}{500}\frac{dh}{dt} \qquad \text{Se deriva la función.}$$

Quinto, se remplazan los valores $h = 400$ m y $\frac{dh}{dt} = 10$ m/s en la derivada anterior.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1+\left(\frac{400}{500}\right)^2}\cdot\frac{1}{500}(10)$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{16}{25}\right)}\cdot\frac{1}{50}$$

$$= \frac{1}{82}\text{ rad/s.}$$

Finalmente, se tiene que el ángulo de observación varía a razón de $\frac{1}{82}$ rad/s cuando el helicóptero está a 400 m del suelo.

162. Ordena de forma secuencial los siguientes pasos para resolver un problema mediante razón de cambio o tasas relacionadas.

a. Derivar la ecuación resultante con respecto al tiempo.

b. Realizar un esquema o gráfica, si es necesario, que represente la situación planteada.

c. Remplazar en la expresión derivada los datos del problema.

d. Plantear una ecuación o expresión algebraica que relacione las cantidades y variables dadas en el problema.

e. Determinar cantidades desconocidas, en la expresión original.

M En un circuito conectado en paralelo, el recíproco de la resistencia total equivalente corresponde con la suma de los recíprocos de las resistencias individuales del circuito.

163. Expresa la anterior relación en forma algebraica para un circuito que presenta dos resistencias R_1 y R_2 conectadas en paralelo.

164. Encuentra una expresión matemática que permita determinar la tasa a la que cambia la resistencia total del circuito, conociendo las tasas a las que cambian R_1 y R_2, respectivamente.

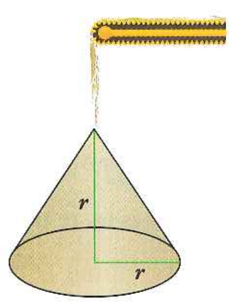
S Resuelve los siguientes problemas.

165. Una bola de nieve se derrite a razón de 0,25 cm^3/min. Determina la razón con la que cambia su superficie cuando su radio es de unos 25 cm.

166. Un globo es inflado mediante una bomba, la cual le suministra aire a razón de 3 cm^3/min. Determina la razón con la que aumenta el radio cuando este mide 20 cm.

167. Una correa lleva arena a razón de 1 cm^3 por minuto y la acumula formando un cono como se muestra en la figura.

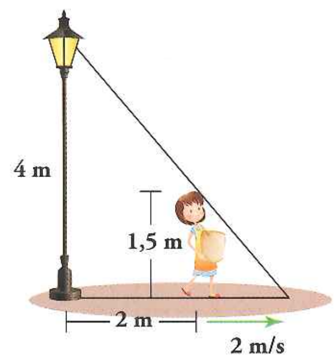
Determina la tasa con la que aumenta el radio cuando la altura es 20 cm.



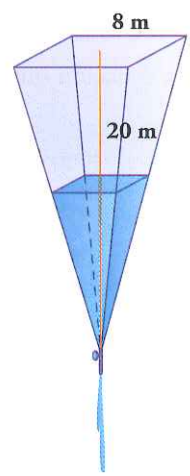
168. Dos automóviles parten desde un cruce recto en forma simultánea. Uno de ellos viaja hacia el norte a 25 km/h mientras que el otro lo hace hacia el oriente a 60 km/h. Encuentra la velocidad a la que aumenta la distancia entre ellos 3 horas y media después de la partida.

169. Dos lados de un triángulo aumentan a razón de 0,1 cm/s y 0,25 cm/s, respectivamente. Si el ángulo entre ellos es 30°, calcula la razón con la que aumenta el área cuando las medidas de estos dos lados son 15 cm y 20 cm.

170. Una niña de 1,5 m de altura se aleja de un farol ubicado a 4 m de altura a razón de 2 m/s. Determina la razón con la que cambia la longitud de la sombra de la niña cuando se encuentra a 2 m de la base del farol.



171. Un tanque tiene forma de pirámide invertida, con base cuadrada, como se observa en la figura.



En la parte inferior del tanque se activa un grifo que comienza a desocuparlo a razón de 1 L/min. Encuentra la tasa a la que disminuye la altura, cuando la profundidad del agua es de 10 m (recuerda que 1 L = 1.000 cm^3).

4. Optimización

Ampliación multimedia   Recurso imprimible

Las **situaciones de optimización** se resuelven mediante la búsqueda de máximos y/o mínimos. Algunas de estas situaciones consisten, por ejemplo, en buscar las ganancias máximas de una producción o la minimización de material usado para la elaboración de determinado producto.

No existe un procedimiento general para resolver las situaciones de optimización, sin embargo, a continuación se propone uno que puede ser de utilidad.

Primero, se traza un esquema y se rotulan o escriben las cantidades proporcionadas o requeridas.

Segundo, se escribe una expresión algebraica para la función, luego, utilizando relaciones entre las variables del problema, se expresa dicha función en términos de una sola variable.

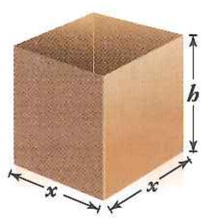
Después, se hallan los números críticos de la función obtenida y se determinan los máximos y los mínimos mediante el uso de la primera y de la segunda derivada.

Finalmente, se verifican los resultados y se escribe la respuesta según las preguntas planteadas.

EJEMPLOS

1. **Se quiere construir una caja abierta con base cuadrada, de modo que su superficie sea 147 cm². ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que el volumen sea el máximo?**

Primero, se definen las variables que se presentan en el problema.



x: lado de la base,

h: altura.

V: volumen

$V = x^2h$ para $x > 0$ y $h > 0$.

Segundo, se expresa el volumen en función de x solamente.

En la expresión V aparecen dos variables que están relacionadas con el dato dado inicialmente en el problema, que corresponde a la superficie de la caja.

$147 = x^2 + 4xh.$

$h = \dfrac{147 - x^2}{4x}$ Se despeja la variable h.

$V(x) = x^2 \cdot \dfrac{147 - x^2}{4x}$ Se remplaza h en la fórmula del volumen.

$V(x) = \dfrac{1}{4}(147x - x^3);\ (x > 0)$ Se simplifica.

El dominio de la función es $[0, \sqrt{147}\,]$, aunque los dos valores extremos no son de interés para este problema, porque en ellos la función se anula.

Tercero, se halla el valor máximo así:

$V'(x) = \dfrac{1}{4}(147 - 3x^2)$ Se halla $V'(x)$.

$\dfrac{1}{4}(147 - 3x^2) = 0$ Se iguala a cero la función derivada.

$147 - 3x^2 = 0$

$3x^2 = 147$

$x^2 = 49$, entonces, $x = \pm 7$.

La solución $x = -7$ no es posible ya que no pertenece al dominio de la función.

Cuarto, se verifica que el valor hallado es un máximo.

$V''(x) = -\dfrac{3}{2}x$ Se halla la segunda derivada de $V(x)$.

$V''(7) = -\dfrac{3}{2}(7)$ Se remplaza $x = 7$ en $V''(x)$.

$V''(7) = -\dfrac{21}{2} < 0$ Luego en $x = 7$ hay un máximo relativo, que también es el máximo absoluto.

Finalmente, se remplaza el valor $x = 7$ en la fórmula de la altura y se halla este valor.

$$h = \frac{147 - x^2}{4x} = \frac{147 - 7^2}{4(7)} = \frac{147 - 49}{28} = \frac{7}{2}$$

Entonces, las dimensiones de la caja cuyo volumen es máximo, son 7 cm de lado de la base por $\dfrac{7}{2}$ cm de alto, para un volumen de 171,5 cm³.

2. **Una compañía productora de latas metálicas tiene un pedido para fabricar latas de 500 cm³ de capacidad. Determinar las dimensiones de las latas para utilizar la menor cantidad de material para su fabricación.**

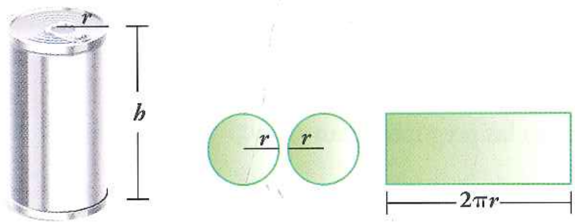
Primero, se determinan las variables que intervienen en el problema.

Altura del cilindro: h y radio de la base: r

El volumen que debe tener cada lata: 500 cm³

La cantidad total del material corresponde al área del cilindro, la cual se expresa mediante la fórmula:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$



Segundo, se expresa la superficie en términos de r así:

Como el volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$, se tiene que $500 = \pi r^2 h$.

Entonces, $h = \dfrac{500}{\pi r^2}$

Se sustituye este dato en la función que expresa la superficie total del cilindro.

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \left(\frac{500}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{1.000}{r}$$

Tercero, se determina la función que se desea minimizar.

El valor r no puede ser negativo ni cero, pero puede ser muy grande, entonces se tiene que la función para minimizar es:

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{1.000}{r} \text{ con } r > 0$$

Cuarto, se calcula la primera derivada y se iguala a cero para determinar los puntos críticos.

$S'(r) = 4\pi r - \dfrac{1.000}{r^2}$ Primera derivada.

$4\pi r - \dfrac{1.000}{r^2} = 0$ Se iguala a cero.

$r = 5\dfrac{\sqrt[3]{2\pi^2}}{\pi}$

Luego, se halla la segunda derivada de $S(r)$ y se aplica el criterio de la segunda derivada.

$S''(r) = 4\pi + \dfrac{2.000}{r^3}$

$$S''\left(5\frac{\sqrt[3]{2\pi^2}}{\pi}\right) = 4\pi + \frac{2.000}{\left(5\frac{\sqrt[3]{2\pi^2}}{\pi}\right)^3} = 12\pi > 0.$$

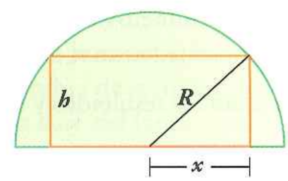
Luego, por el criterio de la segunda derivada, la función tiene un mínimo cuando $r = 5\dfrac{\sqrt[3]{2\pi^2}}{\pi}$.

Finalmente, las dimensiones de la caja son:

$$r \approx 4{,}3 \text{ cm y } h \approx 8{,}6 \text{ cm.}$$

3. **Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área inscrito en el semicírculo de radio R. Luego calcular su área.**

Primero, se realiza un esquema y se determinan las variables del problema.



Base del rectángulo: $2x$ y altura $h = \sqrt{R^2 - x^2}$

El área del rectángulo es:

$$A(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2} \text{ para } 0 \leq x \leq R.$$

Segundo, se determina la función derivada.

$$A'(x) = \frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Tercero, se resuelve la ecuación $A'(x) = 0$.

$$\frac{2R^2 - 4x^2}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 0$$

$$2R^2 - 4x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{R\sqrt{2}}{2}$$

No se considera la solución negativa porque no pertenece al intervalo $0 \leq x \leq R$.

Cuarto, se halla la segunda derivada de $A(x)$.

$$A''(x) = \frac{4x^3 - 6R^2x}{\sqrt{(R^2 - x^2)^3}}$$

Quinto, se calcula $A''\left(\dfrac{R\sqrt{2}}{2}\right)$.

Como $A''\left(\dfrac{R\sqrt{2}}{2}\right) = -8$ y $-8 < 0$, entonces el valor corresponde a un máximo.

Por tanto, el rectángulo de mayor área es el de base $\sqrt{2}\,R$ y altura $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ y su área es R^2.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Modelo • Razono • Soluciono problemas

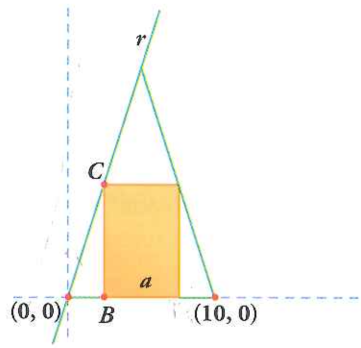
Responde con un ejemplo.

172. ¿Qué es optimizar y cómo se optimiza una función?

173. ¿Cómo se identifica un máximo o un mínimo de una función?

Lee y resuelve.

El triángulo isósceles, descrito en la figura, mide 10 cm de base y 20 cm de altura.

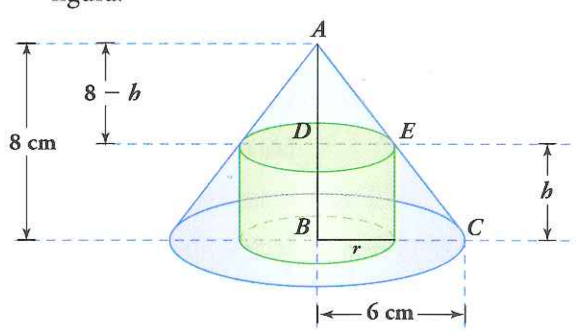


174. Dado el rectángulo inscrito cuya base mide a, calcula las coordenadas de los puntos B y C en función de a.

175. Halla el valor de a que hace máxima el área del rectángulo.

Lee y responde.

176. ¿Cuál es la medida del radio de la base de un cilindro circular recto de volumen máximo, inscrito en un cono circular recto de altura 8 cm y radio de base 6 cm, como se muestra en la figura?



177. Se desea diseñar una tabla con forma de trapecio isósceles, que sea de área máxima, que tenga una altura de 60 cm y en la cual la longitud del perímetro menos la longitud de la base mayor mida 280 cm. ¿Cuáles son las longitudes de todos los lados del trapecio?

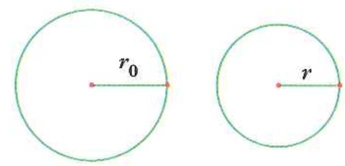
Lee y resuelve.

Cuando una persona tose, el radio de la tráquea disminuye, lo cual afecta la velocidad del paso del aire por este órgano.

Si r_0 y r son, respectivamente, el radio de la tráquea normal y el radio en el momento de toser.

La relación entre la velocidad v y el radio r está dada por $v(r) = ar^2(r_0 - r)$, donde a es una constante positiva que depende de la persona.

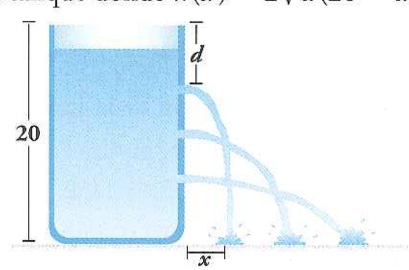
178. Calcula el radio r que permite alcanzar la máxima velocidad v.



Un depósito destinado a la fabricación de aceite extrafino se construye en forma cilíndrica, cerrado en la parte superior por una bóveda semiesférica. El costo de construcción por m² de la parte esférica es el triple que el de la construcción de la parte cilíndrica.

179. Determina las dimensiones del alto h y del ancho a del cilindro, de tal forma que el costo de construcción sea mínimo, para un volumen dado del depósito.

Un tanque cilíndrico con una altura de 20 pies se llena hasta el tope con agua. Si se hace un agujero en la parte lateral del tanque, el flujo de agua que sale del tanque llegará al suelo a una distancia de x pies de la base del tanque donde $x(d) = 2\sqrt{d(20 - d)}$.



180. Encuentra el valor d, para que el alcance sea máximo.

Un granjero tiene 750 metros de alambre para cercar un área rectangular y dividirla en cuatro partes con cercas paralelas a cada uno de los lados del rectángulo.

181. Determina el área total máxima posible de las cuatro partes.

5. Movimiento rectilíneo

Recurso imprimible   Actividad

Las derivadas también tienen aplicaciones en el campo de la física. Un caso que es muy común es el movimiento de una partícula sobre una recta, es decir el movimiento rectilíneo.

El **movimiento rectilíneo** se determina mediante una función de la forma

$s = f(t)$ donde s es la distancia y t es el tiempo.

De esta manera,

- La primera derivada de la función de la distancia $s = f(t)$ determina la **velocidad** v, es decir:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Si $v > 0$ entonces el objeto se mueve en dirección creciente de s.

Si $v < 0$, entonces el objeto se mueve en dirección decreciente de s.

Si $v = 0$, entonces el objeto se encuentra en reposo.

- La segunda derivada de la función de la distancia $s = f(t)$ determina la **aceleración** a, es decir:

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Si $a > 0$ entonces la velocidad v aumenta.

Si $a < 0$, entonces la velocidad v disminuye.

EJEMPLOS

1. Un objeto es lanzando verticalmente hacia arriba desde una determinada altura, a partir del instante en que es lanzado, la posición en metros, en función del tiempo t en segundos, está dada por:

$$h(t) = 4 + 130t - 4{,}9t^2$$

Resolver:

a. ¿Cuál es el valor de la altura inicial?

La altura inicial se obtiene cuando $t = 0$. Así, $h(0) = 4$.

b. Determinar una expresión de la función de la velocidad del objeto.

$h(t) = 4 + 130t - 4{,}9t^2$ Función dada.

$v(t) = h'(t) = 130 - 9{,}8t$ Se deriva la función para hallar la velocidad.

Luego, la función velocidad es $v(t) = 130 - 9{,}8t$.

c. Hallar el punto cuando el objeto está en reposo, después de haber sido lanzado.

$v(t) = 130 - 9{,}8t$ Función velocidad.

$130 - 9{,}8t = 0$ Se iguala a cero la velocidad.

$t = \frac{130}{9{,}8}$ Se despeja t.

En este punto se encuentra su punto más alto y es:

$$h\left(\frac{130}{9{,}8}\right) = 4 + 130\left(\frac{130}{9{,}8}\right) - 4{,}9\left(\frac{130}{9{,}8}\right)^2 \approx 866{,}2 \text{ m}$$

2. La ecuación del movimiento de una partícula viene dada por $s(t) = t^3 + 4t^2$, en donde $s(t)$ y t representan, respectivamente, el espacio en metros, y el tiempo en segundos. Hallar la aceleración instantánea de la partícula en $t = 1{,}5$.

Primero, se halla la función de aceleración.

$s(t) = t^3 + 4t^2$ Función del espacio.

$s'(t) = v(t) = 3t^2 + 8t$ Se deriva $s(t)$.

$v'(t) = a(t) = 6t + 8$ Se deriva $v(t)$.

Luego, la función aceleración es $a(t) = 6t + 8$.

Ahora, se halla la aceleración instantánea en $t = 1{,}5$.

$a(1{,}5) = 6(1{,}5) + 8$

$a(1{,}5) = 17$

Finalmente, la aceleración en $t = 1{,}5$ s es 17 m/s^2.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Modelo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Responde con un ejemplo.

182. ¿Cómo se obtiene la velocidad de una partícula a partir de la función posición?

183. ¿Cómo se obtiene la aceleración de una partícula a partir de la función posición?

Determina la velocidad y la aceleración en cada caso.

184. $s(t) = 8t^3 - 20t^2 + 14t + 32$

185. $s(t) = \sqrt{4 + t^2}$

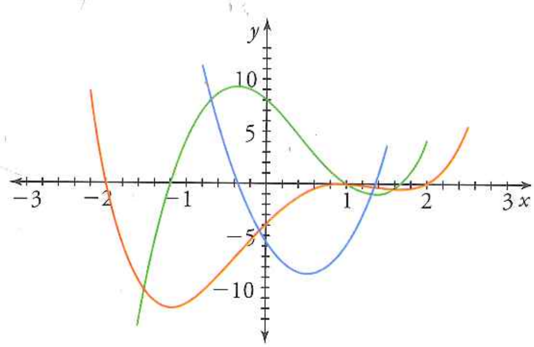
186. $s(t) = -4 \operatorname{sen} (\pi t - 2)$

187. $s(t) = (t + 1)e^{t^2 - 1}$

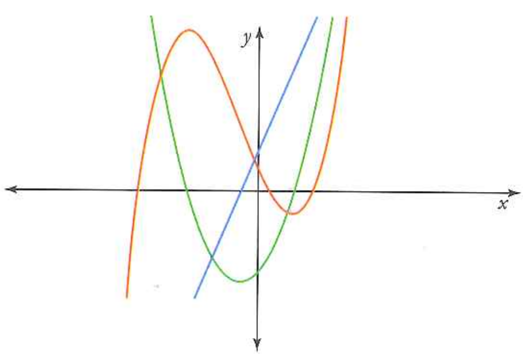
188. $s(t) = t \operatorname{Ln} (t + 1)$

Identifica en cada gráfica la función posición, la función velocidad y la función aceleración. Explica tu respuesta.

189.



190.



Encuentra la velocidad y la aceleración de un punto *p* que se mueve en línea recta, en los instantes que se indican.

191. $f(t) = 2t^3 - \dfrac{5}{4}t^2 + 10t$ en $t = 2$ y $t = 3$.

192. $f(t) = \dfrac{4 - t}{2t^2 + 5t - 1}$ en $t = 1$ y $t = 2{,}5$.

193. $f(t) = 5 \operatorname{sen} t \cos t$ en $t = \dfrac{\pi}{2}$ y $t = \dfrac{5\pi}{6}$.

Determina el error de la descripción del movimiento. Justifica tu respuesta.

Una partícula se mueve a lo largo de una línea horizontal según la expresión:

$$s(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$$

194. En el intervalo $t < 1$, $v < 0$ y $a > 0$ la aceleración disminuye.

195. En el intervalo $1 < t < 2$, $v < 0$ y $a < 0$ la aceleración aumenta.

196. En el intervalo $2 < t < 2{,}5$, $v > 0$ y $a > 0$ la aceleración disminuye.

197. En el intervalo $t > 2{,}5$, $v > 0$ y $a > 0$ la aceleración aumenta.

Lee y resuelve.

El espacio recorrido por un móvil sobre una vía horizontal, con respecto a un punto fijo, viene dado en función del tiempo mediante la expresión:

$$s(t) = 3t^4 - 44t^3 + 144t^2$$

198. Halla el intervalo de tiempo en el cual el móvil marcha en sentido contrario al inicial.

El espacio recorrido por un móvil en línea recta viene dado por la expresión $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$.

199. Determina cuándo aumenta s, cuándo aumenta v y cuándo cambia el sentido del movimiento.

La altura de un peso que se encuentra colgado de un muelle, se expresa mediante la función:

$$f(t) = \frac{3}{4}\cos 4t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4t$$

donde $f(t)$ está medida en centímetros y t en segundos.

200. Calcula la altura y la velocidad cuando $t = \dfrac{\pi}{3}$ s.

El movimiento de una partícula está dado por la ecuación $s(t) = 2t^4 + 3t - 4$ donde el espacio $s(t)$, está en kilómetros, en función del tiempo t, en horas.

201. Determina la ecuación de la velocidad instantánea de la partícula.

202. Calcula la velocidad instantánea de la partícula cuando $t = 1$.

203. Determina la aceleración instantánea de la partícula en el instante $t = 2$.

6. Funciones económicas

Las definiciones de derivadas se aplican también en las funciones de economía.

Para esto, es importante unificar algunos términos y su relación con las derivadas.

- **Función Costo**, $C(x)$. Describe el costo total de producir x unidades de algún artículo.
- **Función Precio**, $P(x)$. Precio de venta unitario para una cantidad x de artículos en un período de tiempo fijo.
- **Función Ingreso**, $I(x)$. Representa el ingreso total recibido por vender x unidades de algún artículo $I(x) = xP(x)$ (precio por unidad).
- **Función Utilidad**, $U(x)$. Expresa la ganancia que se obtiene por una cantidad x de artículos. La función se define como $U(x) = I(x) - C(x)$.
- **Función Costo marginal**, Cm. Corresponde a los costos adicionales por x unidades.

  La función costo marginal se obtiene al derivar la función costo: $Cm = C'(x)$.
- **Función Ingreso marginal**, Im. Ingresos adicionales por x unidades.

  La función ingreso marginal se obtiene al derivar la función ingreso: $Im = I'(x)$.
- **Función Precio marginal**, Pm. Corresponde al precio adicional de una cantidad x de artículos.

  La función precio marginal se obtiene al derivar la función precio: $Pm = P'(x)$.

EJEMPLOS

La empresa de tecnología "Technews" ofrece a su clientela aplicaciones financieras para celulares *smartphone*. La función que define el costo de x aplicaciones está dada por la expresión $C(x) = 6.250x - 0{,}03x^2$. Si la fábrica vende durante un semestre 12.500 aplicaciones a \$12.000 cada uno:

a. ¿Qué utilidad recibe la empresa?

$U(x) = I(x) - C(x)$ — Se aplica definición de función utilidad.

$= xP(x) - C(x)$ — Se aplica definición de función ingreso.

$= 12.000x - (6.250x - 0{,}03x^2)$ — Se remplaza $C(x)$.

$= 5.750x + 0{,}03x^2$ — Se resuelven las operaciones.

Luego, para 12.500 aplicaciones se tiene que:

$U(12.500) = 5.750(12.500) + 0{,}03(12.500)^2 = 76.562.500$

Finalmente, la empresa recibe una ganancia de \$ 76.562.500 por la venta de las 12.500 aplicaciones.

b. Si se venden 200 aplicaciones más, ¿cuál es el costo marginal de la producción?

$C(x) = 6.250x - 0{,}03x^2$ — Función costo.

$Cm(x) = C'(x) = 6.250 - 0{,}06x$ — Se aplica definición de costo marginal.

Ahora, el costo marginal para 200 aplicaciones más es:

$Cm\,(200) = 6.250 - 0{,}06(200) = 6.238$

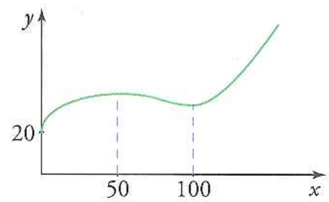
Finalmente, el costo marginal de producir 200 aplicaciones es de \$6.238.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Modelo • Razono • Soluciono problemas

Lee, observa y resuelve.

La siguiente gráfica muestra el costo total de producir x cantidad de *jeans*.



204. Escribe el significado de $C(0)$.

205. Elabora un párrafo en el que se indique cómo cambia el costo marginal a medida que la cantidad producida aumenta.

206. En términos económicos, ¿cuál es el significado de la concavidad de la gráfica?

207. Explica en términos de costo marginal el punto en que cambia la concavidad.

Lee y resuelve.

El costo total de producir y almacenar x llantas para automóviles está dada por la expresión:

$$C(x) = 0,35x + \frac{250.000}{x} + 500.000$$

Además, el ingreso por la venta de x llantas es

$$I(x) = \frac{45.500.000}{1 + e^{0,8(10 - x)}}$$

208. Determina el costo marginal y el ingreso marginal.

209. Si se vende durante abril 9.700 unidades a \$120.000 cada una, ¿qué utilidad recibe la fábrica?

Una empresa de artículos de aseo estima que el costo de producción de x unidades de cierto detergente de consumo está dado por la función:

$$C(x) = 200 + \frac{5}{100}x + \frac{1}{10.000}x^2$$

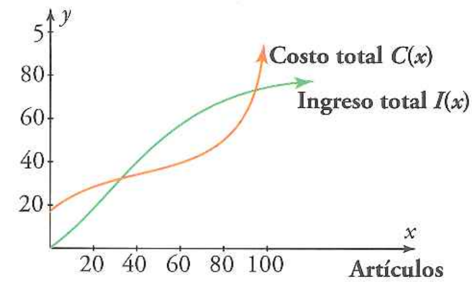
210. Halla el costo medio por producir 500 unidades.

211. Encuentra el costo marginal por producir 1.000 unidades.

212. Determina el número de unidades para el cual el costo promedio es mínimo.

Lee, observa y resuelve.

El costo de producir cierto artículo en una fábrica y el ingreso total se muestran en la siguiente gráfica.



213. Indica en qué cantidades de artículos la empresa tiene pérdidas.

214. Indica en qué cantidades de artículos la empresa tiene ganancias.

215. Determina cuándo hay máxima utilidad.

216. Determina cuándo hay una utilidad mínima.

217. Realiza la gráfica de $C'(x)$ sobre la gráfica dada. Luego, en el mismo plano, traza la gráfica aproximada de $I'(x)$.

Lee y resuelve.

Las ventas de un nuevo computador portátil están dadas por la función $v(x) = 150x - 5x^2$, unidades por mes, a los x meses después de su lanzamiento.

El precio, está dado por $p(x) = 2.000 - 0,8x^2$ en miles de pesos, a los x meses después de su lanzamiento. Los ingresos por la venta se pueden expresar como

$$I(x) = 90v(x) \cdot p(x).$$

218. Determina el ingreso marginal, 6 meses después del lanzamiento del producto.

La demanda de un celular está dada por la función:

$$q = -5p^3 + 20p^2 + 450$$

Donde $100 < p < 250$ y q es la cantidad de unidades vendidas por semana, cuando el precio es p miles de pesos.

219. Determina la elasticidad de demanda si esta se define como: $E = -\frac{dq}{dp}\frac{p}{q}$.

220. Calcula la elasticidad de demanda para el equipo cuando tiene un precio de 200 mil pesos.

7. Regla de L'Hôpital

Ampliación multimedia

Recuerda que...

La regla de L'Hôpital también aplica para límites al infinito y para límites laterales. Además, la regla se puede aplicar varias veces para eliminar la indeterminación.

La derivación también se aplica para facilitar algunas operaciones dentro del mismo cálculo. La **regla de L'Hôpital** es un método que permite calcular límites de funciones racionales para sus formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$. A continuación se define la regla de L'Hôpital.

Caso cero sobre cero

Sea a un número real, f y g funciones derivables en un intervalo abierto que contine al número a (excepto posiblemente en $x = a$), tales que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Caso infinito sobre infinito

Sean f y g definidas y derivables para todos los x mayores que cierto número fijo.

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces,

$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

EJEMPLOS

Hallar los siguientes límites.

a. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 1}$

Primero, se verifica que $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = x^2 - 1$ cumplan las condiciones del teorema de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 1} x^3 - x = 0 \qquad \lim_{x\to 1} x^2 - 1 = 0$$

Luego, se aplica la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 1}{2x}$$

Finalmente, se calcula el último límite.

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 1}{2x} = \frac{3(1)^2 - 1}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

Por tanto, $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 1} = 1$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\text{sen } x}$

Primero, se verifica que $f(x) = x$ y $g(x) = \text{sen } x$ cumplan las condiciones del teorema de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} x = 0 \text{ y } \lim_{x\to 0} \text{sen } x = 0$$

Luego, se aplica la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

Finalmente, se calcula el último límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

c. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x}$

Primero, se verifica que $f(x) = e^x$ y $g(x) = x$ cumplan las condiciones del teorema de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \text{ y } \lim_{x\to\infty} x = \infty$$

Luego, se aplica la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1}$$

Finalmente, se calcula el último límite.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = e^\infty = \infty$$

d. $\lim_{x\to 1} \frac{\text{Ln } x}{x^2 - x}$

Primero, se verifica que $f(x) = \text{Ln } x$ y $g(x) = x^2 - x$ cumplan las condiciones del teorema de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 1} \text{Ln } x = 0 \text{ y } \lim_{x\to 1} x^2 - x = 0$$

Luego, se aplica la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x(2x - 1)}$$

Finalmente, se calcula el último límite.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x(2x - 1)} = \frac{1}{1(2(1) - 1)}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono

Responde las siguientes preguntas.

221. ¿A qué tipo de indeterminaciones en un límite es posible aplicar la regla de L'Hôpital?

222. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ con f y g funciones diferenciables, ¿es posible aplicar regla de L'Hôpital para determinar $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$?

Desarrolla los siguientes límites utilizando la regla de L'Hôpital.

223. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + x - 12}{4x^2 - 36}$

224. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{x^3 + 8}$

225. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{2x + 1} - 3}$

226. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{e^x - 1}$

227. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^3 x}{\cos x - 1}$

228. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2^x - 5x + 7}{x^2 - 9}$

229. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}$

230. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x^2}{3x}$

231. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3\cos(\pi x) - 2x + 1}{\tan\left(\dfrac{\pi x}{8}\right) + x - 3}$

232. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen} x \cos x}$

233. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{40^x - 5^x}{14^x - 7^x}$

234. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{Ln}(\cos 6x)}{\operatorname{Ln}(\cos 3x)}$

235. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos ax - 1}{\cos bx - 1}$

236. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\operatorname{Ln} x}$

237. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 + x - 30}{125 - x^3}$

238. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 4x^2 - 2x - 3}{2x^3 + 5x^2 - 7}$

239. $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{5x^2 + 12x - 620}{x^2 - 100}$

Determina el valor de los siguientes límites en el infinito.

240. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 5x} + 3}{2x - 1}$

241. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^{-x}}{\arctan x - \dfrac{\pi}{2}}$

242. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x^4 - 12x^3 + 5x + 8}{14x^4 + 9x - 2}$

Considera la función.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

243. Demuestra que f es continua en cualquier número real.

244. ¿f es diferenciable en $x = 0$?

Resuelve los siguientes problemas justificando tus respuestas.

245. ¿Cuál es el valor de $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{mx + b}{e^x}$?

246. Determina el valor de $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax^2 + bx + c}{e^x}$.

247. ¿Qué conclusión puedes obtener a partir de las respuestas de las dos preguntas anteriores?

Considera el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^7 - 5x^6 + 2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x}{2x^7 + 3x^5 - x^4 + x^3 - 2x - 3}$$

248. Determina el valor del límite factorizando numerador y denominador.

249. Comprueba el valor del límite utilizando la regla de L'Hôpital.

250. Propón un ejemplo en el cual sea más práctico utilizar factorización que la regla de L'Hôpital.

251. Consulta cómo se utiliza la regla de L'Hôpital para resolver límites con indeterminaciones de la forma 1^∞.

Lo que viene...

En la siguiente unidad trabajarás integración matemática. Consulta el significado de antiderivada y escríbelo en tu cuaderno. Escribe de qué grado es la antiderivada de una función cuadrática.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS EN LA ELECTRICIDAD

Circuito

Para hacer funcionar un artefacto eléctrico es necesario lograr que los electrones libres se muevan en una dirección en el interior de los conductores. A la causa de este movimiento se le conoce como **fuerza electromotriz**.

Un generador de fuerza electromotriz para encender un automóvil, presenta un valor constante c y una resistencia interna R_i que está conectada a una resistencia de carga R.

En estas condiciones, la potencia P disipada por la resistencia R se expresa como:

$$P(R) = \frac{Rc^2}{(R + R_i)^2}$$

Donde, R y R_i se mide en ohmios y c en voltios.

El valor de R para que la potencia sea máxima es: $R = R_i$.

Además, el valor de la potencia es:

$$P = \frac{c^2}{4R_i}$$

En el futuro los automóviles serán 100% eléctricos, de tal forma se minimizarán los impactos ambientales.

Otras aplicaciones

Resonancia mecánica

Los puentes colgantes son un ejemplo de cuerpos que oscilan, debido a fuerzas naturales como vientos o huracanes.

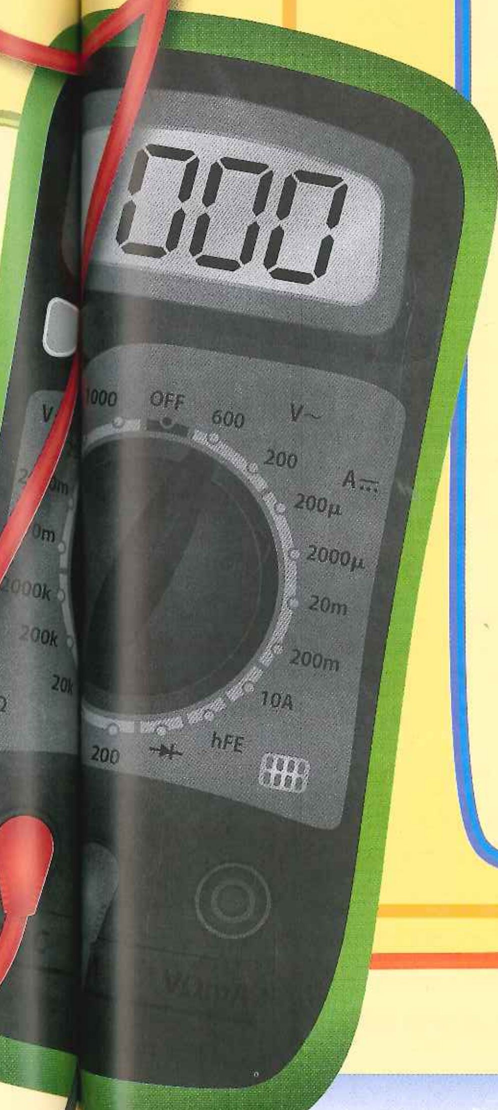
Un cuerpo de masa m, oscila sometido a la acción de una fuerza F de variación sinusoidal y frecuencia angular ω: $F = F_0 \operatorname{sen}(\omega t)$ en un medio que ofrece resistencia al movimiento.

En este caso la amplitud A de la oscilación está dada por la expresión:

$A(\omega) = \dfrac{C_1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c_2\omega^2}}$ donde, ω_0, c_1, c_2 son constantes y

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K}{m}}$.

El valor ω que hace máxima la amplitud A es: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{c_2}{2}}$.



Iluminación

La intensidad de iluminación E en lux que produce un foco luminoso puntual está dada por: $E = \frac{kI}{d^2}$, donde I es la intensidad en candelas, d es la distancia en metros y k es una constante.

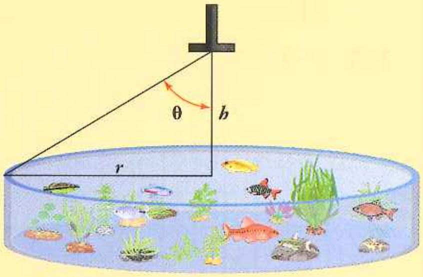
Dos focos luminosos se encuentran a una distancia L, con intensidades I_1 e I_2, la función de iluminación para el punto Q ubicado a x metros del foco 1, como se muestra en la figura está dado por:

$$E = \frac{kI_1}{x^2} + \frac{kI_2}{(L-x)^2} = k\left[\frac{I_1}{x^2} + \frac{I_2}{(L-x)^2}\right]$$

El valor de x que hace mínima la iluminación es:

$$x = \frac{\sqrt[3]{I_1}\, L}{\sqrt[3]{I_1} + \sqrt[3]{I_2}}$$

Para iluminar un acuario de forma circular de radio r, se utiliza una lámpara de altura ajustable ubicada sobre la vertical que pasa por el centro del círculo, como se muestra en la figura.

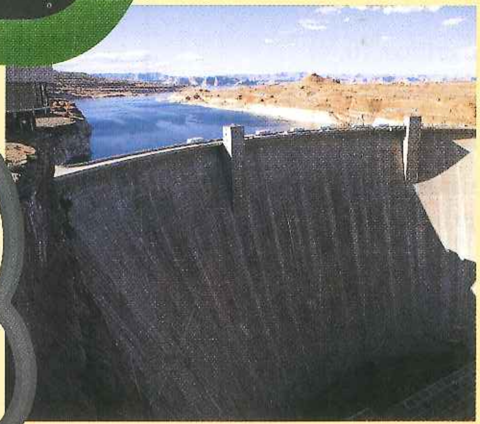


La iluminación E en el borde del estanque está dada por:

$$E(\theta) = \frac{I\cos\theta\,\text{sen}^2\,\theta}{r^2} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

El valor de h para la máxima iluminación es

$$h = \frac{\sqrt{2}\,r}{2}.$$



Flujo de agua

En las represas, cuando hay una saturación de agua, esta se debe evacuar en forma controlada para que los daños sean mínimos.

La energía debida al flujo de agua en un canal abierto de sección rectangular está dada por la expresión:

$$E = y + \frac{q^2}{2gy^2}$$

Donde y es la profundidad del flujo en el canal y g es la aceleración de gravedad 9,8. Donde q es el caudal que se considera constante.

El valor de y para que la energía específica sea la mínima es:

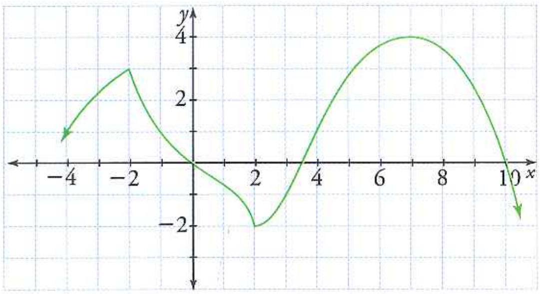
$$y = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}.$$

EJERCICIOS PARA REPASAR

Valores máximo y mínimo

Determina el valor máximo absoluto y el valor mínimo absoluto de cada función en el intervalo dado.

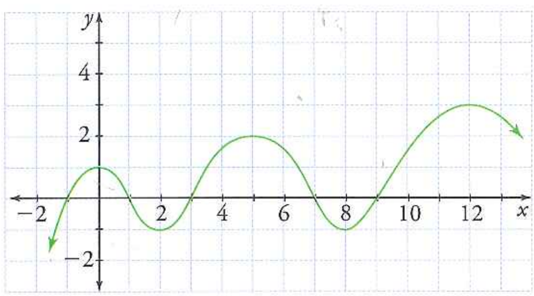
252. $(-2, 9)$



Máximo absoluto: ____________________

Mínimo absoluto: ____________________

253. $(-1, 13)$



Máximo absoluto: ____________________

Mínimo absoluto: ____________________

Uso de la primera derivada

Verifica si la función cumple las condiciones del teorema de Rolle y encuentra los valores de c que lo cumplen:

254. $f(x) = \text{sen } 2x$ en $(0, 2\pi)$.

Aplica el criterio de la primera derivada para hallar los extremos relativos de la función dada en cada caso. Luego, traza su gráfica en el cuaderno.

255. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, \text{ si } |x| \leqslant 1 \\ x^2 - 1, \text{ si } 1 < |x| < 2 \end{cases}$

Extremos relativos:

____

____

____

256. $f(x) = 2x^3 + 2 - 6x^2$

Extremos relativos:

____

____

____

Determina los intervalos para los cuales cada función es creciente y decreciente.

257. $f(x) = \cos x$

Es creciente en: ____________________

Es decreciente en: ____________________

258. $f(x) = \text{Ln } x$

Es creciente en: ____________________

Es decreciente en: ____________________

Determina si los valores dados son puntos críticos de cada función. Justifica tu respuesta.

259. $f(x) = 7x(x + 35)$

Puntos críticos: $\left(-2,5; -\frac{175}{4}\right)$

____

260. $f(x) = x^2 + 4x + 4$

Punto crítico: $(0, 4)$

____

261. **Completa la tabla y esboza la gráfica de la función que cumple las condiciones dadas a continuación.**

Puntos críticos: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$

Intervalo	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $f'(x)$	Positivo	Negativo	Negativo	Positivo
Conclusión				

Uso de la segunda derivada

Determina los intervalos de concavidad y los intervalos de inflexión de cada función.

262. $h(x) = x^4 - 2x^3$

- $h(x)$ es cóncava hacia arriba en:
- $h(x)$ es cóncava hacia abajo en:
- Puntos de inflexión:

263. $i(x) = \dfrac{x}{x+2}$

- $i(x)$ es cóncava hacia arriba en:
- $i(x)$ es cóncava hacia abajo en:
- Puntos de inflexión:

264. **Determina los extremos relativos de la función $j(x) = -9x^4 + 2x^3 + 6x^2$ utilizando el criterio de la segunda derivada. Luego, traza la gráfica correspondiente.**

- Puntos críticos:
- Máximo relativo:
- Mínimos relativos:

La gráfica de la función es:

265. **Completa la tabla para la función $m(x) = x\,\mathrm{Ln}\,x$. Luego realiza la gráfica correspondiente.**

Dominio	
Intersección con los ejes	
Asíntotas	
Simetría	
Primera derivada de m	
Puntos críticos	
Intervalos de crecimiento y decrecimiento	
Segunda derivada de m	
Puntos de inflexión	
Intervalos de concavidad	
Valores extremos	

Gráfica de la función:

Diferenciales

Calcula dy para cada función.

266. $y = \mathrm{sen}(x + 6)$

$dy =$

267. $y = 5x^3 - 2x + 9$

$dy =$

268. $y = \sqrt{3x^2 + 6}$

$dy =$

Regla de L´Hôpital

Calcula los siguientes límites.

269. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x - \mathrm{sen}\,x}{x}$

270. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - \sqrt[3]{x}}{\mathrm{Ln}\,x}$

PROBLEMAS PARA REPASAR

Se ha estimado que el consumo de electricidad en una empresa, desde las 8 hasta las 17 horas sigue la función:

$$E(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}36t^2 + 4{,}05t - 10$$

donde t pertenece al intervalo $(8, 17)$ y $e(t)$ está dado en miles de voltios.

¿Cuál es el consumo a las 10 horas? ¿En qué momento del día el consumo es máximo? ¿Cuándo el consumo es mínimo? ¿En qué horas del día el consumo de electricidad se incrementa?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál es el consumo a las 10 horas?

¿En qué momento del día el consumo es máximo? ¿Cuándo el consumo es mínimo?

¿En qué horas del día el consumo de electricidad se incrementa?

¿Cuáles son los datos del problema?

El consumo de electricidad de la empresa, entre las 8 y las 17 horas se modela mediante la siguiente función: $E(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}36t^2 + 4{,}05t - 10$.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Para hallar el consumo entre las 10 horas se remplaza t por 10 en la función así:

$E(t) = 0{,}01(10)^3 - 0{,}36(10)^2 + 4{,}05(10) - 10 = 4{,}5$.

Luego $4{,}5 \times 1.000 = 4.500$ voltios.

Para determinar el momento del día en que hay un máximo consumo y un mínimo consumo de electricidad, se hallan los puntos críticos de la función, mediante la primera derivada.

$E'(t) = 0{,}03t^2 - 0{,}72t + 4{,}05$ Se halla la primera derivada de $E(t)$.

$0{,}03t^2 - 0{,}72t + 4{,}05 = 0$ Se iguala a cero la primera derivada.

$3t^2 - 72t + 405 = 0$ Se multiplica por 100 a ambos lados.

$3(t - 15)(t - 9) = 0$ Se factoriza.

$t - 15 = 0$ o $t - 9 = 0$ Se iguala a cero cada paréntesis.

$t = 15$ o $t = 9$ Se despeja t.

Se tiene que los puntos críticos son $t = 9$ y $t = 15$.

Luego, con el criterio de la segunda derivada se determina cuál de esos puntos hallados es un máximo y cuál es un mínimo.

$E''(t) = 0{,}06t - 0{,}72$ Se halla la segunda derivada de $E(t)$.

$E''(9) = 0{,}06(9) - 0{,}72 = -0{,}18$ y $-0{,}18 < 0$, entonces, la función tiene un máximo.

$E''(15) = 0{,}06(15) - 0{,}72 = 0{,}18$ y $0{,}18 > 0$, entonces, la función tiene un mínimo.

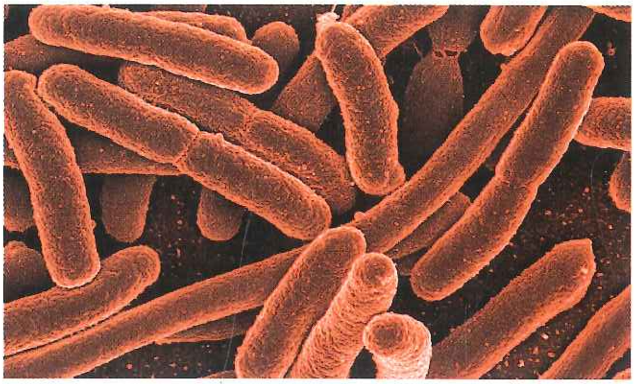
Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

El consumo a las 10 horas es de 4.500 voltios en esa empresa, el consumo es máximo a las 9 horas y es mínimo a las 15 horas. Como $t = 9$ es un máximo, el consumo crece de las 8 horas a las 9 horas. Igualmente, como $t = 15$ es un mínimo, el consumo crece de las 15 horas a las 17 horas.

Resuelve los ejercicios 271 a 275 de acuerdo con la siguiente información.

Un investigador está probando la acción de un medicamento sobre una bacteria. Comprobó que el número de bacterias, N, varía con el tiempo t, una vez suministrado el medicamento, según la función:

$$N(t) = 20t^3 - 510t^2 + 3.600t + 2.000$$



271. ¿Cuántas bacterias había en el momento de suministrar el medicamento? ¿Y al cabo de 10 horas?

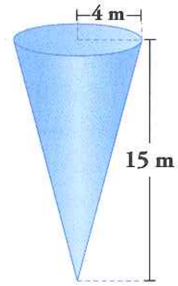
272. En ese momento, ¿el número de bacterias está creciendo o disminuyendo?

273. ¿Cuál es el momento en el que la acción del medicamento es máxima?

274. ¿En qué momento empieza a notarse el efecto del medicamento?

275. ¿En qué momento empieza a perderse el efecto del medicamento?

276. El depósito de la figura tiene forma de cono circular invertido. Si se está llenando con agua a razón de 3 m^3/min, ¿qué tan rápido sube su nivel de agua cuando ya ha alcanzado 10 metros de altura?



Responde las preguntas 277 a 279 a partir de la siguiente información.

Una empresa de alimentos calcula que el costo de producir x unidades de galletas está dado por la función:

$$C(x) = \frac{1}{1.000}x^2 + \frac{9}{100}x + \frac{1}{10},$$

donde $C(x)$ está dado en pesos.

277. Determina el costo medio para producir 500 unidades.

278. ¿Cuál es el costo marginal de producir 1.000 unidades?

279. ¿Cuál es el número de unidades para el cual el costo medio es el mínimo?

... Para saber cuándo se pueden consumir los frutos de una cosecha.

Galería de imágenes

Una cosecha se recoge antes de que el fruto esté en el momento de maduración, ya que así se pueden seleccionar, empacar y transportar frutos de mejor calidad, de tal manera que estén aptos para el consumo humano. La maduración de un fruto se obtiene cuando este logra la máxima concentración de sacarosa, es decir, cuando alcanza la máxima concentración de azúcar.

Existen diversos factores que afectan la maduración. Ellos son:

El **agua:** juega un papel importante en los procesos de transporte de sustancias y fotosíntesis.

El suministro de agua debe ser adecuado para que absorba correctamente los nutrientes del suelo.

La **temperatura:** acelera los procesos metabólicos. Es un factor difícil de controlar ya que altera notablemente los tiempos del cultivo.

La **luz:** es una fuente importante de energía para el proceso de fotosíntesis. Su reducción disminuye la elaboración de azúcares durante el proceso.

Los **nutrientes:** permiten el desarrollo óptimo de la planta. El fósforo, el nitrógeno o el potasio son indispensables aunque su exceso también la puede dañar.

Además de estos factores, la maduración de las plantas depende también de una hormona denominada etileno, que impulsa o impide el desarrollo celular, según la época del año.

Para los cultivos tecnificados, por lo general, se utilizan modelos matemáticos con el fin de determinar la curva de maduración de los frutos. Estos modelos relacionan la concentración de azúcar en los frutos C en función del tiempo t, medida en grados Brix en símbolos se escribe °Bx, en días de maduración. Esta relación cambia para cada fruto y lugar.

Por ejemplo, la curva de maduración para un fruto en un lugar determinado se puede representar mediante la expresión:

$$C(t) = -0{,}02t^2 + 1{,}6t + 3$$

Donde t es el tiempo de maduración en días.

Para encontrar el día de máxima concentración de azúcar en el fruto se debe hallar el punto máximo así:

Primero, se calcula derivada de la función.

$$C'(t) = -0{,}04t + 1{,}6$$

Segundo, se iguala a cero y despeja t.

$$-0{,}04t + 1{,}6 = 0$$

$$t = \frac{-1{,}6}{-0{,}04} = 40$$

Luego, se calcula la segunda derivada y se aplica su criterio para verificar si en ese punto hay un máximo o mínimo.

$$C''(t) = -0{,}04$$

Como $C''(t) < 0$, entonces, en $t = 40$ hay un máximo relativo.

Esto indica que la concentración máxima de azúcar en el fruto se logra en el día 40, para lo cual es conveniente consumir el fruto de la cosecha.

1. **Realiza la gráfica de concentración de azúcar en °Bx en función del tiempo de maduración en días, para la función dada anteriormente. Luego, comprueba gráficamente el punto máximo de maduración.**
2. **La siguiente expresión representa la concentración de azúcar de la piña en función del tiempo en días.**

$$C(t) = -0{,}001t^2 + 0{,}78t + 2$$

¿Cuántos meses tarda en madurar al máximo la piña?

3. **¿Por qué es importante la tecnificación de los cultivos?**
4. **Consulta qué significan los grados Brix en la concentración de azúcar de una sustancia.**

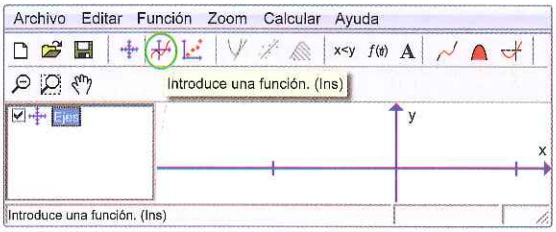
Trabaja con Graph

Objetivo: aplicar los criterios de la primera y segunda derivada de una función, con el fin de determinar puntos críticos.

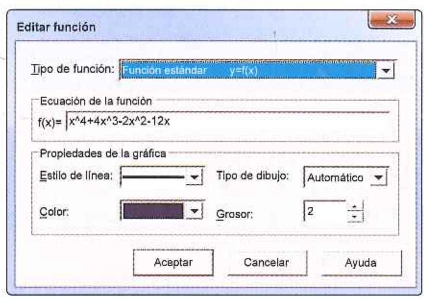
Descripción: hallar máximos y mínimos relativos de una función polinómica, identificar los puntos de inflexión.

Para acceder a Graph, ingresa y descarga el programa en: gratis.portalprogramas.com

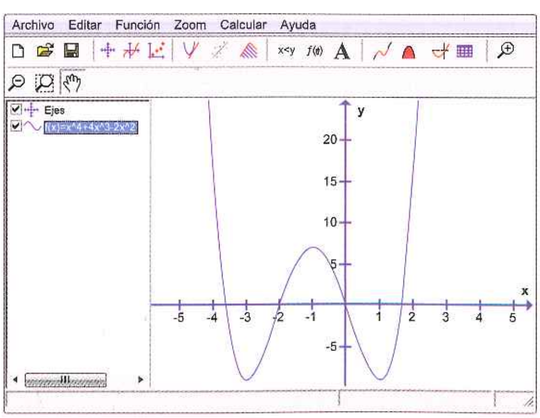
1. Haz clic en Graph.
2. Selecciona **Introduce una función**, para ingresar funciones, como se muestra en la figura.



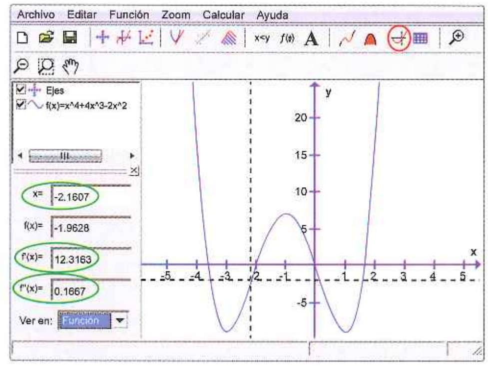
3. Ingresa la función $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x$ en la ventana que se despliega. Luego, cambia el aspecto de la gráfica de la función con las herramientas indicadas, como se muestra en la figura.



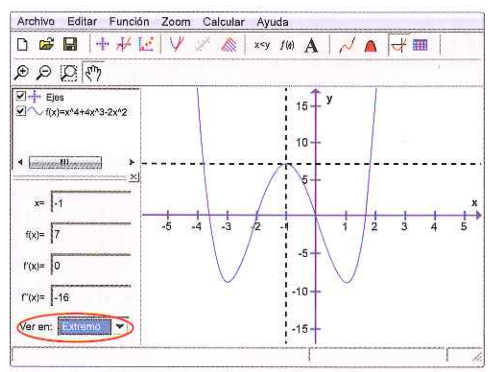
4. Cambia los valores mínimos y máximos de los ejes coordenados. Luego, haz clic en **Aceptar** para que la gráfica de la función tenga la siguiente apariencia.



5. Evalúa los puntos de la función $f(x)$. Luego, observa los valores respectivos de la primera y segunda derivada, como se muestra en la figura.



6. Señala los intervalos donde la primera derivada de la función es positiva o negativa. Luego, compárala con la gráfica de la función. Después indica los intervalos donde la segunda derivada de la función es positiva o negativa. Luego, compárala con la gráfica de la función.
7. Selecciona **Extremo**, con el fin de identificar los máximos y mínimos relativos. Luego, verifica los criterios de la primera y segunda derivada.



8. Encuentra los puntos de inflexión de cada una de las siguientes funciones:

   a. $f(x) = 24x^4 - 6x^3 - 9x^2$

   b. $g(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + x^2$

   c. $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

7 Integrales

Estándares: pensamientos numérico y variacional

→ Tu plan de trabajo...

- Comprender el **concepto de integral**.
- Establecer la diferencia entre **integral definida e indefinida**.
- Establecer **relaciones entre derivación e integración**.
- Reconocer y aplicar los **métodos de integración**.
- **Aplicar la integración a la solución de problemas.**

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Por competencias

- **7** Multimedia
- **1** Galería
- **5** Actividades
- **1** Audio
- **7** Imprimibles
- **2** Enlaces web

Lo que sabes...

1. Relaciona cada función con su derivada.

a. $f(x) = x - 2$ ( ) $f'(x) = -(\text{sen}\, x + \cos x)$

b. $f(x) = \cos x - \text{sen}\, x$ ( ) $f'(x) = 2(3x + 1)$

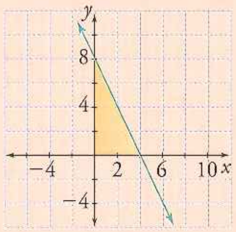
c. $f(x) = \tan x - \text{sen}\, x$ ( ) $f'(x) = 1$

d. $f(x) = 3x^2 + 2x$ ( ) $f'(x) = e^x$

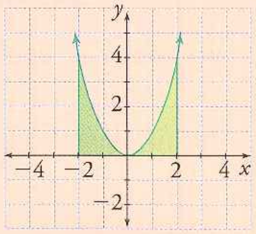
e. $f(x) = e^x$ ( ) $f'(x) = \sec^2 x - \cos x$

2. Escribe las funciones que delimitan cada región sombreada en las siguientes gráficas.

a.



b.



Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

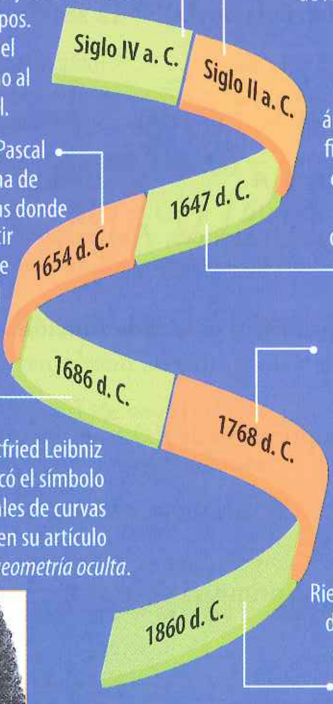
...Para determinar la altura de los árboles.

Por lo general, en la naturaleza se pueden encontrar diferentes razones de cambio de ciertas características físicas, tales como el tamaño y la edad de las plantas y de los animales.

En el caso de los árboles, algunas especies logran crecer hasta más de 100 metros y pueden permanecer por cerca de 2.500 años en condiciones ideales como la *secuoya*.

Lee más acerca de este tema en la página 280.

Cronología de las integrales



Grecia. Eudoxo de Cnidos inventó el método de exhaución, que consiste en descomponer partes infinitamente pequeñas, para luego componerlas y conseguir áreas y volúmenes de superficies y cuerpos. Este método es el equivalente griego al cálculo integral.

Grecia. Arquímedes utilizó el método de exhaución para calcular volúmenes de sólidos de revolución.

Italia. Bonaventura Cavalieri afirmó que el área o el volumen de una figura plana o curva está construida por infinitos indivisibles. Esta es definición generalizada de integral.

Francia. Blaise Pascal trabajó con suma de potencias numéricas donde explicó que a partir de este método se podía calcular el área bajo las curvas.

Alemania. Gottfried Leibniz introdujo y explicó el símbolo $\int$ para las integrales de curvas trascendentales en su artículo titulado *Sobre una geometría oculta*.

Suiza. Leonhard Euler publicó su obra sobre el cálculo integral que se utiliza actualmente como base de textos de cálculo y ecuaciones diferenciales.

Alemania. Benhard Riemann introdujo el cálculo de integrales a funciones discontinuas utilizando integrales definidas.

1. Antiderivada e integral indefinida

Hasta ahora se ha estudiado el concepto de derivada de una función; no obstante, muchas aplicaciones del cálculo se desarrollan a partir de un problema inverso: dada la derivada de una función, determinar la función original.

1.1 Antiderivadas

Ampliación multimedia

La función $F(x)$ es una **antiderivada** o **función primitiva** de la función $f(x)$ si se cumple que $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in \text{Dom } f$.

Por ejemplo, las funciones $F_1(x) = 3x^2 + 2x - 5$ y $F_2(x) = 3x^2 + 2x + 10$ son antiderivadas de la función $f(x) = 6x + 2$; porque al derivar $F_1(x) = 3x^2 + 2x - 5$ se tiene $F_1'(x) = 6x + 2$. Además, al derivar $F_2(x) = 3x^2 + 2x + 10$ se tiene $F_2'(x) = 6x + 2$.

Las dos funciones son antiderivadas de la misma función, esto se debe a que la derivada de las constantes -5 y 10 son cero.

De esta forma una función puede tener infinitas antiderivadas. En la figura 1 se muestran algunas de las antiderivadas de la función $f(x) = 6x + 2$.

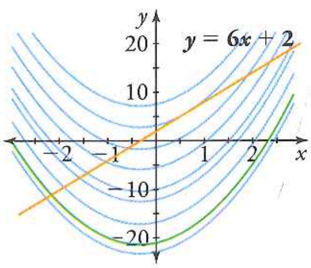


Figura 1.

Por el **teorema del valor medio**, se tiene que si dos funciones tienen la misma derivada en un intervalo, entonces, estas funciones solo difieren en una constante.

Si F es una antiderivada de f, entonces, la antiderivada general de f es $F(x) + C$, siendo C un valor constante.

EJEMPLOS

1. **Comprobar que la función $F(x) = -4 \cos 3x + 4x$ es una antiderivada de $f(x) = 12 \text{ sen } 3x + 4$.**

$F(x) = -4 \cos 3x + 4x$ — Función dada.

$F'(x) = [-4(-\text{sen } 3x)(3)] + [4]$ — Se deriva implícitamente.

$F'(x) = 12 \text{ sen } 3x + 4$ — Se simplifica.

Como $F'(x) = f(x)$, entonces, $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$.

2. **Hallar una primitiva para cada función.**

a. $f(x) = e^x$

$F(x) = e^x$ es una primitiva de $f(x) = e^x$, ya que $F'(x) = e^x$.

b. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$F(x) = \text{Ln } x$ es una primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{x}$, ya que $F'(x) = \dfrac{1}{x}$.

c. $g(x) = x^3$

$G(x) = \dfrac{x^4}{4}$ es una primitiva de $g(x) = x^3$, ya que $G'(x) = \dfrac{4x^3}{4} = x^3$.

d. $h(x) = 4x^2$

$H(x) = \dfrac{4}{3}x^3$ es una primitiva de $h(x) = x^2$, ya que $H'(x) = \dfrac{12x^2}{3} = 4x^2$.

3. **Encontrar la derivada $f(x)$ de la función $F(x) = x \text{ Ln } x$. Luego, indicar la antiderivada general de $f(x)$.**

$F(x) = x \text{ Ln } x$ — Función dada.

$F'(x) = \text{Ln } x + 1$ — Se deriva la función.

Si $f(x) = \text{Ln } x + 1$, entonces, $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$.

Finalmente, la antiderivada general de $f(x) = \text{Ln } x + 1$ es $G(x) = F(x) + C = x \text{ Ln } x + C$.

1.2 Integral indefinida

Ampliación multimedia

La **integral indefinida** de una función $f(x)$ es el conjunto de todas las antiderivadas de la función $f(x)$ y se simboliza como $\int f(x)\,dx$.

Si $F(x)$es una antiderivada de la función $f(x)$, entonces, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Cada elemento involucrado en la notación utilizada en la integral tiene su significado, por tal razón siempre debe ser escrito hasta que se resuelve la integral.

El símbolo $\int$ se llama "símbolo de la integral".

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ se lee "la integral de $f(x)$ respecto a x es igual a $F(x)$ más C".

La función $f(x)$ es la función que se va a integrar, dx es la diferencial que indica la variable respecto a la cual se está integrando y, finalmente, C es la constante de integración.

Propiedades de la integral indefinida

Recurso imprimible

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones de variable real y k una constante. Si $f(x)$ y $g(x)$ son integrables entonces:

- $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
- $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- $\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

Historia de las matemáticas

Inicios del cálculo

En el siglo XVII, Gottfried Leibnitz e Isaac Newton extendieron el trabajo de los infinitesimales creando el cálculo integral.

También, demostraron que el cálculo diferencial y el cálculo integral tienen procesos inversos.

El símbolo de la integral se le atribuye a Leibnitz quien lo extrajo de la palabra latina *summa* tomando su inicial.

EJEMPLOS

1. **Calcular las siguientes integrales.**

a. $\int (3 + 4x)\,dx$

Primero, se aplican las propiedades de la integral:

$$\int (3 + 4x)\,dx = \int 3\,dx + \int 4x\,dx$$
$$= 3\int dx + 4\int x\,dx$$

Segundo, se halla la primitiva para cada función:

$$= 3\int dx + 4\int x\,dx = 3x + 2x^2 + C$$

Después, se verifica, derivando $F(x) = 3x + 2x^2 + C$.

$$F'(x) = 3 + 4x$$

Finalmente, $\int (3 + 4x)\,dx = 3x + 2x^2 + C$.

b. $\int (x + \cos(x) - 1)\,dx$

Aplicando las propiedades de la integral se tiene que:

$$\int (x + \cos(x) - 1)\,dx = \int x\,dx + \int \cos(x)\,dx - \int 1\,dx$$

Ahora, se halla la primitiva para cada función:

$$\int x\,dx + \int \cos(x)\,dx - \int 1\,dx = \frac{x^2}{2} + \operatorname{sen}(x) - x + C$$

Por último, se comprueba, derivando la función $F(x)$.

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + \operatorname{sen} x - x + C.$$
$$F'(x) = x + \cos x - 1$$

Finalmente,

$$\int (x + \cos(x) - 1)\,dx = \frac{x^2}{2} + \operatorname{sen} x - x + C.$$

2. **Resolver la integral $\int [mh(x) - ng(x)]\,dx$ si $\int g(x)\,dx = G(x) + C_1$ y $\int h(x)\,dx = H(x) + C_2$.**

Primero, se aplican las propiedades de la integral.

$$\int [mh(x) - ng(x)]\,dx = m\int h(x)\,dx - n\int g(x)\,dx$$

Segundo, se remplazan las primitivas de cada función.

$$\int [mh(x) - ng(x)]\,dx = m[H(x) + C_2] - n[G(x) + C_1]$$

Tercero, se realizan las operaciones.

$$\int [mh(x) - ng(x)]\,dx = mH(x) + mC_2 - nG(x) - nC_1$$

Por último, se toma $C = mC_2 - nC_1$.

$$\int [mh(x) - ng(x)]\,dx = mH(x) - nG(x) + C$$

Integrales indefinidas básicas

Ampliación multimedia

Para calcular integrales, se utiliza la siguiente tabla de integrales inmediatas y las propiedades de la integral indefinida.

Funciones algebraicas
$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ con $n \neq -1$
$\int [a\,f(x) \pm b g(x)]\,dx = a\int f(x)\,dx \pm b\int g(x)\,dx$ con a y b constantes.
$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \int \dfrac{dx}{x} = \text{Ln}\lvert x\rvert + C$

Funciones trascendentes
$\int \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\text{Ln}\,a}\,dx = \int \dfrac{dx}{x\,\text{Ln}\,a} = \text{Log}_a\,x + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$
$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\text{Ln}\,a} + C$

Funciones trigonométricas
$\int \cos x\,dx = \text{sen}\,x + C$
$\int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x + C$
$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

Funciones inversas
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arcsen}\,x + C = \text{sen}^{-1}x + C$
$\int \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \dfrac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C = \cos^{-1}x + C$
$\int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = \int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = \tan^{-1}x + C$
$\int \dfrac{-1}{1+x^2}\,dx = \int \dfrac{-dx}{1+x^2} = \text{arccot}\,x + C = \cot^{-1}x + C$
$\int \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arcsec}\,x + C = \sec^{-1}x + C$
$\int \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \dfrac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \text{arccsc}\,x + C = \csc^{-1}x + C$

Recuerda que...

Es importante hacer notar que no existen propiedades para la integral de un producto o de un cociente de funciones. Por tal razón, para este tipo de integrales es necesario realizar procedimientos algebraicos o utilizar métodos de integración para obtener su resultado.

Matemáticamente

Explica por qué:

$\dfrac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$

Actividad

EJEMPLOS

1. Resolver las siguientes integrales.

a. $\int\left(4x^5 + 6x^2 - \frac{1}{x}\right) dx$

$\int\left(4x^5 + 6x^2 - \frac{1}{x}\right) dx = \int 4x^5\, dx + \int 6x^2\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx$

$= 4\int x^5\, dx + 6\int x^2\, dx - \int \frac{dx}{x}$

$= 4\left(\frac{x^6}{6} + C_1\right) + 6\left(\frac{x^3}{3} + C_2\right) - (\text{Ln}\,|x| + C_3)$

$= \frac{2x^6}{3} + 4C_1 + 2x^3 + 6C_2 - \text{Ln}\,|x| - C_3$

$= \frac{2}{3}x^6 + 2x^3 - \text{Ln}\,|x| + C$

Por tanto,

$\int\left(4x^5 + 6x^2 - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{2}{3}x^6 + 2x^3 - \text{Ln}\,|x| + C$

b. $\int\left(\cos(x) + \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}}\right) dx$

$\int\left(\cos(x) + \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}}\right) dx$

$= \int \cos(x)\, dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx$

$= \text{sen}\,(x) + 4\,\text{arcsen}\,(x) + C$

Por tanto,

$\int\left(\cos(x) + \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}}\right) dx = \text{sen}\,x + 4\,\text{arcsen}\,x + C$

c. $\int\left(3\sqrt{x^3} - \frac{7}{x^5} + 5\right) dx$

$\int\left(3\sqrt{x^3} - \frac{7}{x^5} + 5\right) dx$

$= \int 3\sqrt{x^3}\, dx - \int \frac{7}{x^5}\, dx + \int 5\, dx$

$= 3\int \sqrt{x^3}\, dx - 7\int \frac{dx}{x^5} + 5\int dx$

$= 3\int x^{\frac{3}{2}}\, dx - 7\int x^{-5}\, dx + 5\int dx$

$= 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 7\cdot\frac{x^{-5+1}}{-5+1} + 5x + C$

$= \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{7}{4}x^{-4} + 5x + C$

$= \frac{6}{5}\sqrt{x^5} + \frac{7}{4x^4} + 5x + C$

Por tanto,

$\int\left(3\sqrt{x^3} - \frac{7}{x^5} + 5\right) dx = \frac{6}{5}\sqrt{x^5} + \frac{7}{4x^4} + 5x + C.$

2. Calcular cada integral.

a. $\int -2x(x^2 - 3)^2\, dx$

Como no hay propiedad que permita calcular la integral de un producto de funciones de manera directa, entonces, se resuelven las operaciones indicadas como sigue:

$\int -2x(x^2 - 3)^2\, dx$

$= \int -2x(x^4 - 6x^2 + 9)\, dx$

$= \int(-2x^5 + 12x^3 - 18x)\, dx$

$= -2\int x^5\, dx + 12\int x^3\, dx - 18\int x\, dx$

$= -2\cdot\frac{x^6}{6} + 12\cdot\frac{x^4}{4} - 18\cdot\frac{x^2}{2} + C$

$= \frac{-1}{3}x^6 + 3x^4 - 9x^2 + C$

Por tanto,

$\int -2x(x^2 - 3)^2\, dx = -\frac{1}{3}x^6 + 3x^4 - 9x^2 + C.$

b. $\int \frac{4x^3 - \sqrt{x}}{x^{\frac{4}{3}}}\, dx$

$\int \frac{4x^3 - \sqrt{x}}{x^{\frac{4}{3}}}\, dx = \int\left(\frac{4x^3}{x^{\frac{4}{3}}} - \frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{4}{3}}}\right) dx$

$= \int\left(4x^{\frac{5}{3}} - x^{-\frac{5}{6}}\right) dx$

$= 4\int x^{\frac{5}{3}}\, dx - \int x^{-\frac{5}{6}}\, dx$

$= 4\frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} - \frac{x^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}} + C$

$= \frac{3}{2}x^{\frac{8}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}} + C$

Finalmente, $\int \frac{4x^3 - \sqrt{x}}{x^{\frac{4}{3}}}\, dx = \frac{3}{2}x^{\frac{8}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}} + C.$

3. Determinar $f(x)$ para la cual su derivada es la función $f'(x) = x^2 + 3x + \sec^2 x$.

$f(x) = \int f'(x)\, dx$

$f(x) = \int(x^2 + 3x + \sec^2 x)\, dx$

$= \int x^2\, dx + 3\int x\, dx + \int \sec^2(x)\, dx$

$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \tan(x) + C$

Finalmente, $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + \tan(x) + C.$

Responde.

1. ¿Por qué la derivación y la integración se consideran procesos inversos?
2. ¿Qué es y cómo se halla la primitiva de una función?
3. ¿Cómo resulta la tabla de integrales inmediatas?

Verifica que la función $F(x)$ es una antiderivada de la función $f(x)$.

4. $F_2(x) = \frac{5}{3}\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{2}$ $\quad f(x) = 5\cos(3x)$
5. $F_1(x) = \sqrt{x^3+2} - \pi$ $\quad f(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2}}$
6. $F_1(x) = \operatorname{Ln}(2x^4 + 3x)$ $\quad f(x) = \frac{8x^3+3}{2x^4+3x}$
7. $F(x) = 3e^{3x+5} - \frac{e^{x^2}}{2}$ $\quad f(x) = 9e^{3x+5} - xe^{x^2}$

Determina las siguientes integrales indefinidas.

8. $\int (4 - x^3 - 5x^5)\,dx$
9. $\int (\csc^2(x) + \sec^2(x))\,dx$
10. $\int (2x+3)^3\,dx$
11. $\int (6 - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt{x})\,dx$
12. $\int \left(\frac{5x^2(3-x)^2}{\sqrt{x^3}}\right)dx$
13. $\int \tan^2 x\,dx$
14. $\int \left(\frac{x^2\sec(x)\tan(x) - x^{-1}}{x^2}\right)dx$
15. $\int (3e^x + 4^x)\,dx$
16. $\int \frac{2^x+4^x}{3^x}\,dx$
17. $\int\left(\frac{4}{1+x^2} + \frac{3}{x\sqrt{x^2-1}}\right)dx$

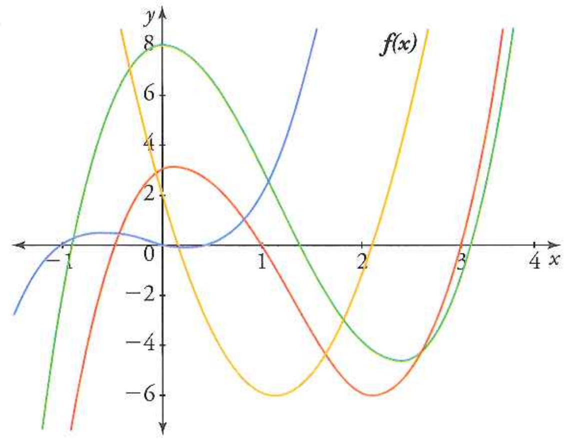
Realiza la gráfica de la función y tres antiderivadas de la función en el mismo plano cartesiano.

18. $f(x) = 5$
19. $f(x) = 4 - x$
20. $f(x) = 3x^2$
21. $f(x) = \cos(x)$
22. $f(x) = \frac{2}{x}$
23. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

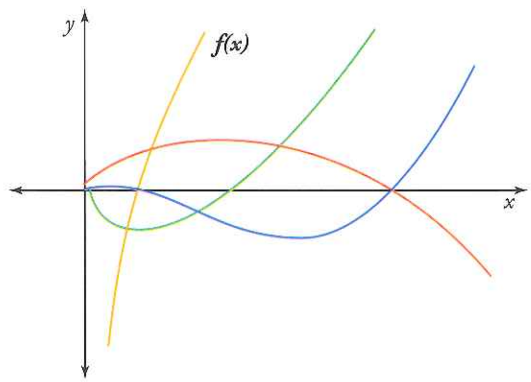
Lee, observa y responde.

En cada figura se muestra la gráfica de la función $f(x)$ y la gráfica de otras funciones. ¿Cuál gráfica es una antiderivada de $f(x)$? Justifica tu respuesta.

24.



25.



Relaciona cada integral indefinida con su respectiva solución.

26. $\int \cos 5x\,dx$ $\quad$ a. $\frac{\operatorname{sen} 9x}{9} + C$
27. $\int \operatorname{sen} 8x\,dx$ $\quad$ b. $\frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + C$
28. $\int \cos 9x\,dx$ $\quad$ c. $-\frac{\cos 8x}{8} + C$
29. $\int \operatorname{sen} 3x\,dx$ $\quad$ d. $-\frac{\cos 3x}{3} + C$

Lee y resuelve.

La densidad puntual de una varilla de 1 m de longitud está dada por $D(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ en gramos por centímetro (x se mide en centímetros desde uno de los extremos de la varilla).

30. Determina la función de masa de la varilla. Recuerda que la densidad es la derivada de la masa.

1.3 Soluciones particulares

Recurso imprimible

Como la integral indefinida es una familia de antiderivadas las cuales se diferencian entre sí únicamente por una constante C, entonces, al sustituir C por un valor específico, se obtiene una **solución particular**.

Ahora, si en la formulación de un problema se brinda información adicional, es posible obtener una solución particular de la integral propuesta. A este tipo de información se le llama condición inicial. Una condición inicial se da cuando se conoce el valor de $F(x)$ para un valor x dado.

Para determinar una solución particular si $F'(x) = f(x)$ y $F(a) = b$, se realizan los siguientes pasos:

Primero, se halla $\int f(x)\,dx$.

Segundo, se sustituye el valor de x dado en el resultado de $\int f(x)\,dx$ y se resuelven las operaciones indicadas.

Por último, se calcula el valor de la constante C, igualando la expresión anterior a b y despejando C. De este modo, la expresión $F(x) + C$ es una solución particular de $\int f(x)\,dx$.

EJEMPLOS

1. **Hallar la solución particular de $\int (2x + 3x^2)\,dx$, si $F(1) = 2$.**

$\int (2x + 3x^2)\,dx = x^2 + x^3 + C$

Como $F(1) = 2$, entonces, se tiene que:

$F(1) = (1)^2 + (1)^3 + C$ Se sustituye $x = 1$.

$F(1) = 2 + C$ Se resuelven las operaciones.

$2 + C = 2$ Se remplaza $F(1)$.

$C = 0$ Se despeja C.

Finalmente, $x^2 + x^3$ es la solución particular de $\int (2x + 3x^2)\,dx$, cuando $F(1) = 2$.

2. **Encontrar la función $f(x)$ que pasa por el punto $(0, -2)$, $f''(x) = x + 1$ y la pendiente de la recta tangente en dicho punto es $m = 3$.**

Como la función pasa por $(0, -2)$, entonces, $f(0) = -2$.

Además, como la pendiente de la recta tangente de la función en $x = 0$ es 3, entonces, $f'(0) = 3$.

Luego, se halla $f'(x)$, con $f'(0) = 3$ como sigue:

$f'(x) = \int (x + 1)\,dx = \frac{x^2}{2} + x + C$ Integrando.

$f'(0) = \frac{(0)^2}{2} + 0 + C = C$ Se sustituye $x = 0$.

$C = 3$ Se sustituye $f'(0) = 3$.

De esta forma, $f'(x) = \frac{x^2}{2} + x + 3$.

Ahora, se halla $f(x)$ con $f(0) = -2$ como sigue:

$$f(x) = \int \left(\frac{x^2}{2} + x + 3\right) dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 3x + D$$

$$f(0) = \frac{(0)^3}{6} + \frac{(0)^2}{2} + 3\cdot 0 + D = D$$

$D = -2$

Finalmente, $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + 3x - 2$.

3. **Determinar la función de posición de una partícula que parte del reposo, en la posición $s = -1$ y cuya aceleración en el tiempo t, es $a(t) = 5\ \text{m/s}^2$.**

Si $s(t)$ es la posición de un objeto, $v(t)$ su velocidad y $a(t)$ su aceleración en función del tiempo t, entonces:

$v(t) = \int a(t)\,dt$ y $s(t) = \int v(t)\,dt$.

Luego, se halla $v(t)$, así:

$v(t) = \int 5\,dt = 5\int dt = 5t + C$

$C = 0$ ya que la partícula parte del reposo.

Por tanto, $v(t) = 5t$ m/s.

Después, se halla $s(t)$, así:

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int 5t\,dt = \frac{5t^2}{2} + D$$

$D = -1$

Finalmente, $s(t) = \frac{5t^2}{2} - 1$.

Interpreto • Argumento • Modelo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Responde.

31. ¿Cuál es el significado de una solución particular?

32. ¿Cómo se obtiene la solución particular de la solución de una integral?

Halla una solución particular de cada integral de acuerdo con la condición inicial dada.

33. $\int (\sqrt{x} - 3x^4)\, dx$ $\quad F(1) = 5$

34. $\int (\operatorname{sen} x + \cos x)\, dx$ $\quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2}$

35. $\int (3^x + 1)\, dx$ $\quad F(0) = -4$

36. $\int (4 - x^2)\, dx$ $\quad F(1) = 0$

37. $\int (6x^2 + 2x + 1)\, dx$ $\quad F(0) = -3$

Encuentra la función de posición de una partícula, $s(t)$ si $a(t)$ y $v(t)$ son la aceleración y la velocidad, respectivamente, con velocidad inicial $v_0 = v(0)$ y posición inicial $s_0 = s(0)$.

38. $v(t) = 10t + 1,\ s_0 = 2$

39. $v(t) = \cos(t),\ s_0 = 2$

40. $v(t) = 2 \operatorname{sen}(t),\ s_0 = -1$

41. $v(t) = 3e^t,\ s_0 = 2$

42. $a(t) = 1 - 3t,\ v_0 = 0,\ s_0 = 10$

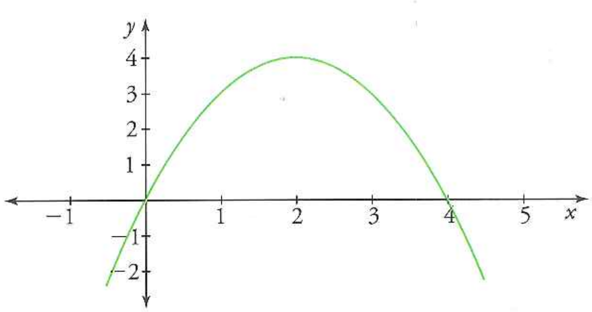
43. $a(t) = t^2,\ v_0 = 2,\ s_0 = -2$

44. $a(t) = 2 - \sqrt{t},\ v_0 = 1,\ s_0 = 0$

45. $a(t) = t - 2,\ v_0 = -2,\ s_0 = 2$

46. $a(t) = 2 \operatorname{sen}(t) + 2\cos(t),\ s_0 = \frac{1}{2},\ v_0 = -2$

Observa la gráfica de la función $f(x)$. Luego, resuelve.



47. Realiza el bosquejo de la gráfica de $F(x)$, tal que $\int f(x)\, dx = F(x)$ y $F(0) = 0$.

48. Estima el valor de $F(0)$ si $F(1) = 2$.

Determina si la solución particular de la integral corresponde a la condición inicial dada. Justifica tu respuesta.

49. $\int (6x^2 - 5)\, dx$, condición inicial $F(4) = 6$

Solución $F(x) = 3x^2 - 50$

50. $\int (4x^3 - 9x + 1)\, dx$, condición inicial $F(2) = 5$

Solución $F(x) = x^4 - 4{,}5x^2 + x + 5$

51. $\int \frac{8 + 6x^2}{x}\, dx$, condición inicial $F(e) = -4$

Solución $F(x) = 8 \operatorname{Ln} x + 3x^2 + e^2$

52. $\int \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\cos^2 x}\, dx$, condición inicial $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

Solución $F(x) = \sec x + \tan x + 1$

53. $\int \frac{3^{x+1} - 2^{x-2}}{2^x}\, dx$, condición inicial $F(0) = 1$

Solución $F(x) = \dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{3 \operatorname{Ln} \frac{3}{2}} - \frac{1}{4}x + 1$

Lee y resuelve aplicando integrales.

Se lanza un balón hacia arriba desde una altura de 50 cm del suelo con una velocidad inicial de 5 m/s.

54. Determina qué tan alto llegará el balón.

55. Determina la velocidad con que el balón vuelve al suelo.

Lee y resuelve.

El costo marginal se define como la tasa de cambio, $\frac{dc}{dq}$, del costo total de un fabricante $c = f(q)$. Siendo c el costo total de fabricar y vender q unidades de un producto.

Halla el costo total de producción de un fabricante si se conocen el costo marginal en función del número de productos y el costo para cierta cantidad de unidades.

56. $\frac{dc}{dq} = 10,\ c(10) = 600$

57. $\frac{dc}{dq} = 6q + 2,\ c(3) = 30$

58. $\frac{dc}{dq} = 2q + 50,\ c(15) = 1.900$

2. Métodos de integración

En muchas integrales no es suficiente aplicar las fórmulas de las integrales inmediatas ni las propiedades de la integral indefinida para hallar su solución, por tal razón se utilizan diversos **métodos de integración**. Dos de esos métodos son la integración por sustitución y la integración por partes.

Recuerda que...
Regla de la cadena
$[f(g(x))]' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$

2.1 Integración por sustitución

Ampliación multimedia

La **integración por sustitución** tiene su fundamento en la regla de la cadena para derivar funciones compuestas.

Si $u = g(x)$ y $f(x)$ dos funciones derivables y $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces, $du = g'(x)\,dx$ y $\int f'[g(x)] \cdot g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du = F(u) + C = F[g(x)] + C$.

El método de integración por sustitución consiste en introducir una variable u que sustituye a una expresión apropiada en función de la variable del integrando, de forma que la integral se transforme en otra integral de variable u más fácil de integrar.

Para aplicar la integración por sustitución, se aplican los siguientes pasos:

Primero, se elige u para sustituir a la expresión apropiada, por lo general, es la función interna de la función compuesta.

Segundo, se deriva u con respecto a la variable del integrando y se escribe como diferencial.

Tercero, se expresa el integrando en términos de u y se calcula la integral.

Por último, se obtiene la solución final, remplazando u por la expresión inicial.

EJEMPLOS

1. **Calcular las siguientes integrales aplicando el método de sustitución.**

a. $\int 4x^3(x^4 - 8)^6\,dx$

Se escoge la expresión y se deriva.

$$u = x^4 - 8 \qquad du = 4x^3\,dx$$

$$\int 4x^3(x^4-8)^6\,dx = \int (x^4-8)^6 4x^3\,dx = \int (u)^6\,du = \frac{u^7}{7} + C$$

Como $u = x^4 - 8$, entonces:

$$\int 4x^3(x^4-8)^6\,dx = \frac{(x^4-8)^7}{7} + C$$

b. $\int \frac{x+2}{(x^2+4x-5)^{\frac{5}{3}}}\,dx$

Se escoge la expresión y se deriva.

$$u = x^2 + 4x - 5 \qquad du = (2x+4)\,dx$$

$$\frac{du}{2} = (x+2)\,dx$$

$$\int \frac{x+2}{(x^2+4x-5)^{\frac{5}{3}}}\,dx = \int \frac{(x+2)\,dx}{(x^2+4x-5)^{\frac{5}{3}}}$$

$$= \int \frac{\frac{du}{2}}{(u)^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{5}{3}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(u)^{-\frac{5}{3}+1}}{-\frac{5}{3}+1}\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(u)^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}}\right] + C = -\frac{3}{4}(u)^{-\frac{2}{3}} + C$$

Como $u = x^2 + 4x - 5$, entonces:

$$\int \frac{x+2}{(x^2+4x-5)^{\frac{5}{3}}}\,dx = -\frac{3}{4}(x^2+4x-5)^{-\frac{2}{3}} + C$$

2. Determinar cada una de las siguientes integrales, aplicando la sustitución indicada.

a. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} \quad u^2 = x$

Primero, se deriva, así:

si $u^2 = x$, entonces, $2u\,du = dx$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \int \frac{2u\,du}{u^2 + u}$$

$$\int \frac{2\,du}{u + 1} = 2\int \frac{du}{u + 1}$$

Ahora, se escoge $h = u + 1$, entonces, $dh = du$.

$$\int \frac{du}{u + 1} = \int \frac{dh}{h}$$
$$= \text{Ln}\, h + C$$

Como $h = u + 1$, entonces, $\int \frac{du}{u + 1} = \text{Ln}\,|\,u + 1\,| + C$

Después, se sustituye $\int \frac{du}{u + 1} = \text{Ln}\,|\,u + 1\,| + C$, así:

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = 2\int \frac{du}{u + 1}$$
$$= 2\,[\text{Ln}\,|\,u + 1\,| + C]$$
$$= 2\,\text{Ln}\,|\,u + 1\,| + C$$

Como $u^2 = x$, entonces, $u = \sqrt{x}$ y

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = 2\,\text{Ln}\,|\sqrt{x} + 1\,| + C$$
$$= 2\,\text{Ln}\,(\sqrt{x} + 1) + C$$

Finalmente, $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = 2\,\text{Ln}\,(\sqrt{x} + 1) + C$.

b. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} \quad au = x$

Primero, se deriva, así:

$$au = x \qquad adu = dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{adu}{(au)^2 + a^2}$$
$$= \int \frac{adu}{a^2(u^2 + 1)}$$
$$= \int \frac{du}{a(u^2 + 1)}$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{du}{u^2 + 1}$$
$$= \frac{1}{a}\arctan u + C$$

Como $au = x$, entonces, al despejar u, se tiene:

$u = \frac{x}{a}$

Finalmente, $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$.

c. $\int \tan(x)\,dx \quad u = \cos x$

Primero, se deriva, así:

$$u = \cos x \qquad du = -\text{sen}\,x\,dx$$

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\text{sen}\,(x)}{\cos(x)}\,dx$$
$$= \int \frac{-\,du}{u} = -\int \frac{du}{u}$$
$$= -\text{Ln}\,|u| + C$$

Como $u = \cos x$, entonces

$$\int \tan(x)\,dx = -\,\text{Ln}\,|\cos(x)\,| + C$$
$$= \text{Ln}\,|(\cos(x))^{-1}| + C = \text{Ln}\,|\sec(x)| + C$$

Finalmente, $\int \tan x\,dx = \text{Ln}\,|\sec x\,| + C$.

3. La velocidad v de un cuerpo de masa m que cae verticalmente está dada por la expresión $v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$ donde g es la aceleración debida a la gravedad, k es una constante y t es el tiempo.

Hallar la altura h sobre la superficie de la tierra como función del tiempo.

Como la altura en función del tiempo se obtiene a partir de la integración de la velocidad en función del tiempo, entonces, se tiene que:

$$h(t) = \int v(t)\,dt = \int \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)dt$$
$$= \frac{mg}{k}\int\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)dt = \frac{mg}{k}\left[\int dt - \int e^{-\frac{kt}{m}}\,dt\right]$$

Ahora, si $u = -\frac{kt}{m}$, entonces, $du = -\frac{k}{m}\,dt$

y $dt = -\frac{m}{k}\,du$.

$$\int e^{-\frac{kt}{m}}\,dt = \int e^u\left(-\frac{m}{k}\,du\right) = -\frac{m}{k}\int e^u\,du$$
$$= -\frac{m}{k}(e^u) + C = -\frac{m}{k}\left[e^{-\frac{kt}{m}}\right] + C$$

Finalmente, se tiene:

$$h(t) = \frac{mg}{k}\left[t - \left(-\frac{m}{k}\left[e^{-\frac{kt}{m}}\right]\right)\right] + C$$
$$= \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}e^{-\frac{kt}{m}} + C$$

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Responde. Explica tu respuesta.

59. ¿Cuál es la relación entre la regla de la cadena y el método de integración por sustitución?

60. ¿Cómo se aplica el método de integración por sustitución?

Indica la sustitución más adecuada en cada caso. Luego, calcula la integral.

61. $\int \frac{\text{Ln}\, x}{x}\,dx$

62. $\int x\sqrt{1+5x^2}\,dx$

63. $\int e^{\frac{2x}{3}}\,dx$

64. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

65. $\int (4x-3)^6\,dx$

66. $\int x\,\text{sen}\,(x^2)\,dx$

67. $\int \sqrt{x+5}\,dx$

68. $\int \frac{4x+10}{(x^2+5x+8)^4}\,dx$

69. $\int x^2\,\text{sen}\,x^3\,dx$

70. $\int e^{\cos x}\,\text{sen}\,x\,dx$

71. $\int \cot(x)\,dx$

72. $\int x^3\sqrt{x^4+16}\,dx$

73. $\int \text{sen}^3 x\cos x\,dx$

74. $\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx$

75. $\int \frac{dx}{x^2+9}$

76. $\int \frac{e^x}{e^x+5}\,dx$

Determina si la solución de cada una de las siguientes integrales es correcta. Justifica tu respuesta.

77. $\int \frac{2x}{x^4+1}\,dx = \tan^{-1}x^2 + C$

78. $\int \frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx = -\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}{3} + C$

79. $\int \frac{1}{x\,\text{Ln}\,x}\,dx = \text{Ln}\,|\,\text{Ln}\,|x|\,| + C$

80. $\int \frac{e^x-2}{2x-e^x}\,dx = \text{Ln}\,|2x-e^x| + C$

81. $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx = -\frac{1}{e^x} + C$

Calcula cada una de las siguientes integrales. Aplica la sustitución que se indica.

82. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $\qquad x = a\,\text{sen}\,u$

83. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$ $\qquad x = a\sec u$

84. $\int \frac{x}{\sqrt{4-16x^2}}\,dx$ $\qquad x = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,u$

85. $\int \frac{2x}{\sqrt{4x^2-25}}\,dx$ $\qquad x = \frac{5}{2}\sec u$

Aplica doble sustitución para calcular cada integral. Realiza primero, la sustitución que se indica.

86. $\int \frac{e^x\,dx}{1+\sqrt{e^x}}$ $\qquad u^2 = e^x$

87. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$ $\qquad u^2 = x$

88. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{1+\sqrt{x}}\,dx$ $\qquad u^2 = x$

Lee y resuelve.

Se sabe que en cierto club, la inscripción de socios tiene una tasa de cambio dada por la expresión $N'(t) = \frac{200}{\sqrt{(1+0{,}2\,t)^3}}$, donde t está dado en años.

89. Si actualmente el club cuenta con 100 socios, determina la expresión que permite precisar el número de socios en t años.

90. ¿Cuántos socios habrá inscritos en 3 años?

Lee y resuelve.

En alta mar, se sabe que la tasa de crecimiento del radio de una mancha circular de petróleo está dada por la expresión $r'(t) = \frac{30}{\sqrt{20t+4}}$ pies/min a los t minutos de haberse iniciado el derramamiento.

91. Halla la función $r(t)$ que proporciona el radio de la mancha de petróleo en cualquier instante t, si en $t = 0$, la mancha no existe.

2.2 Integración por partes

Actividad

La **integración por partes** se basa en la regla de la derivada del producto de dos funciones. De esta forma, si u y v, son dos funciones que dependen de x entonces:

$$f(x) = u(x)v(x)$$

$$f'(x) = [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \qquad \text{Regla del producto.}$$

$$\int [u(x)\,v(x)]'\,dx = \int [u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)]\,dx \qquad \text{Se aplica la integral indefinida.}$$

$$u(x)\,v(x) = \int [u'(x)\,v(x)]\,dx + \int [u(x)\,v'(x)]\,dx \qquad \text{Se utilizan las propiedades de las integrales.}$$

$$\int [u(x)\,v'(x)]\,dx = u(x)\,v(x) - \int [v(x)\,u'(x)]\,dx \qquad \text{Se despeja } \int [u(x)\,v'(x)].$$

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad \text{Se remplaza } u = u(x) \text{ y } dv = v'(x)\,dx.$$

Si u y v son dos funciones diferenciables, entonces, $\int udv = uv - \int vdu$.

La integración por partes se utiliza para resolver integrales de un producto de funciones; donde una de ellas es la derivada de una función conocida y la integral original se transforma en otra más simple.

Para calcular una integral utilizando el método de integración por partes, se aplican los siguientes pasos:

Primero, se realiza la elección de u y dv.

Segundo, se deriva u para encontrar du.

Tercero, se integra dv para determinar v.

Finalmente, se aplica la fórmula de integración por partes y se soluciona la integral indicada.

EJEMPLOS

1. Resolver las siguientes integrales.

a. $\int \text{Ln}\,(x)\,dx$

Primero, se tiene que:

$u = \text{Ln}\,(x)$ y $dv = dx$

Como $u = \text{Ln}(x)$, entonces, $du = \frac{1}{x}\,dx$.

Como $dv = dx$, entonces, $v = \int dx = x$

Luego, se aplica la fórmula de integración por partes.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int \text{Ln}\,x\,dx = x\,\text{Ln}\,x - \int (x)\cdot\left(\frac{1}{x}dx\right)$$

$$= x\,\text{Ln}\,x - \int dx = x\,\text{Ln}\,x - x + C$$

Finalmente, $\int \text{Ln}\,x\,dx = x\,\text{Ln}\,x - x + C$.

Es importante tener en cuenta que al resolver una integral que contiene $\text{Ln}\,(x)$, la elección más adecuada para u es $\text{Ln}\,(x)$.

b. $\int x\cos(2x)\,dx$

Primero, se tiene que:

$u = x$ y $dv = \cos(2x)\,dx$

Como $u = x$, entonces, $du = dx$.

Luego, si $dv = \cos(2x)\,dx$, entonces

$$v = \int \cos(2x)\,dx \qquad v = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(2x)$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x\cos(2x)\,dx = \frac{x}{2}\,\text{sen}\,(2x) - \int \frac{1}{2}\,\text{sen}\,(2x)\,dx$$

$$= \frac{x}{2}\,\text{sen}\,(2x) - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right] + C$$

$$= \frac{x}{2}\,\text{sen}\,(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

Finalmente,

$$\int x\cos(2x)\,dx = \frac{x}{2}\,\text{sen}\,(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + C$$

Recurso imprimible

2. **Calcular cada integral, aplicando la integración por partes.**

a. $\int x^2 e^{2x}\, dx$

En este caso, se aplica la integración por partes varias veces. Por tanto, se utiliza un método abreviado, llamado tabulación.

Consiste en que se elige una función que siempre se deriva y otra que siempre se integra. La función que se deriva, se debe derivar sucesivamente hasta que la derivada dé cero y la otra se integra el mismo número de veces que se deriva u. Luego, se realizan los productos sucesivos alternando los signos, así:

u (derivar)		dv (integrar)
x^2	$+$	e^{2x}
$2x$	$-$	$\frac{e^{2x}}{2}$
2	$+$	$\frac{e^{2x}}{4}$
0		$\frac{e^{2x}}{8}$

De esta forma se obtiene:

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = x^2 \cdot \frac{e^{2x}}{2} - 2x \cdot \frac{e^{2x}}{4} + 2 \cdot \frac{e^{2x}}{8} + C$$

Finalmente, se simplifica:

$$\int x^2 e^{2x}\, dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + C$$

b. $\int \text{arcsen}\,(x)\, dx$

$u = \text{arcsen}\,(x)$ y $dv = dx$

Como $u = \text{arcsen}\,(x)$, entonces, $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

Como $dv = dx$, entonces, $v = x$. Luego, se aplica integración por partes.

$$\int \text{arcsen}\,(x)\, dx = x\, \text{arcsen}\,(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

$t = 1 - x^2$ Se aplica sustitución.

$dt = -2x\, dx$, $-\frac{dt}{2} = x\, dx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}\,dt}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right] = -t^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

Ahora, se remplaza:

$$\int (\text{arcsen}\, x)\, dx = x\, \text{arcsen}\, x - \left(-\sqrt{1-x^2}\,\right)$$

$$\int (\text{arcsen}\, x)\, dx = x\, \text{arcsen}\, x + \sqrt{1-x^2} + C$$

c. $\int e^x \cos x\, dx$

$u = e^x$ y $dv = \cos x\, dx$

Como $u = e^x$, entonces, $du = e^x\, dx$.

Ahora, si $dv = \cos x\, dx$, entonces

$v = \int \cos x\, dx = \text{sen}\, x$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x\, \text{sen}\, x - \int e^x\, \text{sen}\, x\, dx$$

Se aplica integración por partes.

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x\, \text{sen}\, x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx\right)$$

Se aplica nuevamente integración por partes.

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x\, \text{sen}\, x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx$$

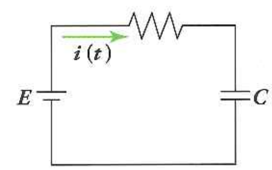
Se eliminan los paréntesis.

$$2\int e^x \cos x\, dx = e^x\, \text{sen}\, x + e^x \cos x$$

Se transponen términos.

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x\, \text{sen}\, x + e^x \cos x}{2} + C$$ Se divide entre 2.

3. **En un circuito en serie RC, como se muestra en la figura, la corriente en el circuito es la derivada de la carga del condensador en el tiempo t, es decir:**



$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

Determinar la carga del condensador en el tiempo t, si se sabe que $q(0) = 1$ C (culombio) y $i(t) = 2 - te^{-t}$.

Para determinar la carga $q(t)$, se calcula la integral:

$$q(t) = \int i(t)\, dt = \int (2 - te^{-t})\, dt = \int 2dt - \int te^{-t}\, dt$$

Ahora, se calcula $\int te^{-t}\, dt$, entonces, $u = t$ y $dv = e^{-t}$

Como $u = t$, entonces, $du = dt$.

Ahora, como $dv = e^{-t}\, dt$, entonces, $v = -e^{-t}$

$$q(t) = 2t - \left(-te^{-t} - \int -e^{-t}\, dt\right)$$

$$= 2t + te^{-t} + e^{-t} + C$$

Como la carga inicial del condensador es de 1 culombio, entonces, se remplaza, así:

$q(0) = 1$ luego, $q(0) = 2(0) + 0e^{-0} + e^{-0} + C = 1 + C$

$1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$

En conclusión, la carga del condensador en el tiempo t, es $q(t) = 2t + te^{-t} + e^{-t}$.

Responde las siguientes preguntas.

92. ¿Cuál es la regla de derivación de la cual se desprende la fórmula de integración por partes?

93. ¿En qué tipo de integrales resulta conveniente aplicar la técnica de integración de partes?

Completa los espacios y encuentra la integral indefinida.

94. $\int x \operatorname{Ln} x\, dx$ $\quad u =$ ______ $\quad dv =$ ______

95. $\int 2x\, e^x\, dx$ $\quad u =$ ______ $\quad dv =$ ______

96. $\int x \operatorname{sen} 4x\, dx$ $\quad u =$ ______ $\quad dv =$ ______

97. $\int x^3 \operatorname{Ln} x\, dx$ $\quad u =$ ______ $\quad dv =$ ______

98. $\int 4x \sec^2 x\, dx$ $\quad u =$ ______ $\quad dv =$ ______

99. $\int x e^{3x}\, dx$ $\quad u =$ ______ $\quad dv =$ ______

Utiliza el método de integración por partes, varias veces, para obtener las siguientes integrales indefinidas.

100. $\int x^3 \cos 5x\, dx$

101. $\int x^3 e^{-2x}\, dx$

102. $\int x^2 e^{4x}\, dx$

103. $\int x^2 \operatorname{sen}(3x)\, dx$

104. $\int x^2 e^{-3x}\, dx$

105. $\int (x^2 + 3x) \cos x\, dx$

Combina el método de integración por partes y las propiedades de las igualdades para responder los siguientes problemas.

106. Determina una regla general para calcular integrales de la forma $\int e^{mx} \cos nx\, dx$.

107. ¿Es posible determinar $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$?

108. Encuentra la fórmula para las integrales de la forma $\int \cos nx \cos mx\, dx$. ¿Qué restricciones plantea dicha fórmula?

Encuentra la función f que cumple las condiciones impuestas. Justifica tu respuesta.

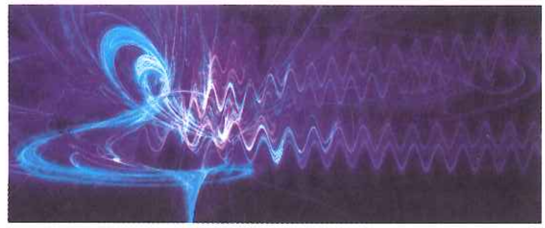
109. $f'(x) = x^2 \operatorname{Ln} x$ y $f(1) = 1$

110. $f'(x) = e^{2x} \cos x$ y $f(0) = 2$

111. $f'(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$ y $f(1) = -2$

112. $f'(x) = (x - 5) \cos x$ y $f(0) = 4$

Una partícula que se mueve a lo largo de una línea recta, tiene como velocidad a $v(t) = t^2 e^{-3t}$ metros por segundo.



113. Determina una expresión para la posición de la partícula en función del tiempo.

114. Encuentra la variación de la posición de la partícula entre $t = 0$ y $t = 5$ segundos.

Encuentra la carga en el condensador en un instante t, que está conectado en serie a una resistencia y una fuente de voltaje constante, si se conoce la corriente del circuito en cualquier instante de tiempo.

115. $i(t) = te^{-t}$; $q(0) = 0$

116. $i(t) = 4t \operatorname{sen} t$; $q(0) = 2$

117. $i(t) = t^2 \operatorname{sen} 3t$; $q(0) = 1$

118. $i(t) = \operatorname{sen} t e^{\cos t}$; $q(0) = 2$

Los costos marginales de una empresa en función del número de productos q que se fabrican en una semana vienen dados por la expresión $c'(q) = q^2 \operatorname{Ln}\left(\dfrac{1}{q}\right)$. Teniendo en cuenta que se debe fabricar al menos un producto y su costo es $\dfrac{8}{9}$ de dólar.

119. Determina el costo en función del número de productos a producir.

120. ¿Cuál es el costo de producir 10 artículos?

Lee y resuelve.

El costo marginal de una producción de frutas tropicales está dado por la expresión $\dfrac{dc}{dq} = x^3 e^x$.

121. Determina el costo total de la producción, si se sabe que el costo inicial es de siete mil dólares.

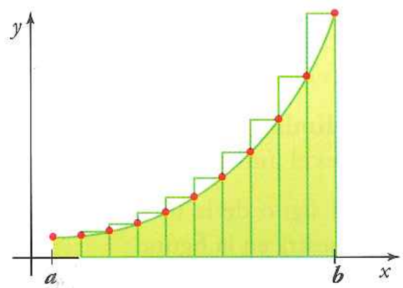
3. Área

Ampliación multimedia

En geometría se acostumbra calcular el área de regiones limitadas por líneas. Por ejemplo, si la región es un rectángulo, un triángulo, o cualquier polígono que se pueda dividir en triángulos, se aplican fórmulas que permiten determinar su área.

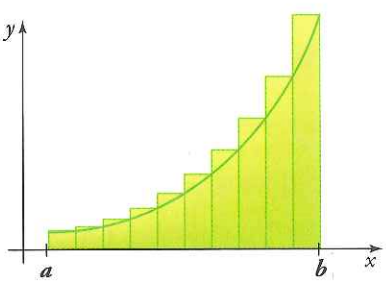
Para encontrar áreas de regiones limitadas por curvas que representan funciones es necesario utilizar un proceso que se fundamenta en el concepto de límite y la aplicación del cálculo integral.

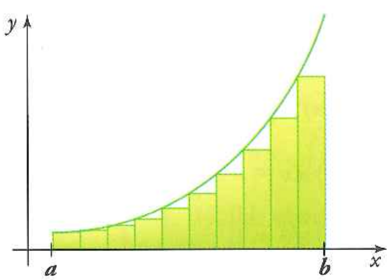
Para obtener el área de la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$, con $f(x) \geq 0$, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x, se busca aproximar el área mediante rectángulos cuya base se hace cada vez más pequeña y cuya altura es el valor de la función, como se muestra en la figura.



En este caso, se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cuya longitud está determinada como $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Luego, se forman rectángulos sucesivos cuya altura es la función evaluada en uno de los valores de x de cada subintervalo.

Las siguientes figuras muestran los rectángulos que se forman cuando se divide el intervalo $[a, b]$ en $n = 10$ partes iguales. Después se toman como altura las imágenes de los límites superiores de los subintervalos (el área es por exceso), o las imágenes de los límites inferiores de los subintervalos (el área es por defecto).





$$A \approx f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \ldots + f(x_i)\Delta x_i + \ldots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Otra forma, se obtiene al tomar las imágenes de los puntos medios de cada subintervalo, como se muestra en la figura 2.

En cualquiera de estos casos, al sumar el área de los rectángulos que se obtienen, el área tendrá un error con relación al área real, o por exceso o por defecto. Sin embargo, al aumentar el número de subintervalos, es decir, cuando $\Delta x_i \to 0$, el error se hará cada vez más pequeño, por tanto

$$A = \lim_{\Delta_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$$

Se dice, también, que A existe cuando el límite de las aproximaciones por exceso es igual al límite de las aproximaciones por defecto.

Historia de las matemáticas

Suma de Riemann

Cuando la longitud de los subintervalos en los cuales se divide el intervalo no son iguales, y además la altura del rectángulo se considera a la imagen de cualquier valor de x en dicho subintervalo, la suma se denomina suma de Riemann. El límite de la suma de Riemann es lo que se denomina la integral definida de la función en el intervalo.

Recurso imprimible

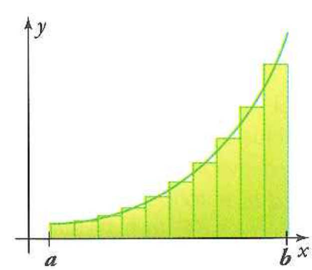


Figura 2.

3.1 Integral definida

La **integral definida** de una función en un intervalo, se puede expresar a partir del área bajo la curva de la función. Así:

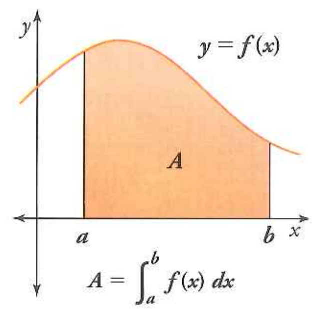
Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[a, b]$. Se dice que la función es integrable en el intervalo $[a, b]$ si $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$ existe.

Además, "la integral de $f(x)$ desde a hasta b" es $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i$.

Es importante tener en cuenta que si el límite existe, entonces la integral toma un valor único y es un número real que puede ser positivo, negativo o cero. Si la función es positiva en el intervalo el resultado de la integral representará el área bajo la curva de $f(x)$.

A los números a y b se les llama **límites de integración**, donde a es el límite inferior y b es el límite superior.

La función $f(x)$ a la derecha del signo de la integral se llama el integrando, como se muestra en la figura.



3.2 Propiedades de la integral definida

Actividad

A continuación, se enuncian las propiedades más importantes de la integral definida, dado que las funciones f y g son integrables en $[a, b]$, y k es una constante.

1. $\int_a^b f(x)\,dx$ es un número real.
2. $\int_a^b k\,dx = k(b - a)$
3. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ para k constante real.
4. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
5. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
6. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
7. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$
8. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ donde $a \leq c \leq b$
9. Si $f(x) \geq 0$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
10. Si $f(x) \geq g(x)$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$
11. Si f es continua en $[a, b]$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)f(x_0)$ para algún x_0, $a < x_0 < b$ (teorema del valor medio)
12. Si f es par y continua $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ y si f es impar y continua $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx$

Recuerda que...

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), entonces, existe un número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Recurso imprimible

EJEMPLOS

1. Hallar las siguientes integrales definidas si:

$$\int_1^5 f(x)\,dx = 2$$

$$\int_1^5 g(x)\,dx = -4$$

$$\int_1^7 f(x)\,dx = 3$$

$$\int_5^7 g(x)\,dx = 6$$

a. $\int_5^7 4\,f(x)\,dx$

Primero, se aplican las propiedades de las integrales así:

$$\int_1^7 f(x)\,dx = \int_1^5 f(x)\,dx + \int_5^7 f(x)\,dx \quad \text{Se utiliza la propiedad 8.}$$

$$\int_5^7 f(x)\,dx = \int_1^7 f(x)\,dx - \int_1^5 f(x)\,dx \quad \text{Se despeja la integral.}$$

$$= 3 - 2$$

$$= 1$$

Luego, se tiene:

$$\int_5^7 4\,f(x)\,dx = 4\int_5^7 f(x)\,dx = 4(1) = 4 \quad \text{Se utiliza la propiedad 3.}$$

Finalmente, $\int_5^7 4\,f(x)\,dx = 4$

b. $\int_1^7 \left[\frac{1}{2}\,f(x) - 3g(x)\right] dx$

$$\int_1^7 \left[\frac{1}{2}\,f(x) - 3g(x)\right] dx = \frac{1}{2}\int_1^7 f(x)\,dx - 3\int_1^7 g(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(3) - 3\left[\int_1^5 g(x)\,dx + \int_5^7 g(x)\,dx\right] \quad \text{Se aplica la propiedad 8.}$$

$$= \frac{3}{2} - 3(-4 + 6) \quad \text{Se resuelve cada integral.}$$

$$= \frac{3}{2} - 6 = -\frac{9}{2} \quad \text{Se efectúan las operaciones.}$$

Finalmente, $\int_1^7 \left[\frac{1}{2}\,f(x) - 3g(x)\right] dx = -\frac{9}{2}$.

c. $\int_5^7 4(f(x) - 5(g(x)))\,dx$

$$\int_5^7 4(f(x) - 5(g(x)))\,dx$$

$$= 4\int_5^7 f(x)\,dx - 20\int_5^7 g(x)\,dx$$

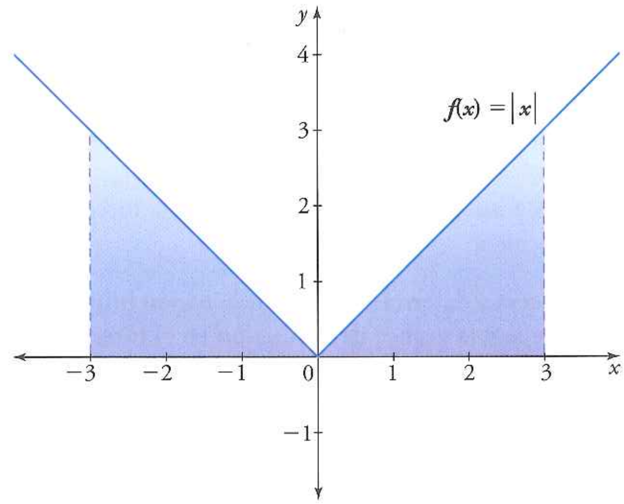
$$= 4\left[\int_1^7 f(x)\,dx - \int_1^5 f(x)\,dx\right] - 20\int_5^7 g(x)\,dx$$

$$= 4(3 - 2) - 20(6)$$

$$= -116$$

Finalmente, $\int_5^7 4(f(x) - 5(g(x)))\,dx = -116$.

2. Escribir como una integral la representación del área bajo la curva dada. Luego, calcular la integral.



El área bajo curva de la función $f(x)$, para el intervalo $[-3, 3]$, se expresa en forma de integral como:

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \int_{-3}^{3} |x|\,dx$$

Aplicando las fórmulas para hallar el área de un triángulo, para cada región, se tiene:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \quad \text{Se aplica el área de un triángulo.}$$

$$A = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4{,}5 \quad \text{Se remplazan los datos.}$$

Como las dos regiones son congruentes, entonces el área total es:

$$A_T = 2 \cdot A = 2 \cdot 4{,}5 = 9.$$

Finalmente, $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 9$.

3. Hallar el valor de la integral $\int_{-3}^{3}[f(x) + g(x)]\,dx$, si $f(x)$ es una función par y $g(x)$ es impar.

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 4 \text{ y } \int_0^3 g(x)\,dx = 5.$$

$$\int_{-3}^{3}[f(x) + g(x)]\,dx = \int_{-3}^{3} f(x)\,dx + \int_{-3}^{3} g(x)\,dx$$

$$= 4 + \left[\int_{-3}^{0} g(x)\,dx + \int_0^3 g(x)\,dx\right]$$

$$= 4 + \left[-\int_0^3 g(x)\,dx + 5\right]$$

$$= 4 + [-5 + 5] = 4 + 0 = 4$$

Finalmente, $\int_{-3}^{3}[f(x) + g(x)]\,dx = 4$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Modelo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

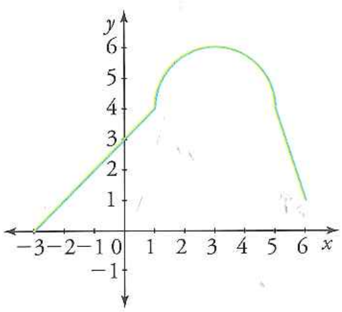
Responde. Explica con un ejemplo.

122. ¿Cómo se define la integral definida de una función continua en el intervalo $[a, b]$.

123. ¿Cuál es la diferencia entre los valores que se toman de una función creciente en la suma por exceso y en la suma por defecto?

124. ¿Cuáles son las propiedades de la integral definida?

Observa y determina el área de la región limitada por el eje x, y la gráfica de la función en el intervalo que se indica.



125. $[-3, 0]$

126. $[0, 1]$

127. $[1, 5]$

128. $[5, 6]$

Halla cada integral si $\int_1^3 f(x)\,dx = -5$, $\int_1^7 f(x)\,dx = 3$, $\int_1^3 g(x)\,dx = 6$ y $\int_3^7 g(x)\,dx = -3$.

129. $\int_1^7 5\left(f(x) - \frac{1}{2}g(x)\right)dx$

130. $\int_3^7 (-2f(x) + 6g(x))\,dx$

131. $\int_3^7 3(f(x) + g(x))\,dx$

Calcula cada integral indicada, si $\int_{-2}^2 2f(x)\,dx = 10$, $\int_0^2 \frac{3}{2}g(x)\,dx = -15$, $\int_{-2}^0 f(x)\,dx = -5$, $\int_{-2}^0 g(x)\,dx = -16$ en caso contrario explica por qué no se puede calcular.

132. $\int_{-2}^2 f(x)\,dx$

133. $\int_{-2}^0 [f(x)]^2\,dx$

134. $\int_0^2 \frac{3f(x)}{g(x)}\,dx$

135. $\int_{-2}^2 (f(x) - 8g(x))\,dx$

136. $\int_0^2 \left[f(x) - \frac{2}{3}g(x)\right]dx$

137. $\int_2^{-2} g(x)\,dx$

Establece si la proposición es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

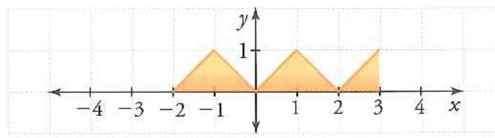
138. $\int_{-a}^a g(x)\,dx = 0$ si g es par.

139. $\int_{-a}^a [f(x)\cdot g(x)]\,dx = 2\int_0^a [f(x)\cdot g(x)]\,dx$ si f es par.

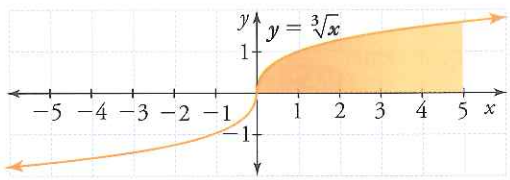
140. $\int_{-a}^0 g(x)\,dx = -\int_0^a g(x)\,dx$ si g es impar.

Escribe como una integral, la representación del área bajo cada curva dada. Luego, calcula si es posible la integral.

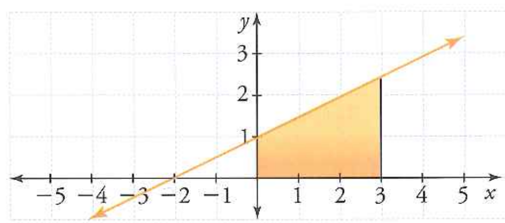
141.



142.

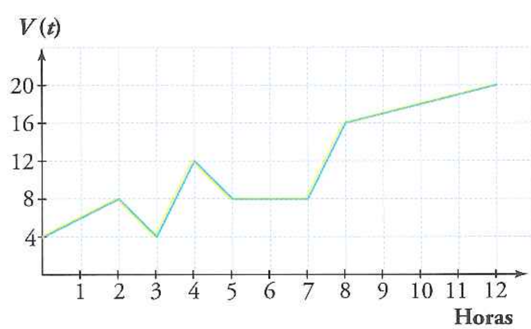


143.



Lee, observa y resuelve.

La siguiente gráfica muestra la velocidad de un móvil.



Determina la distancia que recorre:

144. En las dos primeras horas.

145. En las últimas cuatro horas.

4. Relación entre integración y derivación

Enlace web

Existen dos teoremas importantes que relacionan las derivadas y las integrales.

4.1 Primer teorema fundamental del cálculo

Este teorema fundamental del cálculo expresa de manera concreta la relación entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ con $a \leq x \leq b$ y F es una función determinada por $F(t) = \int_a^x f(t)\,dt$, entonces, F es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), además F es una antiderivada de f en (a, b), es decir, $F'(x) = f(x)$.

Recuerda que...

Se deben distinguir los conceptos de integral definida e integral indefinida pues la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un número mientras la integral indefinida $\int f(x)\,dx$ es una función.

EJEMPLOS

Hallar $F'(x)$ en cada caso.

a. $F(x) = \int_2^x \left(2t + \sqrt{t+3}\right)^2 dt$ **en el intervalo** $[2, +\infty)$.

Para hallar la derivada de la función $F(x)$, se aplica el primer teorema fundamental del cálculo. Ya que la función $f(t) = \left(2t + \sqrt{t+3}\right)^2$ es continua en el intervalo $[2, +\infty)$, entonces se tiene:

$$F'(x) = \left(2x + \sqrt{x+3}\right)^2$$

b. $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} 3te^{-t}\,dt$.

Como la función integral tiene variables en los dos límites, se aplican las propiedades de la integral definida para escribirla en la forma que exige el teorema fundamental, así:

$$\int_{x^2}^{x^3} 3te^{-t}\,dt = \int_{x^2}^{0} 3te^{-t}\,dt + \int_0^{x^3} 3te^{-t}\,dt$$

$$= -\int_0^{x^2} 3te^{-t}\,dt + \int_0^{x^3} 3te^{-t}\,dt$$

$$F(x) = -\int_0^{x^2} 3te^{-t}\,dt + \int_0^{x^3} 3te^{-t}\,dt$$

$$F'(x) = (-3x^2e^{-x^2})\underbrace{2x}_{\text{derivada interna}} + (3x^3e^{-x^3})\underbrace{3x^2}_{\text{derivada interna}}$$

$$F'(x) = -6x^3e^{-x^2} + 9x^5e^{-x^3}$$

c. $F(x) = \int_2^{\tan x} [2t - 1]\,dt$

$$F(x) = \int_2^{\tan x} [2t - 1]\,dt$$

$u = \tan x$ $\qquad F(u) = \int_2^{u} [2t - 1]\,dt$

Por medio de la regla de la cadena, la derivada con respecto a x de esta función compuesta es $F'(u) = [2u - 1]\,u'(x)$.

$$F'(u) = [2u - 1]\sec^2(x)$$

$$F'(u) = [2\tan x - 1]\sec^2(x)$$

La tecnología de la aviación se funda en cálculos de integración.

Recurso imprimible

Historia de las matemáticas

Isaac Barrow (1630-1677)

Isaac Barrow fue profesor de Isaac Newton. En su obra *Lectiones Geometricae* (1670) estableció por primera vez, en lenguaje geométrico, la relación entre integración y derivación.

4.2 Segundo teorema fundamental del cálculo

Este teorema se puede considerar como la segunda parte del teorema fundamental del cálculo, y se utiliza para evaluar la integral definida de una función.

El método para calcular la integral definida se conoce como **regla de Barrow**.

> Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y F es una antiderivada de f, entonces, $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Para calcular la integral definida de una función f utilizando la regla de Barrow, se deben tener en cuenta los siguientes pasos:

Primero, se determina $F(x)$, tal que $F'(x) = f(x)$.

Después, se calcula $F(b) - F(a)$, evaluando $F(x)$ en a y b, es decir, hallando $F(a)$ y $F(b)$. Este valor corresponde a la integral definida indicada.

Generalmente, la diferencia $F(b) - F(a)$ se simboliza por la expresión $[F(x)]_a^b$. Es decir, si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$.

Cuando se usan los métodos de integración en el cálculo de integrales definidas, en ocasiones se suprimen los límites de integración hasta volver a las variables originales.

EJEMPLOS

Calcular las siguientes integrales.

a. $\int_0^4 (3x^2 - \sqrt{x})\,dx$

$$\int_0^4 (3x^2 - \sqrt{x})\,dx = \left[3\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \left[3\frac{4^3}{3} - \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[3\frac{0}{3} - \frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= 64 - \frac{16}{3} = \frac{176}{3}$$

Finalmente, $\int_0^4 (3x^2 - \sqrt{x})\,dx = \frac{176}{3}$.

b. $\int_{-1}^1 3x^2(x^3 + 6)^4\,dx$

Primero, se halla la integral sin los límites de integración.

$\int 3x^2(x^3 + 6)^4\,dx$

$u = x^3 + 6$

$du = 3x^2\,dx$

$\int 3x^2(x^3 + 6)^4\,dx = \int u^4\,du$

$= \frac{u^5}{5} = \frac{(x^3 + 6)^5}{5}$

$$\int_{-1}^1 3x^2(x^3 + 6)^4\,dx = \left[\frac{(x^3 + 6)^5}{5}\right]_{-1}^1$$ Se calcula la integral.

$$= \left[\frac{(1^3 + 6)^5}{5}\right] - \left[\frac{((-1)^3 + 6)^5}{5}\right] = \frac{13.682}{5}$$

Finalmente, $\int_{-1}^1 3x^2(x^3 + 6)^4\,dx = \frac{13.682}{5}$.

c. $\int_1^3 x^2\,\mathrm{Ln}\,(x)\,dx$

Primero, se halla la integral sin los límites de integración.

$\int x^2\,\mathrm{Ln}\,(x)\,dx$

$u = \mathrm{Ln}\,(x)$ y $dv = x^2\,dx$

$du = \frac{dx}{x}$ y $v = \frac{x^3}{3}$

$$\int x^2\,\mathrm{Ln}\,(x)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\cdot\mathrm{Ln}\,(x)\right] - \int\left(\frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{dx}{x}\right)$$

$$= \frac{x^3\,\mathrm{Ln}\,(x)}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\,dx$$

$$= \frac{x^3\,\mathrm{Ln}\,(x)}{3} - \frac{x^3}{9}$$

$$= \frac{x^3}{3}\left[\mathrm{Ln}\,(x) - \frac{1}{3}\right]$$

$$\int_1^3 x^2\,\mathrm{Ln}\,(x)\,dx = \frac{x^3}{3}\left[\mathrm{Ln}\,(x) - \frac{1}{3}\right]_1^3$$ Se calcula la integral.

$$= \frac{3^3}{3}\left[\mathrm{Ln}\,(3) - \frac{1}{3}\right] - \frac{1^3}{3}\left[\mathrm{Ln}\,(1) - \frac{1}{3}\right]$$

$$= 9\left[\mathrm{Ln}\,(3) - \frac{1}{3}\right] - \frac{1}{3}\left[0 - \frac{1}{3}\right]$$

$$= 9\,\mathrm{Ln}\,(3) - 3 + \frac{1}{9}$$

$$= 9\,\mathrm{Ln}\,(3) - \frac{26}{9}$$

Finalmente, $\int_1^3 x^2\,\mathrm{Ln}\,(x)\,dx = 9\,\mathrm{Ln}\,(3) - \frac{26}{9}$.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • E Ejercito • R Razono • S Soluciono problemas

Responde las siguientes preguntas.

146. ¿Cómo se puede determinar el valor de la integral definida de una función continua?

147. Si f es continua en $[a, b]$ y $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, ¿F es diferenciable?

E Determina la derivada $F'(x)$ de las siguientes funciones:

148. $F(x) = \int_2^x (4t - t^2)\,dt$

149. $F(x) = \int_{-1}^x t^4\sqrt{4 - t^3}\,dt$

150. $F(x) = \int_2^x \sec^2(3t)\,dt$

151. $F(x) = \int_x^5 \frac{t-2}{t^2+5}\,dt$

152. $F(x) = \int_{2x}^{4x} (t^3 - 4t)\,dt$

153. $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{t}{t+8}\,dt$

154. $F(x) = \int_{-x}^{\sqrt{x}} 2\cos t\,dt$

155. $F(x) = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} t^2\,dt$

E Asocia cada integral definida con su respectivo valor.

156. $\int_0^2 \sqrt{2 - x}\,dx$ — **a.** 2

157. $\int_1^e x\,\mathrm{Ln}\,x\,dx$ — **b.** $\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{81}\right)$

158. $\int_{-3}^{-1} \frac{4}{x}\,dx$ — **c.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

159. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx$ — **d.** $\frac{e^2+1}{4}$

160. $\int_0^1 \arctan x\,dx$ — **e.** $\frac{\pi}{4} - \frac{\mathrm{Ln}\,2}{2}$

161. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ — **f.** 0

Determina si el valor que se indica para cada integral es correcto. En caso contrario, corrige el error.

162. $\int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx = 2\pi$

163. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

164. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx = 2$

165. $\int_0^2 x^2 e^{-4x}\,dx = \frac{|-4|\,e^{-8}}{32}$

R El valor promedio de una función en un intervalo $[a, b]$ se define como $f_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Halla el valor promedio de las siguientes funciones en el intervalo dado.

166. $f(x) = 3x^2\sqrt{x^3 - 4}$ en $[2, 5]$

167. $f(x) = x^2e^x$ en $[0, 1]$

168. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ en $[0, \pi]$

Utiliza la propiedad 12 de la página 266 para determinar el valor de las siguientes integrales definidas.

169. $\int_{-2}^{2} x^2\,dx$

170. $\int_{-3}^{3} (2x^2 + 3)\,dx$

171. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

172. $\int_{-2}^{2} |x|\,dx$

173. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

174. $\int_{-3}^{3} x^4(x^3 - x)\,dx$

175. $\int_{-1}^{1} (x^4 + x^2)\,dx$

176. $\int_{-2}^{2} (x^2 - 2x)\,dx$

177. $\int_{-1}^{1} x^2\operatorname{sen} x\,dx$

178. $\int_{-2}^{2} (x^3 - x)\,dx$

179. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$

180. $\int_{-1}^{1} \operatorname{arcsen} x\,dx$

S Considera un alambre recto que se extiende desde $x = a$ hasta $x = b$ y cuya función de densidad es $\sigma = \sigma(x)$ (en g/cm).

Luego la masa total del alambre viene dada por

$$m = \int_a^b \sigma(x)\,dx$$

Determina la masa de los alambres en los siguientes intervalos con sus respectivas funciones de densidad.

181. $a = -\frac{\pi}{4}$; $b = \frac{\pi}{4}$; $\sigma(x) = \cos x$

182. $a = 0$; $b = e$; $\sigma(x) = e^x$

183. $a = 1$; $b = 4$; $\sigma(x) = \frac{x^4}{3}$

184. $a = e$; $b = e^2$; $\sigma(x) = \frac{1}{x\,\mathrm{Ln}\,x}$

Lo que viene...

A continuación aprenderás a calcular el área entre dos curvas. Consulta cómo puedes hallar el área de la región limitada por las funciones $y = x^2$ y $y = 4$. Explica en tu cuaderno paso a paso y traza la gráfica respectiva.

5. Cálculo de áreas

Actividad

A partir de los conceptos trabajados en los temas anteriores, en este se utilizará el de la integral para calcular áreas bajo curvas.

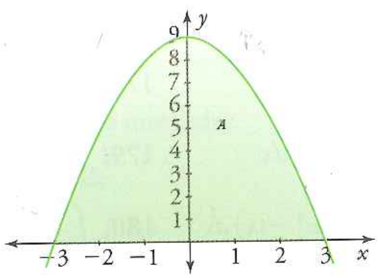
Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$, tal que $f(x) \geqslant 0$. La región limitada por $f(x)$, $x = a$, $x = b$ y el eje x tiene por área $A = \int_a^b f(x)\,dx$.

Si $f(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces, $A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$. Es decir, en estos casos se calcula la integral definida y después se obtiene su valor absoluto.

EJEMPLOS

1. Determinar el área de la región limitada por la función $f(x) = 9 - x^2$ y el eje x.

Primero, se realiza el bosquejo de gráfica de la función $f(x) = 9 - x^2$ para identificar la región.



Segundo, se buscan los límites de integración.

En este caso, como $y \geqslant 0$, entonces, se resuelve.

$9 - x^2 = 0$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Por tanto, $a = -3$ y $b = 3$.

Tercero, se plantea la integral que proporciona el área. Como la función es positiva, entonces la integral es:

$A = \int_{-3}^{3} (9 - x^2)\,dx$

Cuarto, se calcula la integral.

$$\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\,dx = \left[9x - \frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}$$
$$= 9(3) - \frac{3^3}{3} - \left(9(-3) - \frac{(-3)^3}{3}\right)$$
$$= 54 - 18$$
$$= 36$$

Finalmente, el área de la región limitada por la función $f(x) = 9 - x^2$ y el eje x es 36 unidades cuadradas.

2. Calcular el área encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = 0{,}2x^3 - 0{,}2x^2 - 1{,}2x$ y el eje x en el intervalo $[-2, 4]$.

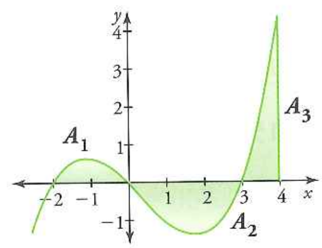
Primero, se calculan los puntos de corte de la función con el eje x, así:

$f(x) = 0$

$0{,}2x^3 - 0{,}2x^2 - 1{,}2x = 0$

$0{,}2x\,(x + 2)(x - 3) = 0$

$x = 0,\ x = -2,\ x = 3$



Como se muestra en la figura.

Luego, el área está determinada por:

$A = A_1 + A_2 + A_3$

donde, el área de cada región es:

$$A_1 = \int_{-2}^{0} [0{,}2x^3 - 0{,}2x^2 - 1{,}2x]\,dx$$
$$= \left[0{,}2\left(\frac{x^4}{4}\right) - 0{,}2\left(\frac{x^3}{3}\right) - 1{,}2\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_{-2}^{0} \approx 1{,}07$$

$$A_2 = \left| \int_{0}^{3} [0{,}2x^3 - 0{,}2x^2 - 1{,}2x]\,dx \right|$$
$$= \left| \left[0{,}2\left(\frac{x^4}{4}\right) - 0{,}2\left(\frac{x^3}{3}\right) - 1{,}2\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_{0}^{3} \right|$$
$$= |-3{,}15| = 3{,}15$$

$$A_3 = \int_{3}^{4} [0{,}2x^3 - 0{,}2x^2 - 1{,}2x]\,dx$$
$$= \left[0{,}2\left(\frac{x^4}{4}\right) - 0{,}2\left(\frac{x^3}{3}\right) - 1{,}2\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_{3}^{4} \approx 2{,}08$$

Ahora, se determina el área, así:

$A = A_1 + A_2 + A_3 = 1{,}07 + 3{,}15 + 2{,}08 \approx 6{,}3$

Finalmente, el área de la región es 6,3 unidades cuadradas.

5.1 Área entre curvas

Ampliación multimedia

Hasta ahora se han considerado regiones en el plano limitadas por una sola función, pero, de la misma manera, se pueden calcular áreas de regiones que están limitadas por dos o más funciones.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, tales que $f(x) \geqslant g(x)$, entonces, se tiene que el área de la región limitada por las curva $y = f(x)$ y $y = g(x)$, y las rectas $x = a$, $x = b$ está dada por $A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

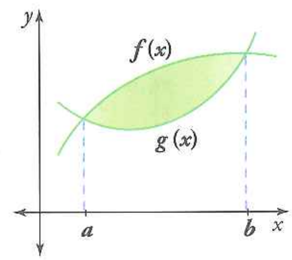


Figura 3.

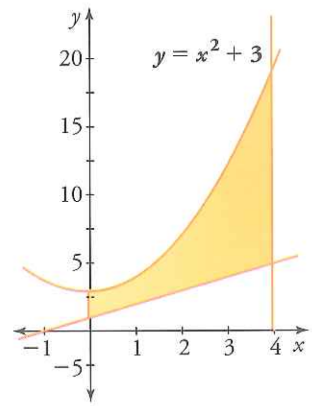


Figura 4.

EJEMPLOS

1. Determinar el área de la región limitada por las condiciones dadas.

a. Limitada por $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = x + 1$, $x = 0$, $x = 4$.

Como $f(x) \geqslant g(x)$ en el intervalo $[0, 4]$, como se puede ver en la figura, el área se encuentra calculando la integral definida.

$$A = \int_0^4 [f(x) - g(x)]dx$$

$$A = \int_0^4 (x^2 + 3 - (x + 1))\,dx$$

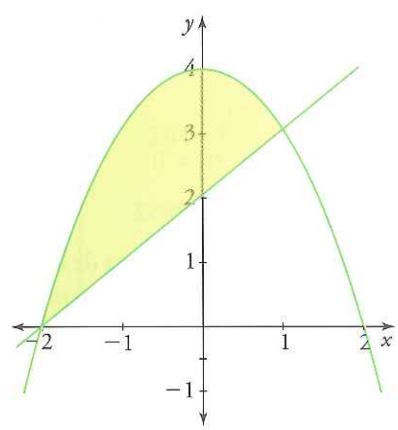
$$A = \int_0^4 (x^2 + 3 - (x + 1))\,dx = \int_0^4 (x^2 - x + 2)\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_0^4$$

$$= \frac{64}{3} - 8 + 8 = \frac{64}{3}$$

Finalmente, el área es $\frac{64}{3}$ unidades cuadradas.

b. Limitada por $f(x) = 4 - x^2$ y $f(x) = x + 2$.



$4 - x^2 = x + 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

$x = -2$ y $x = 1$

Como $f(x) \geqslant g(x)$ y las funciones se cruzan en dos puntos, como se puede ver en la gráfica, el área se encuentra calculando la integral definida.

$$A = \int_{-2}^1 [f(x) - g(x)]\,dx$$

$$= \int_{-2}^1 [(4 - x^2) - (x + 2)]\,dx$$

$$\int_{-2}^1 [2 - x - x^2]\,dx$$

$$= \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^1$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right) = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

Finalmente, el área es $\frac{9}{2}$ unidades cuadradas.

Ampliación multimedia

Recurso imprimible

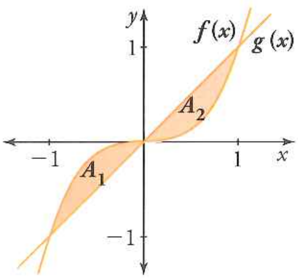


Figura 5.

2. Hallar el área comprendida entre $f(x) = x^3$ y $g(x) = x$.

Primero, en la gráfica se aprecia que $f(x)$ y $g(x)$ se cruzan en más de un punto. Por tanto, el primer paso consiste en encontrar los puntos de corte. Para ello se igualan las expresiones así:

$x^3 = x$

$x^3 - x = 0$ Se transponen términos y se iguala a cero.

$x(x^2 - 1) = 0$ Se factoriza.

$x(x + 1)(x - 1) = 0$

$x = 0$, $x = -1$ y $x = 1$ Se hallan las soluciones.

Luego, se halla el área de la región comprendida entre -1 y 1, como se muestra en la figura 5.

$A = A_1 + A_2$

Como en la región A_1, $f(x) \geqslant g(x)$ y en la región A_2, $g(x) \geqslant f(x)$, entonces, se tiene:

$$A = \int_{-1}^{0}[f(x) - g(x)]\,dx + \int_{0}^{1}[g(x) - f(x)]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0}[x^3 - x]\,dx + \int_{0}^{1}[x - x^3]\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}$$

$$= \left[\frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{4}\right] = \frac{1}{2}$$

Finalmente, el área comprendida entre las funciones es $\frac{1}{2}$ unidades cuadradas.

3. Hallar el área de la región limitada por $f(x) = x^4 - 2x^2$ y $g(x) = 2x^2$.

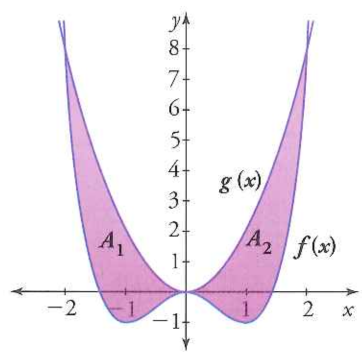
$x^4 - 2x^2 = 2x^2$

$x^4 - 4x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 4) = 0$

$x^2(x + 2)(x - 2) = 0$

$x = 0$, $x = -2$ y $x = 2$



En este caso, se halla el área de la región comprendida entre -2 y 2, como se muestra en la figura.

$A = A_1 + A_2$

Como en ambas regiones $g(x) \geqslant f(x)$, entonces, se tiene:

$$A = \int_{-2}^{2}[g(x) - f(x)]\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2}[2x^2 - (x^4 - 2x^2)]\,dx = \int_{-2}^{2}[4x^2 - x^4]\,dx$$

$$= \left[4\left(\frac{x^3}{3}\right) - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2} = \left[4\left(\frac{2^3}{3}\right) - \frac{2^5}{5}\right] - \left[4\left(\frac{(-2)^3}{3}\right) - \frac{(-2)^5}{5}\right]$$

$\approx 8{,}53$

Finalmente, el área comprendida entre las funciones es aproximadamente 8,53 unidades cuadradas.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Modelo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

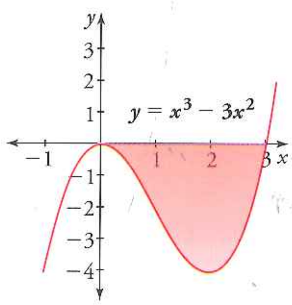
Responde las siguientes preguntas.

185. Si f es función positiva y continua en $[a, b]$, ¿qué significado geométrico tiene $\int_a^b f(x)\,dx$?

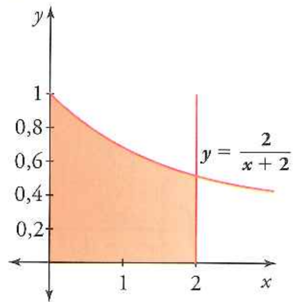
186. ¿Qué integral debe plantearse para determinar el valor del área encerrada entre las curvas $y = x^2$ y $y = x^3$ en el intervalo $[0, 1]$?

Plantea la integral o las integrales necesarias para calcular el área de las regiones sombreadas. Luego, determina el área.

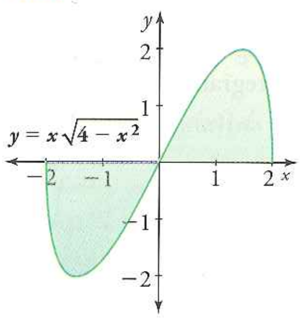
187.



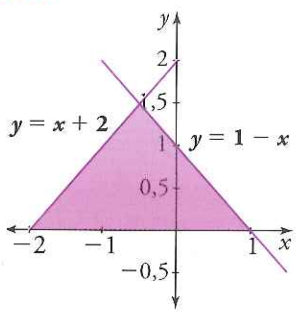
190.



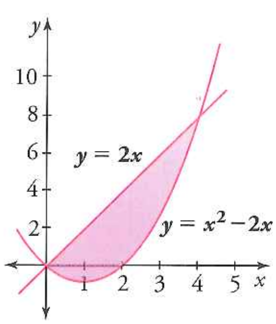
188.



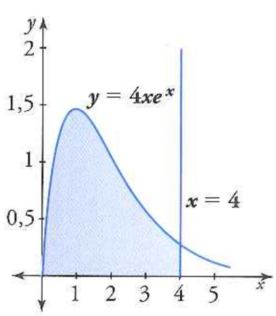
191.



189.



192.



Considera $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, donde $a > 0$.

193. Plantea la integral para determinar el área encerrada entre la gráfica de f y el eje x.

194. Demuestra que $F(x)$ es una antiderivada para f. (Sugerencia remplaza $x = a$ sen θ.)

$$F(x) = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

195. Determina el valor del área encerrada entre la gráfica de f y el eje x.

196. Realiza la gráfica de f y halla el valor del área sin utilizar integrales.

Realiza la gráfica y calcula el área de la región.

197. Limitada por la curva $y = \tan x$; $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ y el eje x.

198. Limitada por la curva $y = |x| + 1$ y las rectas definidas como $x = -1$; $x = 2$; $y = 0$.

199. Limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 4$.

200. Limitada por las rectas $x + y = 4$; $y = x$; $y = 0$.

201. Limitada por la curva $y = \cos x + 1$, desde el punto $x = 0$ hasta $x = \pi$ y por el eje x.

202. Limitada por las curvas $y = \frac{2}{x+1}$; $y = x$ y $x = 0$ en el primer cuadrante.

Las integrales que aparecen a continuación representan áreas de regiones del plano. Realiza la gráfica de cada región y determina el valor del área.

203. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x} =$ ______________

204. $\int_0^2 \left(e^x - \left(1 - \frac{x}{2}\right)\right) dx =$ ______________

205. $\int_0^2 f(x)\,dx =$ ______________

donde $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ 2x - x^2 & x \in [1,2] \end{cases}$

206. $\int_0^1 (2 - x^2 - x)\,dx =$ ______________

Un adorno presenta la forma de una flor tipo margarita con 20 pétalos. La forma de cada pétalo corresponde con la de la región limitada por las curvas $y = 2\sqrt[4]{x}$ y $y = 2x^3$, donde x, y están dados en pulgadas.

207. Determina la cantidad de material necesario para elaborar todos los pétalos de la flor.

208. Si el costo del material para los pétalos es \$1,5 por pulgada cuadrada, ¿cuánto cuesta elaborar los pétalos de una de las flores?

EJERCICIOS PARA REPASAR

Antiderivadas e integral indefinida

Completa el enunciado de tal manera que la afirmación sea correcta.

209. Dos antiderivadas de $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x^{\frac{3}{4}}$ son ______________ y ______________.

210. La función $f(x)$ para la cual $f''(x) = 6x$, que pasa por (2, 8) y la pendiente de la recta tangente en dicho punto es 12, es ______________.

211. La diferencia entre una integral indefinida y una integral definida es ______________
______________.

212. Asocia cada función con su antiderivada.

Función	Antiderivada
$x^2 - 5\sqrt{x}$	$\frac{3}{4}(\text{sen}\,(4x) - 1)$
$3\cos\,(4x)$	$-5 + 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$
$\frac{1+x}{\sqrt{x}}$	$4\arctan\,(x)$
$\frac{4}{1+x^2}$	$\frac{x^3}{3} - \frac{10}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2}{3}$

Halla la solución particular de cada integral dada, con su condición inicial.

213. $\int (4x^3 + 7x + 6)\,dx \qquad f(1) = 25$

214. $\int (\text{sen}\,x + \cos x)\,dx \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

215. $\int \left(e^x + \frac{1}{x}\right)dx \qquad f(1) = 0$

Calcula las siguientes integrales.

216. $\int (5x^{-3} + 2x^{-2} - x^2)\,dx =$ ______________

217. $\int (2^x + e^x - \text{sen}\,x)\,dx =$ ______________

Métodos de integración

Utiliza una sustitución adecuada para calcular las siguientes integrales.

218. $\int \frac{x}{x^2+2}\,dx$

219. $\int \frac{3x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$

220. $\int \cos\,(x)\,e^{\text{sen}\,(x)}\,dx$

221. $\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^3}\,dx$

Aplica el método de integración por partes para calcular las siguientes integrales.

222. $\int 4x\,\text{sen}\,(3x)\,dx$

223. $\int e^{2x-1}\,\text{sen}\,2x\,dx$

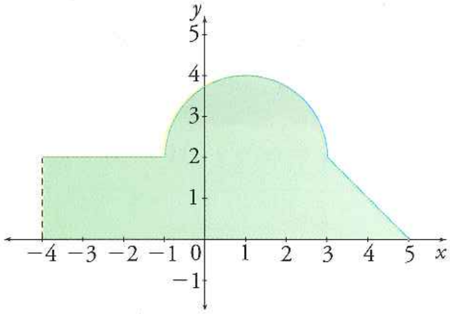
224. $\int (1 + \cos\,(x))^2\,dx$

225. $\int x^4(\text{Ln}\,x)^2\,dx$

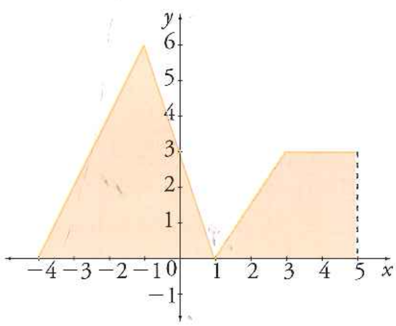
Área

Escribe como una integral, la representación del área bajo cada curva dada. Luego, calcula el área.

226.



227.



Determina el valor de la integral definida en cada caso, si $f(x)$ es una función par, $g(x)$ es impar y que

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 4 \text{ y } \int_{-3}^{0} g(x)\,dx = 5$$

228. $\int_{-3}^{3} [f(x) + g(x)]\,dx$ ______________________

229. $\int_{-3}^{3} g(x)\,dx$ ______________________

230. $\int_{0}^{3}\left[\frac{3}{8}f(x) + 5g(x) - 8\right]dx$ ______________________

Relación entre integración y derivación

Halla $F'(x)$ en cada caso.

231. $F(x) = \int_{3}^{x} t^2\cos(t + 5)\,dt$

____

232. $F(x) = \int_{1}^{x^2+2} \sqrt{3t + 6}\,dt$

____

Determina el valor de las siguientes integrales.

233. $\int_{0}^{1} 3x\sqrt{x^2 + 4}\,dx$

____

234. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \arctan(x)\,dx$

____

235. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ si $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si} < -1 \\ 4 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x^2 + 4 & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$

____

Cálculo de áreas

Determina el área de la región limitada en cada caso.

236. $f(x) = x^3 - 3x + 2$, el eje x y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 2$.

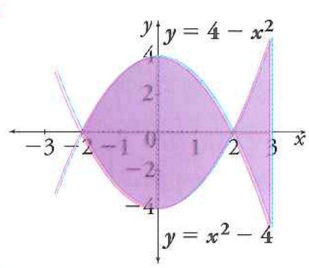
____

237. $g(x) = e^{2x} + x^5 + 3$, el eje x y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$.

____

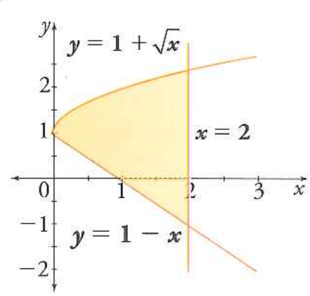
Determina el área de la región dada en la figura.

238.



A=______________

239.

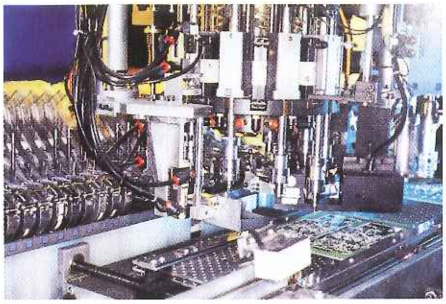


A=______________

PROBLEMAS PARA REPASAR

Una empresa de tecnología fabrica computadores portátiles.

Un estudio de eficiencia elaborado en la empresa mostró que la razón a la que en promedio ensambla estos equipos t horas después de iniciar la jornada laboral está dada por la expresión $-\frac{3}{2}t^2 + 6t + 20$.



¿Cuál es la cantidad total de computadores que ensambla la empresa en promedio durante las cuatro primeras horas?, y ¿cuál es la cantidad total de computadores que se ensambla en promedio entre la primera y la segunda hora?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Cuál es la cantidad total de computadores que ensambla la empresa en promedio durante las cuatro primeras horas?

¿Cuál es la cantidad total de computadores que se ensamblan en promedio entre la primera y la segunda hora?

¿Cuáles son los datos del problema?

La eficiencia en el ensamble de computadores t horas después de iniciar el trabajo es $-\frac{3}{2}t^2 + 6t + 20$.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Primero, se expresa la integral definida para el intervalo $0 \leqslant t \leqslant 4$, respecto a la variable tiempo t, de la función eficiencia:

$$\int_0^4 \left(-\frac{3}{2}t^2 + 6t + 20\right)dt$$

Segundo, se calcula la integral definida, así:

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \left(-\frac{3}{2}t^2 + 6t + 20\right)dt &= \left[-\frac{3}{2}\left(\frac{t^3}{3}\right) + 6\left(\frac{t^2}{2}\right) + 20t\right]_0^4 \\
&= \left[-\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20t\right]_0^4 \\
&= \left[-\frac{1}{2}(4)^3 + 3(4)^2 + 20(4)\right] - \left[-\frac{1}{2}(0)^3 + 3(0)^2 + 20(0)\right] \\
&= [-32 + 48 + 80] = 96
\end{aligned}$$

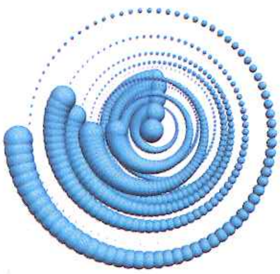
Tercero, se determina la cantidad de computadores que se pueden ensamblar entre la primera y la segunda hora.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \left(-\frac{3}{2}t^2 + 6t + 20\right)dt &= \left[-\frac{3}{2}\left(\frac{t^3}{3}\right) + 6\left(\frac{t^2}{2}\right) + 20t\right]_1^2 \\
&= \left[-\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20t\right]_1^2 \\
&= \left[-\frac{1}{2}(2)^3 + 3(2)^2 + 20(2)\right] - \left[-\frac{1}{2}(1)^3 + 3(1)^2 + 20(1)\right] \\
&= \frac{51}{2}
\end{aligned}$$

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Se verifica que las operaciones son correctas. Entonces, se tiene que, en las primeras cuatro horas, se estima que en promedio se ensamblan 96 computadores. Luego, entre la primera y segunda hora, son ensamblados 25 computadores ya que no se deben considerar fracciones de computadores.

240. **Una partícula se mueve con una aceleración respecto al tiempo t mediante la expresión: $a(t) = \cos(t) + \text{sen}(t)$, donde parte del origen con una velocidad inicial de 1 m/s.**



Determina la función de posición $S(t)$ de la partícula si $S'(t) = v(t)$ y $v'(t) = a(t)$.

Resuelve las preguntas 241 a 243, de acuerdo con la siguiente información.

Cuando llueve, una gota de agua cae desde una altura aproximada de 600 m.

241. ¿Qué velocidad tendrá a los 3 segundos?

242. Determina mediante integrales el espacio que habrá recorrido hasta ese momento.

243. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar al suelo?

244. **En una compañía de autopartes el costo marginal de producción de q artículos es de $1.500 - 20q$. Si el costo de producción de dos artículos es de 350 dólares, ¿cuál es el costo de producción de 30 artículos?**

245. **Una compañía que fabrica muebles confirma que el costo marginal por la fabricación de sus escritorios está dado por la expresión:**

$$c'(q) = 0{,}002q + 100 \text{ dólares}$$

cuando se producen q unidades al mes.

Si se sabe que los costos fijos de la empresa al mes son de 4.000 dólares por mes. Determina los costos totales por la producción de q unidades en el mes.

246. **La puerta de una iglesia tiene la forma de un rectángulo con un arco parabólico, el ancho de la puerta mide 3 m y su altura varía con base en la posición con relación al piso y se expresa con la ecuación $h(x) = 150 - \frac{x^2}{100}$.**

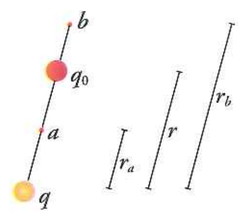
Determina el área de la puerta.

247. **En una ciudad, la tasa de consumo de energía eléctrica es $c'(t)$, la cual aumenta de forma exponencial con una constante de crecimiento de 0,06. Si la tasa de consumo actual es de 40 kWh por año, entonces la tasa de consumo en el año t está dada por $c'(t) = 40e^{0,06t}$.**

Determina la producción de energía necesaria para abastecer a la población en los próximos tres años.

Resuelve las preguntas 248 y 249 con base en la siguiente información.

El trabajo realizado sobre una carga de prueba q_0, que se desplaza en el campo eléctrico producido por una carga puntual estacionaria q, del punto a al punto b, como se muestra en la figura, está dado por:



$$W = \int_{r_a}^{r_b} \left(\frac{1}{4p\varepsilon} - \frac{qq_0}{r^2} \right) dr$$

Donde ε es una constante, y r_a y r_b son las distancias desde q al punto a y b, respectivamente.

248. Determina W.

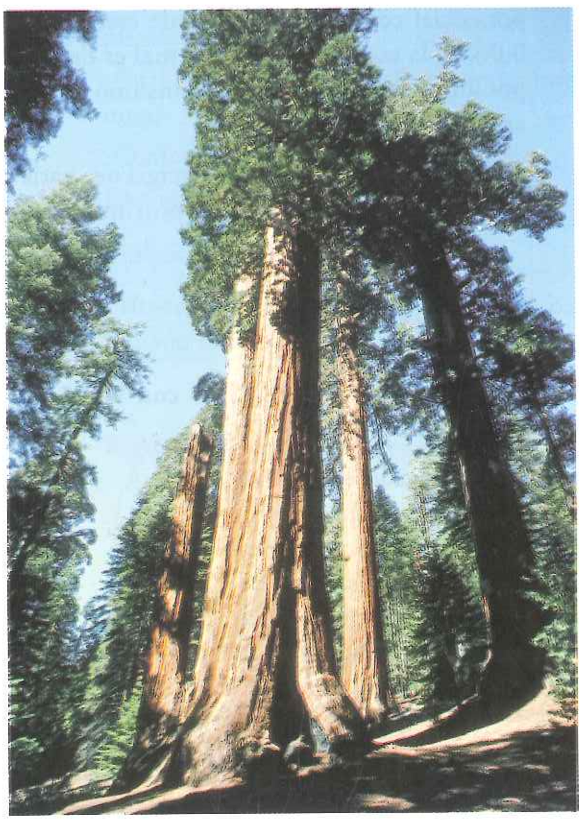
249. Calcula el trabajo si $r_a = 0{,}02$ mm, $r_b = 0{,}06$ mm.

...Para determinar la altura de los árboles.

Galería de imágenes

Por lo general, en la naturaleza se pueden encontrar diferentes razones de cambio de ciertas características físicas, tales como el tamaño y la edad de las plantas y de los animales.

En el caso de los árboles, algunas especies logran crecer hasta más de 100 metros y pueden permanecer por cerca de 2.500 años en condiciones ideales como la *secuoya*.



El crecimiento de los árboles no se presenta en forma lineal, y para calcular su altura pasados t años, se utiliza la razón de cambio de su altura con respecto al tiempo. La siguiente expresión muestra la razón de cambio en centímetros por año de la altura h de un árbol con respecto al tiempo t:

$$\frac{dh}{dt} = 0,5t^{\frac{4}{3}} + 0,3\sqrt{t}$$

Para obtener la expresión de la altura del árbol en función del tiempo, es necesario hallar la integral de la anterior expresión.

$$\int dh = \int [0,5t^{\frac{4}{3}} + 0,3\sqrt{t}]dt$$

Primero, se aplica la propiedad de la integral de una suma, con lo cual se obtiene:

$$\int dh = \int 0,5t^{\frac{4}{3}}dt + \int 0,3\sqrt{t}\,dt$$

Segundo, se extraen las constantes de la integral y se expresa la raíz cuadrada con un exponente racional.

$$\int dh = 0,5\int t^{\frac{4}{3}}dt + 0,3\int t^{\frac{1}{2}}dt$$

Luego, se resuelven las integrales, de donde se obtiene la expresión para calcular la altura en función del tiempo.

$$h(t) = 0,21t^{\frac{7}{3}} + 0,2^{\frac{3}{2}} + C$$

Finalmente, se expresan las potencias como radicales.

$$h(t) = 0,21\sqrt[3]{t^7} + 0,2\sqrt{t^3} + C$$

Como la expresión depende de la constante C, es necesario conocer el tamaño inicial del árbol en el momento que se planta, es decir, cuando $t = 0$. Si se supone que el árbol tenía una altura inicial de 15 cm, entonces, $h(0) = C = 15$.

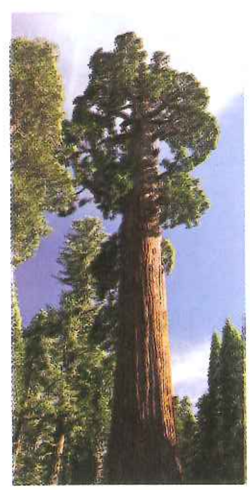
1. **¿Por qué es importante controlar el crecimiento de los árboles?**

2. **Supón que la expresión que se plantea en la lectura representa la altura de una palmera, ¿qué altura alcanzará la palmera en 10 años?**

3. **Un ingeniero ambiental monitorea anualmente la razón de cambio de la altura de un secuoya y encuentra la siguiente expresión:**

$$\frac{dh}{dt} = 0,08^{\frac{1}{3}} + 6t^{\frac{1}{2}}$$

Para no trasladar el árbol del lugar donde se encuentra, su altura no debe sobrepasar los 80 metros al cabo de 100 años de edad. Si su altura inicial era 30 cm, ¿es posible trasladar el árbol de su posición inicial?



4. **Consulta sobre los árboles más grandes del mundo. Luego, explica a tus compañeros los cuidados y precauciones que hay que tener cuando crecen de forma desmedida en lugares poblados.**

...También sirve para calcular la fuerza que ejerce el agua en la columna de una represa hidroeléctrica.

La represa es una barrera artificial construida por el hombre para almacenar grandes cantidades de agua en un lugar específico. Estas megaconstrucciones son hechas con el fin de generar energía eléctrica a partir del movimiento del agua.

En la construcción de una represa, los ingenieros deben tener en cuenta diferentes fuerzas que debe resistir la mole de concreto, tales como la fuerza producida por la presión del agua en la base y la presión lateral cuando el agua está en contacto con la estructura de hormigón.

Como la presión lateral del agua depende de la profundidad, las represas se hacen más anchas en la parte inferior que en la parte superior, ya que en esta parte la estructura debe ser más resistente.

Para construir una estructura resistente, es importante calcular la fuerza lateral ejercida por el agua en cualquier punto. Para esto, si la sección transversal de la represa es un rectángulo de z unidades de largo, entonces, la fuerza se calcula mediante la siguiente expresión:

$$F = \rho g \int_a^b z f(x)\,dx$$

En donde:

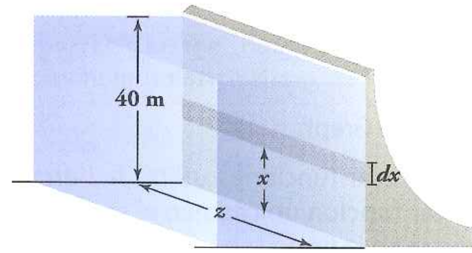
ρ es la densidad del agua.

z es la longitud de la represa.

$f(x)$ es la profundidad.

g es la aceleración de la gravedad que equivale aproximadamente a 9,8 m/s^2.

Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra una represa a la que se le quiere calcular la fuerza ejercida por el agua, tomando como punto de referencia uno de sus extremos inferiores.



Para este caso, la integral definida se calcula desde cero hasta la altura del agua que es 40 m, y la profundidad desde la superficie del agua es $f(x) = 40 - x$, por tanto, se tiene:

$$F = \rho g \int_0^{40} z(40 - x)\,dx$$

Resolviendo la integral definida se obtiene:

$$F = \rho g z \int_0^{40} (40 - x)\,dx = \rho g z \left[40x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{40}$$

Evaluando la integral entre 0 y 40 su resultado es:

$$F = \frac{40^2 \rho g z}{2}$$

Suponiendo que la represa tiene una longitud de $z = 80$ m y la densidad del agua es $\rho = 1.000$ kg/m^3, entonces, la fuerza es:

$$F = \frac{40^2 \cdot 9{,}8 \cdot 1.000 \cdot 80}{2} = 627.200.000 \text{ N}$$

Así, la fuerza que debe soportar la represa es aproximadamente 627.200.000 N.

1. **¿Qué riesgos se tomarían si no se calculara la fuerza que ejerce el agua sobre la represa?**
2. **La expresión para calcular la fuerza generada por una represa de sección transversal triangular está dada por la expresión:**

$$F = \int_{10}^{110} \frac{1}{2} \rho g x(110 - x)\,dx$$

¿Cuál es la fuerza que resiste la represa?

3. **Calcula la fuerza que debe soportar una compuerta de una represa que tiene 90 m de altura y 200 m de longitud, si esta se encuentra a 25 m de profundidad.**
4. **Consulta sobre los diferentes tipos de represas que existen y escribe, en tu cuaderno, acerca de la importancia de su forma cuando se construyen.**

Trabaja con Graph

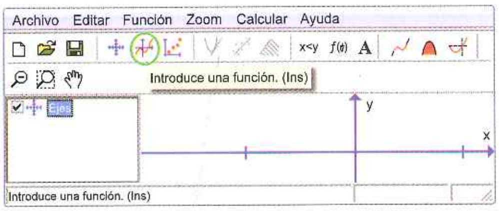
Objetivo: determinar el área entre dos curvas, a partir de las expresiones algebraicas de las funciones.

Descripción: calcular el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = 3x^2 - x^2 + 10x$; $g(x) = -x^2 + 2x$, reconociendo los puntos de corte o intersección entre las funciones.

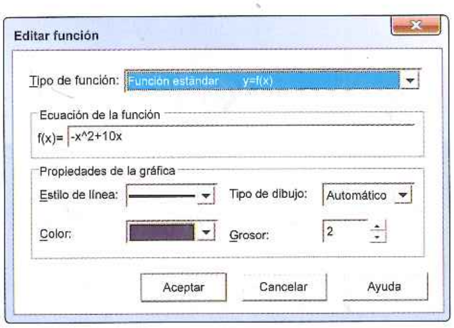
Para acceder a Graph, ingresa y descarga el programa en: gratis.portalprogramas.com

1. Haz clic en Graph.

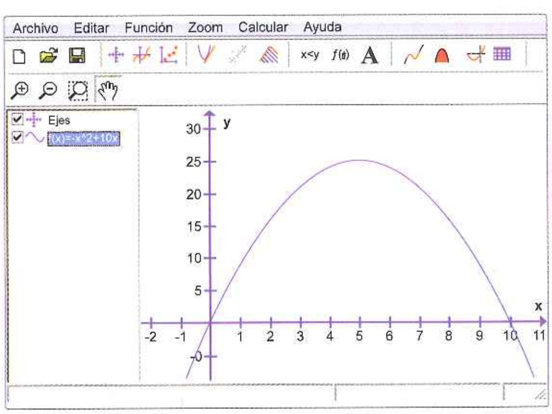
2. Para ingresar funciones utiliza la herramienta **Insertar función** ubicada en el menú, como se muestra en la figura.



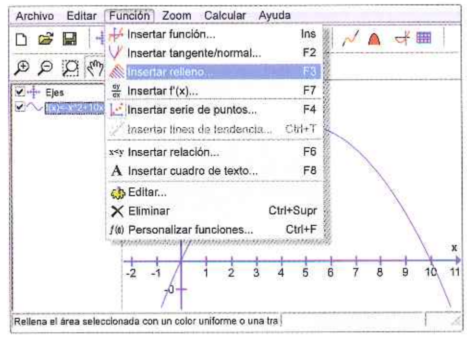
3. Ingresa la función $f(x) = -x^2 + 10x$, en la ventana que se despliega. Luego, cambia el aspecto de la gráfica de la función con las herramientas indicadas, como se muestra en la figura.



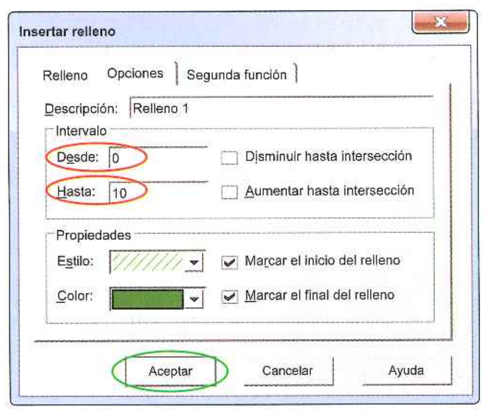
4. Cambia los valores mínimos y máximos de los ejes coordenados. Luego, haz clic en **Aceptar** para que la gráfica de la función tenga la siguiente apariencia.



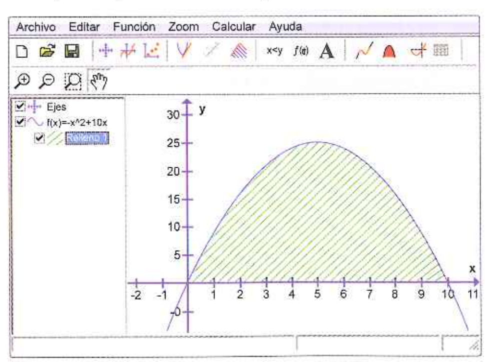
5. Selecciona **Función** en el menú. Luego, haz clic en **Insertar relleno**, como se muestra en la figura.



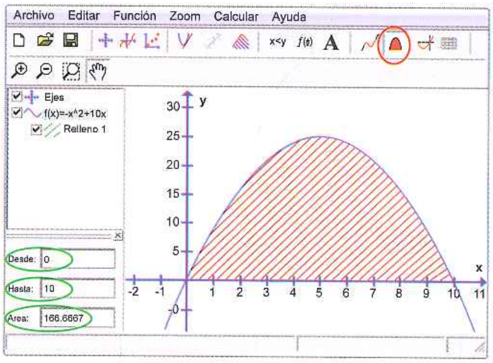
6. Observa la ventana que se despliega. Luego, selecciona la opción **Entre la función y el eje x.** Luego, selecciona **Opciones** y completa los espacios de los recuadros. Finalmente, haz clic en **Aceptar** como se muestra en la figura.



7. Observa la ventana con la región limitada entre la curva y el eje x, entre 0 y 10.

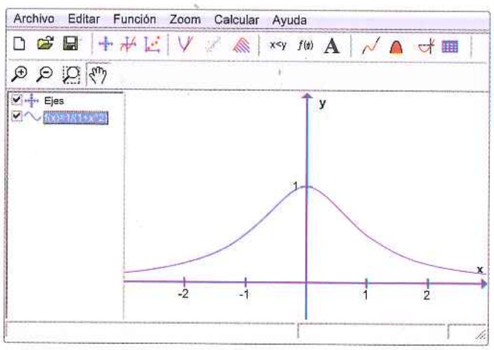


8. Utiliza la herramienta **Calcula el área**, para hallar el área sombreada, como se muestra en la figura.

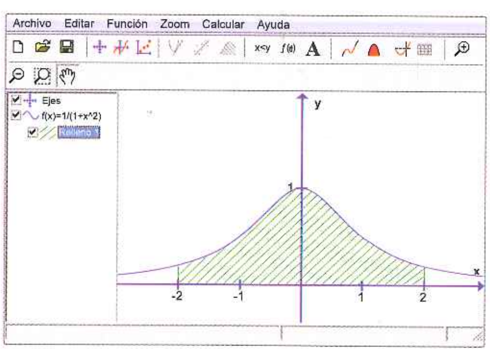


9. Comprueba el resultado, calculando la integral definida $\int_0^{10} (-x^2 + 10x)\,dx$.

10. Ingresa la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$. Luego, cambia los valores mínimos y máximos de los ejes coordenados, para obtener la siguiente figura.

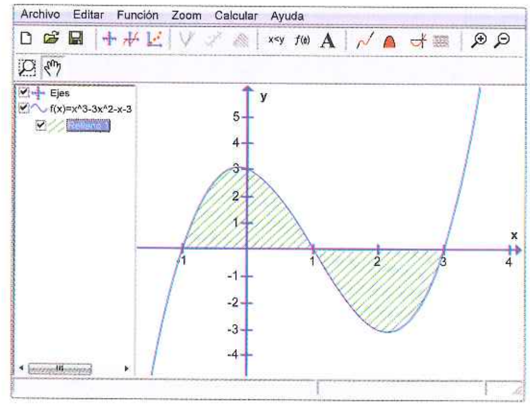


11. Determina el área comprendida entre el eje x y la función $f(x)$, como se muestra en la figura.

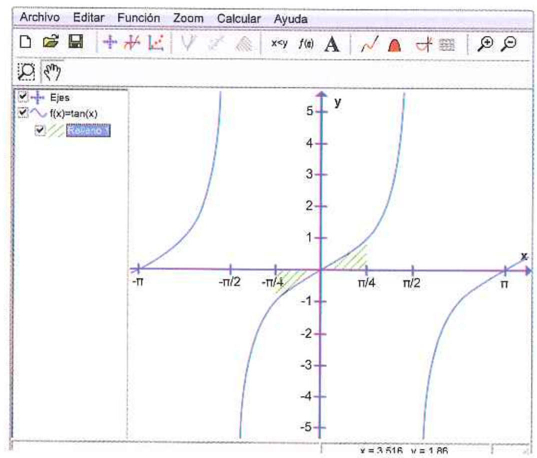


12. Comprueba el resultado, calculando la integral definida $\int_{-2}^{2} \dfrac{1}{1 + x^2}\,dx$.

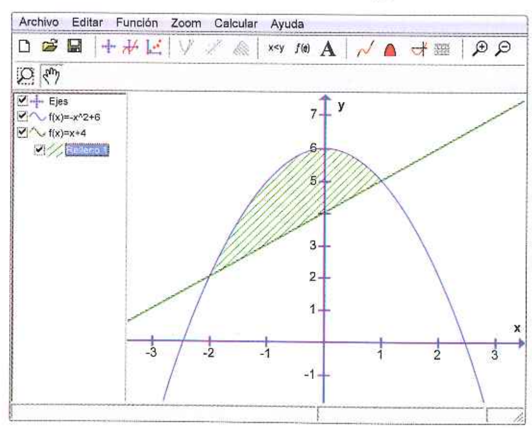
13. Ingresa la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 3$. Luego, determina el área comprendida entre el eje x y la función $f(x)$, como se muestra en la figura.



14. Ingresa la función $f(x) = \tan x$. Luego, determina el área comprendida entre el eje x y la función $f(x)$, como se muestra en la figura.



15. Ingresa $f(x) = -x^2 + 6$ y $g(x) = x + 4$. Luego, determina el área comprendida entre las dos curvas, como se muestra en la figura.



8 Estadística y probabilidad

Estándar: pensamiento aleatorio

→ Tu plan de trabajo...

- Aplicar la **probabilidad condicional** en la solución de problemas.
- Comprender el concepto de **variable aleatoria**.
- Reconoce las **distribuciones de probabilidad** para variables aleatorias discretas y continuas.

Encuentra en tu Libromedia

Evaluaciones:

✓ De desempeño ✓ Prueba Saber

- **7** Multimedia
- **1** Galerías
- **6** Actividades
- **1** Audio
- **6** Imprimibles
- **4** Enlaces web

Lo que sabes...

1. Determina, para cada uno de los siguientes casos, la población a la cual se dirige el estudio.
   a. Se quiere determinar la eficiencia de un nuevo antídoto para una picadura de serpiente.
   b. En un parque nacional natural se ha decidido hacer un censo para determinar las diferentes especies de árboles que hay.

2. Los siguientes datos corresponden a las edades de 28 personas que asisten regularmente a una sesión de yoga en la ciudad.

15	40	55	54	58	11	30
53	17	22	12	18	21	11
24	27	38	28	29	28	56
33	31	24	54	46	32	15

   a. Elaborar un diagrama de cajas para los datos.
   b. Calcular la media y la varianza de los datos.

Y esto que vas a aprender, ¿para qué te sirve?

...Para analizar el tiempo de espera de los clientes en un cajero automático.

Los cajeros automáticos permiten a los clientes realizar sus operaciones bancarias en un solo lugar, las 24 horas del día, durante los siete días de la semana. Por esto, en un cajero automático se pueden realizar con facilidad distintas transacciones bancarias, que van desde simples retiros hasta el manejo de inversiones.

Lee más acerca de este tema en la página 332.

Cronología de estadística y probabilidad

1654 d. C. — **Francia.** Blaise Pascal publicó su teoría de la probabilidad y combinatoria usada posteriormente en ramas como la genética y la economía.

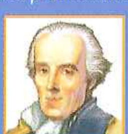
1713 d. C. — **Suiza.** Se publicó la obra de Jakob Bernoulli en donde postula la distribución de Bernoulli para la ocurrencia o fracaso de un suceso.

1733 d. C. — **Francia.** Abraham de Moivre utilizó la distribución normal como método de aproximación para la distribución binomial, su trabajo lo publicó en el libro *The doctrine of chance*.

1763 d. C. — **Inglaterra.** Thomas Bayes postuló un teorema que lleva su nombre para calcular la probabilidad condicional de un evento aleatorio.

1803 d. C. — **Francia.** Christian Kramp utilizó la notación *n!* para denotar los factoriales en una combinatoria.

1812 d. C. — **Francia.** Pierre Simón Laplace amplió el concepto de distribución normal en el libro *Teoría analítica de las probabilidades*.



1875 d. C. — **Gran Bretaña.** Francis Galton descubrió las propiedades de la distribución normal bivariada y su relación con el análisis de regresión.

1. Probabilidad condicional

Actividad

Con frecuencia la probabilidad de ocurrencia de un evento se ve afectada por la ocurrencia de otro evento que se relaciona con el inicial. Por ejemplo, si dos ingenieros ambientales, llamémoslos 1 y 2, califican para un determinado empleo en la construcción de vías públicas, la probabilidad de que el ingeniero 1 sea seleccionado puede estar afectada por el hecho de que dicho ingeniero haya optado un título de maestría en obras públicas; es decir, si el ingeniero 2 tiene un título de maestría en alguna otra especialidad, es posible que su probabilidad de ser escogido sea mucho menor que la probabilidad que tiene el ingeniero 1.

Así, si se supone que se tiene un evento A con probabilidad de ocurrencia dada por $P(A)$, si es posible obtener más información sobre el evento A y además ha ocurrido un evento B, relacionado con A, es razonable querer aprovechar la nueva información para hacer un cálculo más preciso de la probabilidad.

Esta nueva probabilidad recibe el nombre de **probabilidad condicional**, pues se va a calcular la probabilidad de A dada la información B.

En notación formal la probabilidad condicional se representa por la expresión $P(A / B)$.

Recuerda que...

Dos eventos son independientes si

$P(A / B) = P(A)$ o

$P(B / A) = P(B)$

La probabilidad de ocurrencia del evento A dado que ha sucedido el evento B se simboliza como $P(A / B)$. La probabilidad condicional está determinada por la expresión:

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Así, para calcular la probabilidad condicional de un evento A dado que sucedió un evento B hay que conocer la probabilidad de la intersección de dichos eventos.

EJEMPLO

En la etapa de selección para ascensos a diferentes tipos de cargos de una multinacional, la sección de recursos humanos analizó los currículos de sus 1.200 empleados. Después de estudiar dichos currículos, decidió ascender a 324 empleados. Los datos de la selección se registran a continuación.

	Mujeres	Hombres
No ascendidos	204	672
Ascendidos	36	288

Después de revisar el registro de ascensos, el comité de talento humano determinó que en la elección se había dado discriminación, hecho que se reflejaba en el número de ascensos de mujeres. ¿Hubo discriminación en la elección de ascensos?

Para solucionar la pregunta propuesta es necesario saber cuál es el significado de "discriminación" en este caso. Para ello, se analiza qué relación existe con el planteamiento y la probabilidad condicional.

Primero, se identifican los eventos de la siguiente manera.

A: ser mujer B: ser hombre C: ser ascendido C^c: no ser ascendido

Luego, se debe analizar si la probabilidad de ser ascendido dado que se es mujer es igual a la probabilidad de ser ascendido dado que se es hombre. Hacer este análisis obviaría el hecho de que entre los 1.200 empleados hay cuatro veces más hombres que mujeres. En términos de probabilidad se debe hallar $P(C / A)$ y $P(C / B)$. Así:

- $P(C / A) = \dfrac{P(C \cap A)}{P(A)}$

  Del registro se tiene que $C \cap A = 36$, por tanto, $P(C \cap A) = \dfrac{36}{1.200}$.

  Además, $A = 240$, luego, $P(A) = \dfrac{240}{1.200}$.

  Entonces, $P(C / A) = \dfrac{P(C \cap A)}{P(A)} = \dfrac{\frac{36}{1.200}}{\frac{240}{1.200}} = \dfrac{36}{240} = 0,15$

- $P(C / B) = \dfrac{P(C \cap B)}{P(B)}$

  Del registro se tiene que $C \cap B = 288$, por tanto, $P(C \cap B) = \dfrac{288}{1.200}$.

  Además, $B = 960$, luego, $P(B) = \dfrac{960}{1.200}$.

  Entonces, $P(C / B) = \dfrac{P(C \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{288}{1.200}}{\frac{960}{1.200}} = \dfrac{288}{960} = 0,30$

Finalmente, se observa en los resultados que la probabilidad de un ascenso dado que se es mujer es la mitad de la probabilidad de un ascenso dado que se es hombre, con lo cual queda demostrado que sí hubo discriminación en la elección.

1.1 Teorema de Bayes

Ampliación multimedia

Cuando se habla de probabilidad condicional se menciona un aspecto importante y es el hecho de calcular la probabilidad de un evento antes de que otro evento influya en el mismo. En el lenguaje del azar, hablar de la probabilidad del evento inicial se conoce como **probabilidad *a priori***. Cuando se obtiene información adicional sobre el evento inicial, esta modifica los valores de la probabilidad *a priori* y genera una nueva probabilidad que se denomina **probabilidad *a posteriori***; el teorema de Bayes proporciona un método para calcular las probabilidades *a posteriori*. Este teorema se aplica cuando los eventos para los que se van a calcular las probabilidades son mutuamente excluyentes (sus intersecciones son vacías) y la unión de todos ellos es todo el espacio muestral.

Si A_1 y A_2 son eventos mutuamente excluyentes, y $A_1 \cup A_2 = S$, entonces por el **teorema de Bayes** se tiene que:

$$P(A_1 / B) = \frac{P(A_1)P(B / A_1)}{P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2)} \text{ o}$$

$$P(A_2 / B) = \frac{P(A_2)P(B / A_2)}{P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2)}$$

Matemáticamente

¿En qué ayudaría el concepto de independencia para solucionar este problema?

Explica tu respuesta.

Historia de las matemáticas

Thomas Bayes (1702-1761)

En el siglo XVIII, el matemático y reverendo Thomas Bayes, intentó desarrollar una fórmula para evaluar la probabilidad de la existencia de Dios con base en evidencias terrenales. Años más tarde, fue Laplace quien terminó su desarrollo denominándolo teorema de Bayes.

Ampliación multimedia

EJEMPLO

Una marca de tintes para el cabello hizo llegar un folleto promocional de un nuevo tinte con alto contenido de queratina, al 72% de los peluqueros de una muestra seleccionada para la campaña. Un mes después, se verificó que el 46% de los peluqueros que recibieron el folleto compraron dichos tintes para usarlos en sus peluquerías y un 16% de los que no recibieron el folleto, también lo compraron. ¿Cuál es la probabilidad de que un peluquero haya recibido el folleto dado que compró el tinte?

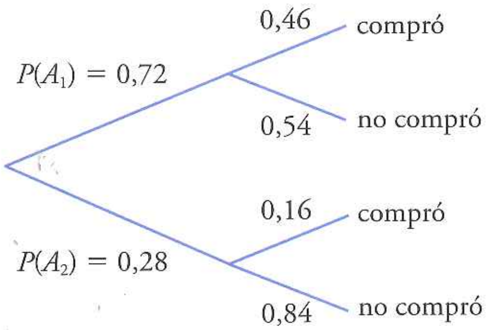
Primero, se identifican los eventos relacionados en esta situación y sus respectivas probabilidades.

Sean A_1: recibió el folleto $\qquad$ A_2: no recibió el folleto

$P(A_1) = 0{,}72$ $\qquad$ $P(A_2) = 0{,}28$

Sea B el evento que consiste en comprar el nuevo tinte para usarlo en la peluquería.

Segundo, se realiza un diagrama como el siguiente ya que resulta útil para identificar las probabilidades dadas en el problema:



La segunda rama del diagrama determina la probabilidad de B dado A_1 y la probabilidad de B dado A_2. Con lo cual se tendría que las probabilidades de la segunda rama están determinando a:

$$P(B\,/\,A_1) = 0{,}46 \qquad P(B^c\,/\,A_1) = 0{,}54$$

$$P(B\,/\,A_2) = 0{,}16 \qquad P(B^c\,/\,A_2) = 0{,}84$$

Luego, el problema pregunta por $P(A_1\,/\,B)$, entonces, aplicando el teorema de Bayes se tiene que:

$$P(A_1\,/\,B) = \frac{P(A_1)\,P(B\,/\,A_1)}{P(A_1)\,P(B\,/\,A_1) + P(A_2)\,P(B\,/\,A_2)}$$

$$P(A_1\,/\,B) = \frac{0{,}72 \times 0{,}46}{0{,}72 \times 0{,}46 + 0{,}28 \times 0{,}16} = 0{,}8809$$

Finalmente, se tiene que la probabilidad buscada es del 88,09%.

Hay una probabilidad de 0,8809 o del 88,09% de que un peluquero que haya comprado el tinte haya recibido el folleto promocional.

Es importante anotar que como los eventos son mutuamente excluyentes es posible completar los valores de las probabilidades en el diagrama de árbol planteado en la parte superior. En dicho diagrama se puede obtener, en la primera rama, la probabilidad de los eventos simples; en la segunda rama, las probabilidades condicionales y al multiplicar los dos resultados anteriores, la probabilidad de la intersección de los eventos.

La fórmula general para el teorema de Bayes

Ampliación multimedia

La fórmula general para aplicar el teorema de Bayes a dos o más eventos es la siguiente:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{P(A_1)P(B / A_1) + P(A_2)P(B / A_2) + \ldots + P(A_n)P(B / A_n)}$$

EJEMPLOS

En una empresa impresora de libros las máquinas *A*, *B* y *C* ejecutan el 50%, 30% y 20%, de la producción de un turno de trabajo respectivamente. La probabilidad de que un libro que se fabricó en la máquina *A* sea defectuoso es del 0,4%; la probabilidad de que un libro que provenga de la máquina *B* sea defectuoso es del 0,6% y la probabilidad de que un libro que provenga de la máquina *C* resulte defectuoso es del 1,2%.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un libro producido en esta empresa sea defectuoso?

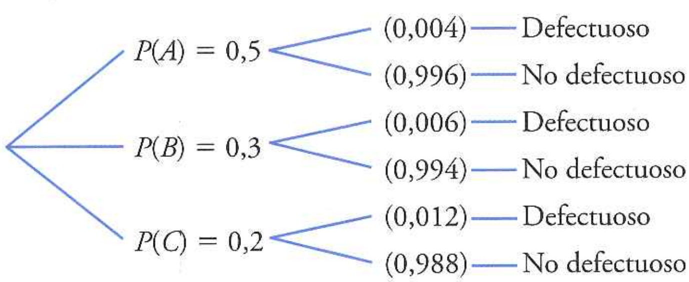
Primero, se identifican los eventos involucrados.

Sean *D*: el libro es defectuoso; *A*: el libro es fabricado por la máquina *A*; *B*: el libro es fabricado por la máquina *B*; *C*: el libro es fabricado por la máquina *C*.

Segundo, se definen los valores de las probabilidades de cada uno de los eventos así:

$$P(A) = 0{,}5 \qquad P(B) = 0{,}3 \qquad P(C) = 0{,}2$$

Luego, lo que se busca es la probabilidad de *D* (probabilidad total). En este caso, se elabora el diagrama de árbol que plantea una visión de cómo solucionar la pregunta planteada:



Para hallar la probabilidad de *D* se suman las probabilidades de las ramas del diagrama que involucran al evento *D*. Así:

$$P(D) = P(A) \cdot P(D / A) + P(B) \cdot P(D / B) + P(C) \cdot P(D / C)$$

$$= 0{,}5 \times 0{,}004 + 0{,}3 \times 0{,}006 + 0{,}2 \times 0{,}012 = 0{,}0062 = 0{,}62\%$$

Así, la probabilidad de que un libro sea defectuoso es del 0,62%.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que un libro defectuoso provenga de la máquina *A*?

Para determinar la probabilidad de que el libro defectuoso provenga de la máquina *A* se debe utilizar el teorema de Bayes pues se busca $P(A / D)$, luego:

$$P(A / D) = \frac{P(A)P(D / A)}{P(A)P(D / A) + P(B)P(D / B) + P(C)P(D / C)} = \frac{0{,}0020}{0{,}0062} = 0{,}32$$

Con lo cual se puede concluir que la probabilidad de que un libro defectuoso haya sido fabricado en la máquina *A* es del 32%.

Recuerda que...

Cuando se busca el valor de la probabilidad de un evento simple que está ligado a la ocurrencia de eventos relacionados desde la probabilidad condicional, se dice que se está hallando la probabilidad total.

Matemáticamente

- ¿Cuál es la probabilidad de que un libro defectuoso provenga de la máquina *B*?
- ¿Cuál es la probabilidad de que un libro defectuoso provenga de la máquina *C*?

Interpreto • Argumento • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

1. Explica el teorema de Bayes mediante un ejemplo.

Una empresa de consultoría se ha presentado a un concurso para un proyecto de investigación. Inicialmente la dirección de la empresa pensó que tenía un 50% de probabilidad de obtener el contrato. Sin embargo, el departamento al que fue presentada la propuesta solicitó más información al respecto. Por experiencia, se sabe que el departamento solicitó información adicional en 75% de las propuestas aceptadas y en 40% de las propuestas rechazadas.

2. ¿Cuál es la probabilidad *a priori* de tener éxito?

3. ¿Cuál es la probabilidad condicional de tener una solicitud de informes adicionales dado que al final la oferta será seleccionada?

4. ¿Cuál es la probabilidad *a posteriori* de que la oferta tenga éxito, dado que ha recibido información adicional?

5. En cierta comunidad, el 8% de todos los adultos mayores de 50 años padecen anemia. Si un médico de esta comunidad diagnostica correctamente que el 95% de todas las personas que padecen anemia tienen la enfermedad y diagnostica incorrectamente que el 2% de todas las personas que no padecen la enfermedad la tienen, ¿cuál es la probabilidad de que una persona mayor de 50 años, diagnosticada por este médico como enfermo de anemia, en realidad padezca la enfermedad?

Un analista financiero descubrió que el 40% de las acciones experimentaron un comportamiento superior al promedio, el 18% inferior y el 42% se mantuvieron alrededor del promedio. El 40% del primer grupo fue considerado como buena adquisición; lo mismo que el 30% del segundo grupo y un 10% del último.

6. ¿Cuál es la probabilidad de que un valor considerado como buena adquisición se comporte en forma superior al promedio?

El resultado de un proceso de fabricación es un producto. En promedio, el 20% de todos los productos fabricados es defectuoso. Cada producto es inspeccionado antes de ser empacado y el inspector clasifica mal un producto el 10% de las veces.

7. ¿Qué proporción de los productos serán clasificados como aceptables?

Una empresa planea probar un nuevo producto que lanzará al mercado en la próxima temporada de vacaciones. Las zonas en las cuales se hará el mercadeo pueden clasificarse por ubicación y por su densidad de población. A continuación se registran los datos obtenidos:

	Densidad de población		
Ubicación	Urbana	Rural	Total
Norte	25	50	75
Sur	20	30	50
Total	45	80	125

8. ¿Cuál es la probabilidad de que el mercadeo de prueba sea elegido en el norte?

9. ¿Cuál es la probabilidad de que el mercadeo de prueba sea elegido en el sur?

10. ¿Cuál es la probabilidad de que el mercadeo de prueba esté en una zona urbana?

11. ¿Cuál es la probabilidad de que el mercadeo de prueba esté en una zona rural?

12. ¿Cuál es la probabilidad de que el mercadeo esté en una zona rural del norte?

13. ¿Cuál es la probabilidad de que si está en el norte sea una zona urbana?

Un análisis de tráfico efectuado sobre una famosa glorieta de una ciudad capital mostró que el 0,8 de los automóviles que usan dicha glorieta, ingresaron a ella por la avenida principal. De quienes entraron a la glorieta por la avenida principal 0,7 continuaron por dicha avenida siguiendo el extremo opuesto de la glorieta.

14. ¿Cuál es la probabilidad de que un vehículo elegido aleatoriamente y observado en el circuito haya entrado por la avenida principal y continuado su recorrido por ella?

La probabilidad de que en un aeropuerto haya mal tiempo es de 0,7. Cuando alrededor del aeropuerto hay mal tiempo, la probabilidad de que un avión aterrice según su itinerario es de 0,8.

15. ¿Es probable de que haya mal tiempo y el avión aterrice según su itinerario? Explica tu respuesta.

R **Según las estadísticas de accidentes automovilísticos, uno de cada seis accidentes resulta en una demanda a la compañía aseguradora por $1.000.000 o menos a causa de daños y perjuicios. Cierto día, tres automóviles asegurados por una compañía se ven implicados en distintos accidentes. Dados los eventos:**

A: La mayor parte de las demandas es superior a $1.000.000
B: Dos demandas son por un millón de pesos o menos.

16. Escribe los elementos del espacio muestral de esta situación.

17. ¿Los eventos del espacio muestral son igualmente probables? Explica tu respuesta.

18. ¿Los eventos A y B son independientes? Justifica tu respuesta.

S **La probabilidad de que Camila olvide poner la alarma de su despertador es de 0,3. Si activa la alarma hay una probabilidad de 0,8 de que suene. Si suena la alarma, Camila despertará a tiempo para asistir a su clase de yoga con una probabilidad de 0,9. Si no suena, se despierta a tiempo para ir a su clase con una probabilidad de 0,2.**

19. ¿Cuál es la probabilidad de que Camila se despierte a tiempo para ir a su clase de yoga?

S **Resuelve.**

Con base en la experiencia se sabe que en cierta empresa el 60% de todas las discusiones entre los empleados y la gerencia se refieren a los salarios; el 15% es sobre las condiciones laborales y el 25%, sobre las prestaciones. Asimismo, el 45% de las discusiones referentes a los salarios se solucionan por vías legales; el 70% de las discusiones sobre las condiciones laborales se resuelven sin necesidad de acudir a vías legales y el 40% de las discusiones sobre prestaciones se resuelven sin usar vías legales.

20. ¿Cuál es la probabilidad de que una discusión entre los empleados y la gerencia se resuelva sin acudir a vías legales?

S **Resuelve.**

La explosión de un tanque de gas natural licuado en reparación podría haber sucedido como consecuencia de la electricidad estática, un mal funcionamiento del equipo eléctrico, una flama en contacto con el revestimiento o un acto intencional. Las entrevistas con los ingenieros que analizaban los riesgos llegaron a las estimaciones de que había una probabilidad de 0,25 de que la explosión hubiera sido consecuencia de la electricidad estática; de 0,20 de que hubiera sido resultado de un mal funcionamiento del equipo eléctrico; de 0,40 de que hubiera sido resultado de una flama y 0,15 de que hubiera sido resultado de un acto intencional. Estas entrevistas también presentaron estimaciones subjetivas de las probabilidades de las cuatro causas de 0,3; 0,4; 0,15 y 0,15, respectivamente.

21. Con base en la información anterior, ¿cuál es la causa más probable de la explosión?

S **La probabilidad de que un accidente laboral sea consecuencia de una falla de la máquina es de 0,04; la probabilidad de que se atribuya correctamente a una falla de la máquina es de 0,82 y la probabilidad de que se atribuya incorrectamente a una falla de la máquina es de 0,03.**

22. ¿Cuál es la probabilidad de que un accidente laboral se atribuya a una falla de la máquina?

23. ¿Cuál es la probabilidad de que un accidente laboral se atribuya a una falla de la máquina y en realidad se deba a dicha falla?

S **Se sabe por experiencia que la probabilidad de que un deportista que ha entrenado constantemente gane un reconocimiento en los juegos departamentales es de 0,86 y la probabilidad de que un deportista que no es muy constante en sus entrenamientos gane reconocimiento es de 0,35. Si el 80% de todos los deportistas entrena constantemente:**

24. ¿Cuál es la probabilidad de que no gane reconocimiento en los juegos departamentales?

25. ¿Cuál es la probabilidad de que un deportista que no ha entrenado constantemente no gane un reconocimiento en los juegos?

2. Variables aleatorias

Enlace web

Siempre que se habla de probabilidad se debe tener en cuenta que se está trabajando dentro de un espacio muestral que ha sido definido a partir de un experimento aleatorio, precisamente en esto se basa el azar. Una variable aleatoria es un concepto ligado a estas definiciones pues es un medio de describir o asignar a los resultados experimentales valores numéricos.

Recuerda que...

Los valores para las variables aleatorias discretas forman un subconjunto de los números enteros.

Las variables aleatorias continuas se miden en escalas continuas, por ejemplo, el tiempo, el peso o la distancia.

Sea S el espacio muestral de un experimento aleatorio; a la función f que asocia a cada evento simple del espacio muestral un número real se le denomina **variable aleatoria**.

Las variables aleatorias se simbolizan generalmente con letras mayúsculas: X, Y o Z.

En un espacio muestral es posible definir variables aleatorias diferentes pues, basta con asignar una regla que asocie los eventos con números específicos.

En forma similar como se clasificaron variables cuantitativas, las variables aleatorias pueden ser de dos clases: discretas y continuas.

- Una **variable aleatoria discreta** es aquella que puede asumir una cantidad finita de valores, o una cantidad infinita enumerable de valores como 0, 1, 2, ...
- Una **variable aleatoria continua** es la que puede tomar cualquier valor numérico en un intervalo o conjunto de intervalos.

EJEMPLO

Leer el siguiente experimento aleatorio y la variable aleatoria definida en él. Luego, clasificar dicha variable.

Experimento: lanzar tres monedas al aire.

Variable aleatoria: sea X la variable aleatoria que cuenta el número de sellos.

El espacio muestral de este experimento es:

$$S = \{(c, c, c), (c, c, s), (c, s, c), (c, s, s), (s, s, s), (s, s, c), (s, c, s), (s, c, c)\}$$

La variable aleatoria X que cuenta el número de sellos puede tomar los valores de: 0 (cero sellos), 1 (un sello), 2 (dos sellos) y 3 (tres sellos); así para definir la variable aleatoria se construye la siguiente tabla:

Evento simple	Variable aleatoria X
(s, s, s)	3
(c, s, s), (s, s, c), (s, c, s)	2
(c, c, s), (c, s, c), (s, c, c)	1
(c, c, c)	0

En este caso, la variable aleatoria es discreta ya que los valores que toma son una cantidad finita de valores enteros.

Una forma de determinar si una variable aleatoria es discreta o continua es imaginarse que los valores de esa variable son puntos en una recta numérica. Se eligen dos puntos que representan valores de la variable aleatoria, si todo el segmento de la recta entre los dos puntos también representa valores posibles de la variable, entonces, dicha variable es continua.

Los siguientes son ejemplos de diferentes variables aleatorias:

Experimento	Variable X	Posibles valores x_i	Tipo
Responder 10 preguntas de un examen	Número de respuestas correctas	0, 1, 2, ..., 10	Discreta
Llenar una botella de agua de 375 cc	Cantidad de cc completados	$0 \leq X \leq 375$	Continua
Revisar 50 bombillos	Cantidad de bombillos dañados	0, 1, 2, 3, ..., 50	Discreta
Construir un edificio	% terminado al cabo de seis meses	$0 \leq X \leq 100$	Continua
Armar un cubo de Rubik	Tiempo en armar la primera cara	$X > 0$ min	Continua

3. Funciones de distribución de probabilidad para variables aleatorias discretas

Actividad

La distribución de probabilidad de una variable aleatoria describe cómo se distribuyen las probabilidades de los diferentes valores que puede tomar dicha variable aleatoria.

Hay diferentes distribuciones de probabilidad teniendo en cuenta si la variable aleatoria es discreta o continua. En este tema se trabajarán las distribuciones de probabilidad para las variables aleatorias discretas.

Para una variable aleatoria discreta X, la distribución de probabilidad se describe mediante una función de probabilidad representada por $f(x)$. Esta función define la probabilidad de ocurrencia de cada valor que toma la variable.

EJEMPLOS

1. Se sabe por experiencia que la probabilidad de que una persona que llega a un almacén de calzado compre un par de zapatos es de 0,25. En una determinada hora llegan tres personas al almacén.

Si se supone que cada persona, de manera independiente, decide comprar los zapatos, definir la función de distribución de probabilidad de la variable aleatoria Z: número de personas que compran el par de zapatos.

Para este caso, se define el evento A que consiste en que la persona que entra al almacén compra el par de zapatos. De esta manera, el evento A^C es que la persona no compre el par de zapatos.

Por tanto, el espacio muestral del experimento aleatorio es:

$$S = \{(A, A, A), (A, A, A^C), (A, A^C, A^C), (A, A^C, A), (A^C, A, A), (A^C, A^C, A), (A^C, A, A^C), (A^C, A^C, A^C)\}$$

La variable Z se relaciona con los compradores, así:

Evento simple	Variable Z
(A, A, A)	3
$(A, A, A^C), (A, A^C, A), (A^C, A, A)$	2
$(A, A^C, A^C), (A^C, A^C, A), (A^C, A, A^C)$	1
(A^C, A^C, A^C)	0

Ahora, es necesario calcular la probabilidad de ocurrencia para cada uno de los cuatro valores que toma la variable Z.

Se tiene que $P(A) = 0{,}25$ y $P(A^C) = 0{,}75$.

Ahora, que un cliente compre es independiente de que el otro compre; por tanto, son eventos independientes. Esto significa que:

- Para $Z = 3$, se tiene que: $P(Z = 3) = P(A \cap A \cap A) = P(A) \times P(A) \times P(A)$.
$$P(Z = 3) = 0{,}015625$$
- Para $Z = 2$, se tiene que dos clientes compraron y uno no; es decir, se tienen en cuenta todas las opciones del espacio muestral en las que aparecen A, A y A^C, en este caso son tres. Por tanto:
$$P(Z = 2) = 3(0{,}25 \times 0{,}25 \times 0{,}75) = 0{,}140625$$
- Para $Z = 1$, se tiene que solo un cliente compró. Esto sucede tres veces en el espacio muestral, así que:
$$P(Z = 1) = 3(0{,}25 \times 0{,}75 \times 0{,}75) = 0{,}421875$$
- Para $Z = 0$, se tiene que ninguna persona compró. Esto sucede una vez en el espacio muestral, por tanto:
$$P(Z = 0) = (0{,}75 \times 0{,}75 \times 0{,}75) = 0{,}421875$$

En este caso, la función de distribución de probabilidad está definida por:

$$f(z) = \begin{cases} 0{,}421875 & \text{si } z = 0 \\ 0{,}421875 & \text{si } z = 1 \\ 0{,}140625 & \text{si } z = 2 \\ 0{,}015625 & \text{si } z = 3 \end{cases}$$

Es importante anotar que esta función se puede representar gráficamente usando un diagrama cartesiano en el cual se ubiquen los puntos correspondientes a la variable y su valor. Al lado se presenta dicha gráfica (figura 1) y también el histograma correspondiente (figura 2).

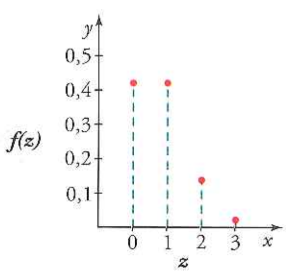


Figura 1.

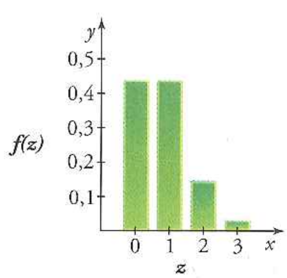


Figura 2.

Esta función se puede interpretar como sigue:

- Que ninguno de los tres clientes compre el par de zapatos pasa el 42,18% de las veces.
- Que ningún cliente compre el par de zapatos o que solo un cliente compre son eventos equiprobables.
- Que dos clientes compren el par de zapatos pasa el 14,06% de las veces.
- Es poco probable que los tres clientes compren el par de zapatos; esto solo pasa en un 1,56% de las veces.
- Que a lo sumo dos clientes compren el par de zapatos
$$(P(Z \leqslant 2) = P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2))$$
pasa el 98,43% de las veces.

2. La información sobre las ventas del año anterior de una *boutique* de ropa femenina reporta la siguiente información de los 320 días de funcionamiento:

Durante 23 días no se vendió ninguna prenda; durante 28 días se vendió una prenda; durante 59 días se vendieron dos prendas; durante 34 días se vendieron tres prendas; durante 45 días se vendieron cuatro prendas; durante 32 días se vendieron cinco prendas; durante 60 días se vendieron seis prendas; durante 29 días se vendieron siete prendas y durante 10 días se vendieron ocho prendas.

Definir la función de probabilidad para este caso.

Para definir la función de distribución de probabilidad se realiza la siguiente tabla:

Días del año	23	28	59	34	45	32	60	29	10
Prendas vendidas	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Se puede definir la variable aleatoria X, que consiste en el número de prendas vendidas en un día de funcionamiento. La respectiva función de distribución de probabilidad definirá la probabilidad de que en determinado día se venda un número entre 0 y 8 prendas.

Se analiza que la probabilidad de que un día cualquiera del año no se venda ninguna prenda es de $\frac{23}{320} = 0{,}071875$. Esto es $f(0) = P(X = 0)$.

Así que la función de distribución de probabilidad es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}071875 & \text{si } x = 0 \\ 0{,}0875 & \text{si } x = 1 \\ 0{,}184375 & \text{si } x = 2 \\ 0{,}10625 & \text{si } x = 3 \\ 0{,}140625 & \text{si } x = 4 \\ 0{,}1 & \text{si } x = 5 \\ 0{,}1875 & \text{si } x = 6 \\ 0{,}090625 & \text{si } x = 7 \\ 0{,}03125 & \text{si } x = 8 \end{cases}$$

Al interpretar esta función se puede concluir, entre otras cosas, que:

- Un día cualquiera del año hay la probabilidad del 18,43% de vender dos prendas.
- Vender cuatro prendas o menos tiene una probabilidad del 59,06% $(f(4) + f(3) + f(2) + f(1) + f(0))$.
- Vender seis prendas o más tiene una probabilidad del 30,93%.

Una ventaja importante de definir una variable aleatoria y su respectiva función de distribución de probabilidad, es que, una vez conocida esta distribución, es relativamente fácil determinar la probabilidad de varios eventos que puedan interesar a quien debe tomar decisiones.

Por ejemplo, si la gerente de ventas quiere determinar cuál es la cantidad de prendas que tiene mayor probabilidad de venderse podría afirmar que son seis, aunque la probabilidad no es muy alta y es casi equiprobable con que se vendan dos.

Recuerda que...

Si $f(x)$ es una función de distribución de probabilidad debe cumplir que:

- $0 \leq f(x) \leq 1$
- $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$ para todos los valores de i de 1 a n.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

Dado el experimento aleatorio de lanzar una moneda dos veces, realiza lo que se indica a continuación.

26. Escribe el espacio muestral.

27. Define la variable aleatoria que representa la cantidad de sellos que pueden presentarse en los lanzamientos.

28. Indica qué valores tomaría dicha variable aleatoria.

29. Clasifica la variable en discreta o continua.

Un experimento aleatorio se basa en el tiempo de empaque de un producto alimenticio.

30. Define la variable aleatoria que represente el tiempo, en minutos, que se tarda en hacer el empaque.

31. ¿Qué valores puede tomar esa variable?

32. ¿Es una variable aleatoria discreta o continua? Justifica tu respuesta.

R **Una trabajadora social está llevando a cabo un estudio sobre la infraestructura familiar; obtiene información del censo de población, sobre el número de hijos por familia en cierta comunidad.**

33. Identifica la variable aleatoria en este caso y clasifícala.

34. ¿Qué valores puede tomar esta variable?

R **Un arquero dispara flechas a un blanco y se mide la distancia que hay entre la diana y la flecha disparada.**

35. Determina cuál es la variable aleatoria que se va a estudiar y si es continua o discreta.

36. Enumera los valores que puede tomar esta variable.

R **Para efectuar cierto tipo de análisis de sangre, los técnicos de laboratorio deben seguir dos procedimientos: el primero requiere 1 o 2 pasos separados y el segundo puede requerir 1, 2 o 3 pasos separados.**

37. Escribe el espacio muestral de este experimento aleatorio.

38. Si la variable aleatoria consiste en determinar el número total de pasos requeridos para terminar el análisis, señala ¿qué valor asumirá la variable aleatoria en cada uno de los resultados experimentales?

R **Un experimento implica la prueba de un interruptor de encendido/apagado. El interruptor se enciende y se apaga hasta que se descompone, y se anota el número del intento en el que se descompuso.**

39. Determina cuál es la variable aleatoria estudiada.

40. ¿Qué valores puede tomar dicha variable?

A continuación, te proponemos una lista de experimentos y variables aleatorias definidas a partir de ellos. Determina qué tipo de variable es y cuáles son los posibles valores que puede tomar.

41. Presentar un examen de 100 preguntas.

    Variable: número de preguntas incorrectas.

42. Observar los automóviles que pasan por un peaje en las afueras de la ciudad.

    Variable: cantidad de automóviles que atraviesan el peaje.

43. Determinar el funcionamiento de 100 bombillas.

    Variable: número de bombillas defectuosas.

44. Recorrido de los deportistas que corren la media maratón.

    Variable: tiempo empleado en el recorrido.

E **Se registraron los datos sobre el conteo de uso de cuatro parqueaderos de visitantes en un conjunto residencial durante 20 días del mes de enero. Y se determina que:**

En tres días solo se usó un parqueadero; en 5 se usaron dos; en 8 se usaron tres y en 4 se usaron los cuatro.

45. Construye la función de distribución de probabilidad correspondiente a la cantidad de parqueaderos usados un día determinado.

46. Elabora la gráfica que representa dicha función.

47. Verifica que la función que propusiste verifica las características de una función de distribución de probabilidad.

Un psicólogo ha determinado que la cantidad de horas necesarias para ganarse la confianza de un paciente es de 1, 2 o 3. Si se define la variable aleatoria X que consiste en el tiempo necesario, en horas, que se requiere para ganarse la confianza de un paciente.

48. La función $f(x) = \frac{x}{6}$ para $x = 1, 2$ o 3, ¿puede ser una función de distribución de probabilidad? Justifica tu respuesta.

49. ¿Cuál es la probabilidad de que necesite exactamente dos horas para ganarse la confianza de un paciente?

50. ¿Cuál es la probabilidad de que necesite cuando menos dos horas para ganarse la confianza de un paciente?

Observa la siguiente tabla que registra el porcentaje de satisfacción de dos tipos de estudiantes en relación con el *currículum* de una institución educativa. Las calificaciones van de 1, muy insatisfecho, hasta 5, muy satisfecho.

Calificación de satisfacción	Estudiantes con bajo desempeño	Estudiantes con alto desempeño
1	4	5
2	10	9
3	12	3
4	46	42
5	28	41

51. Define la distribución de probabilidad para la calificación de satisfacción entre los estudiantes con alto desempeño.

52. Define la distribución de probabilidad para la calificación de satisfacción entre los estudiantes con bajo desempeño.

53. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante con desempeño alto se sienta satisfecho con el *currículum* y que asigne una calificación de 4 o 5?

54. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de bajo desempeño esté muy satisfecho con el currículo?

55. Elabora un párrafo en donde compares el nivel de satisfacción de los estudiantes con bajo y alto desempeño académico.

R **Los datos de los censos se utilizan a menudo para obtener distribuciones de probabilidad de algunas variables aleatorias. Por ejemplo, las familias con un ingreso promedio de $6.000.000 muestran que el 20% no tienen hijos; el 30% tienen un hijo; el 40% tienen dos hijos y el 10% tienen tres hijos.**

56. Con base en esta información, elabora la respectiva función de distribución de probabilidad que representa el número de hijos por familia en este grupo de ingresos.

Una terapia de adelgazamiento sin cirugía se aplica en una clínica estética. Esta terapia puede durar 1, 2, 3 o 4 horas dependiendo las características de peso del paciente.

57. Define una función de distribución de probabilidad adecuada para la duración de la terapia.

58. Elabora la gráfica de esta distribución.

59. Demuestra que la distribución cumple con las características de una distribución de probabilidad.

60. ¿Cuál es la probabilidad de que una terapia dure 3 horas?

61. ¿Cuál es la probabilidad de que una terapia dure 4 horas?

62. Acaba de ingresar un paciente a la clínica, pero como aún no se ha valorado no se sabe qué características de peso presenta. Son las cuatro de la tarde y, por lo general, la clínica presta sus servicios solo hasta las seis. ¿Cuál es la probabilidad de que la terapista deba trabajar horas extra para poder atender el nuevo paciente?

S **El gerente de funcionamiento de una empresa que presta servicios de ambulancia afirma que rara vez en la calle, la gente sabe con qué frecuencia se requiere la ayuda de estos vehículos. Al mostrar datos específicos del funcionamiento de su empresa muestra la siguiente información de los seis meses anteriores:**

Una ambulancia presta tres servicios diarios durante el 25% de los días; cuatro servicios durante el 21% de los días. Además registró que en tres semanas solo hubo un día en el que no prestó ningún servicio. Sin embargo, un día de las mismas tres semanas prestó siete servicios o más, el resto de las veces prestó dos servicios.

63. Construye la función de distribución de probabilidad para esta situación.

64. Elabora la gráfica de dicha distribución.

3.1 Valor esperado y varianza de una variable aleatoria discreta

Actividad

En años anteriores se han estudiado las medidas de localización y de variabilidad para las variables cuantitativas. De allí se debe recordar alguna simbología como:

$\bar{x}$: media de la muestra	μ: media de la población
s^2: varianza de la muestra	σ^2: varianza de la población
s: desviación estándar de la muestra	σ: desviación estándar de la población

Como las distribuciones de probabilidad representan teóricamente poblaciones, las medidas que analizaremos se tendrán en cuenta como μ y como σ. A los valores μ, σ^2 y σ se les denomina **parámetros poblacionales**.

- El **valor esperado**, o también conocido como media, de una variable aleatoria es una medida de localización (o tendencia) central de dicha variable. Se simboliza como $E(X)$ y se define como el promedio ponderado de los valores de la variable X. Así,

$$E(X) = \mu = \sum x_i f(x_i)$$
$$= \sum x_i P(X = x_i)$$

Para calcular el valor esperado de una variable aleatoria discreta se debe multiplicar cada x_i por $f(x_i)$, que es su probabilidad correspondiente y después sumar todos los productos obtenidos.

Si bien el valor esperado es una medida a partir de la cual se pueden establecer conclusiones relacionadas con una variable aleatoria, es necesario analizar otras medidas que permitan determinar qué tan adecuado es este valor.

Este trabajo se plantea en forma similar al que se ha hecho en otros cursos de esta serie para las variables cuantitativas, es por eso que para ello se usan la varianza y la desviación estándar.

- La **varianza** de una variable aleatoria discreta está determinada por la siguiente expresión:

$$\sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 f(x_i)$$

En esta ecuación, se calcula la desviación de cada x_i con relación al valor esperado (μ) de la variable aleatoria. Así, se elevan al cuadrado dichas desviaciones y se ponderan dependiendo del valor correspondiente de la función de probabilidad planteada. La suma de los valores antes calculados es la varianza de la variable aleatoria estudiada.

- La **desviación estándar** de una variable aleatoria discreta es la raíz cuadrada de la varianza.

$$\sigma = \sqrt{\sum (x_i - \mu)^2 f(x_i)}$$

Las medidas explicadas anteriormente, valor esperado, varianza y desviación estándar, determinan una herramienta importante que ayuda en el análisis y planteamiento de conclusiones a partir del planteamiento de una variable aleatoria y su respectiva función de distribución de probabilidad.

A continuación, se mostrará un ejemplo en el que el análisis de estos parámetros poblacionales brindan conclusiones interesantes en el campo de la industria.

EJEMPLO

El director de ventas de un prestigioso concesionario de vehículos de alta gama lleva el registro de sus récords de venta durante los días de funcionamiento del año anterior. A continuación, se muestran dichos resultados:

Número de días del año	54	117	72	42	12	3	Total 300 días
Número de vehículos vendidos	0	1	2	3	4	5	

Determinar el valor esperado, la varianza y la desviación estándar para esta situación. Luego, escribir algunas conclusiones sobre los resultados.

Primero, es necesario calcular la función de distribución de probabilidad. Esta se muestra en la segunda columna de la siguiente tabla.

Luego, se calcula el valor $x_i f(x_i)$ y se suma la columna de valores correspondientes para hallar el valor esperado. Así:

x_i	$f(x_i)$	$x_i f(x_i)$
0	$\frac{54}{300} = 0,18$	$0 \times 0,18 = 0$
1	$\frac{117}{300} = 0,39$	$1 \times 0,39 = 0,39$
2	$\frac{72}{300} = 0,24$	$2 \times 0,24 = 0,48$
3	$\frac{42}{300} = 0,14$	$3 \times 0,14 = 0,42$
4	$\frac{12}{300} = 0,04$	$4 \times 0,04 = 0,16$
5	$\frac{3}{300} = 0,01$	$5 \times 0,01 = 0,05$
Total	1,00	$\sum x_i f(x_i) = 1,5$

Con lo cual $\mu = 1,5$, así que el concesionario espera vender, un día cualquiera, aproximadamente un vehículo.

Finalmente, para calcular la varianza y la desviación estándar, se completa la tabla anterior así:

x_i	$x_i - \mu$	$(x_i - \mu)^2$	$f(x_i)$	$(x_i - \mu)^2 \cdot f(x_i)$
0	−1,5	2,25	0,18	0,405
1	−0,5	0,25	0,39	0,0975
2	0,5	0,25	0,24	0,06
3	1,5	2,25	0,14	0,315
4	2,5	6,25	0,04	0,25
5	3,5	12,25	0,01	0,1225
				$\sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 f(x_i) = 1,25$

Ya que la varianza está presentada en unidades al cuadrado, la desviación estándar se convierte en una medida más sencilla de analizar pues sus unidades están dadas como la variable inicial. Para este caso se tiene que $\sigma = 1{,}118$.

Para esta situación se observa que el valor esperado es un buen dato ya que la desviación estándar es relativamente pequeña. Con lo cual y analizando los datos obtenidos, el director de ventas puede esperar vender al menos un vehículo en cada día de funcionamiento para el próximo año.

Afianzo COMPETENCIAS

I Interpreto • E Ejercito • S Soluciono problemas

I Un estudio propuesto por una empresa que presta servicios de televisión digital determinó el número de puntos de televisión que se tiene en una vivienda familiar. La función de distribución de probabilidad de dicho estudio se plantea a continuación:

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0,01	0,23	0,41	0,2	0,1	0,05

65. Explica cómo hallar el valor esperado para esta situación. Luego, encuéntralo.

66. ¿Cómo se calcula el valor de la varianza?

67. Determina el valor de la desviación estándar.

E En los registros efectivos de tiros de cuatro equipos de baloncesto se observó que la probabilidad de hacer una canasta de dos puntos es de 0,5 y la probabilidad de hacer una canasta de tres puntos es de 0,39.

68. ¿Cuál es el valor esperado de un tiro para esos equipos?

69. ¿Cuál es el valor de la varianza?

70. Si la probabilidad de enceste de dos puntos es mayor que la probabilidad de enceste de tres puntos, ¿por qué los entrenadores permiten que algunos jugadores intenten el tiro de tres puntos si tienen la oportunidad?

S La demanda de un producto, por parte de una empresa, varía mucho de mes a mes. La distribución de probabilidad que se muestra a continuación está basada en datos de los dos últimos años e indica la demanda mensual del producto.

Demanda en unidades	300	400	500	600
Probabilidad	0,20	0,30	0,35	0,15

71. Si la empresa basa sus pedidos mensuales en el valor esperado de la demanda, ¿cuál debe ser la cantidad de pedido que haga la empresa?

S Un servicio de médicos domiciliarios maneja de 0 a 5 llamadas por día. La distribución de probabilidad del número de llamadas de servicio se muestra a continuación:

Número de llamadas	Probabilidad
0	0,10
1	0,15
2	0,30
3	0,20
4	0,15
5	0,10

72. ¿Cuál es la cantidad esperada de llamadas a los médicos?

73. Determina el valor de la varianza y la desviación estándar en esta situación.

S Una aseguradora de vehículos lleva el registro de los diferentes pagos que ha hecho a sus usuarios por daños materiales en accidentes de tránsito. La función de distribución de probabilidad de dicha aseguradora se plantea a continuación (los pagos se registran en dólares):

Pagos	Probabilidad
0	0,90
400	0,04
1.000	0,03
2.000	0,01
4.000	0,01
6.000	0,01

74. Utiliza el valor esperado para determinar el valor de la prima contra daños que le permitiría a la aseguradora salir sin pérdidas.

3.2 La distribución binomial

Enlace web

Hay situaciones en las que se necesita determinar la probabilidad de obtener "x éxitos en n intentos", por ejemplo, obtener 45 respuestas de 400 cuestionarios enviados como parte de un estudio de mercadeo; la probabilidad de que 5 de 12 ratones sobrevivan después de haberles inyectado una sustancia capaz de generar cáncer; la probabilidad de que 15 de 50 conductores que son detenidos en un retén tengan alta la prueba de alcoholemia que se les practica. Este estilo de experimentos se relaciona con una distribución de probabilidad particular que recibe el nombre de **distribución de probabilidad binomial**.

La distribución de probabilidad binomial se relaciona con los experimentos que se plantean en etapas múltiples. Dichos experimentos reciben el nombre de binomiales.

Un experimento binomial tiene cuatro propiedades:

1. Consiste en una sucesión de n intentos o ensayos idénticos.
2. En cada intento (o ensayo) son posibles dos resultados: a uno lo llamaremos éxito y al otro, fracaso.
3. La probabilidad de un éxito, representada por p, no cambia de un intento a otro. En consecuencia, la probabilidad de fracaso, representada por $1 - p$, no cambia de un intento a otro.
4. Los intentos o ensayos son independientes.

Recuerda que...

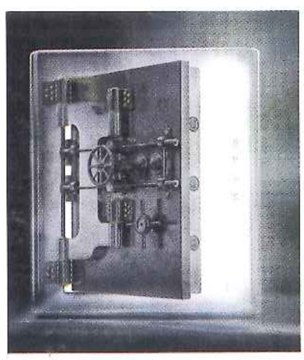
Si en un experimento se presentan las propiedades 2, 3 y 4, se dice que los intentos se generan mediante un proceso llamado proceso de Bernoulli.

Si además se da la propiedad 1, se dice que se tiene un experimento binomial.

EJEMPLOS

1. **Identificar las características de los siguientes experimentos y determinar en cada caso si son binomiales.**

a. **Una bóveda de seguridad de un banco tiene seis alarmas que funciona independientemente una de la otra. Se sabe que la probabilidad de que una alarma no detecte la presencia de una persona que ingresa a la bóveda es de 0,05. Considerar X la variable aleatoria que mide el número de alarmas que fallan cuando una persona entra a la bóveda.**



Para determinar si el experimento es binomial se deben cumplir las cuatro propiedades:

- Como la bóveda tiene 6 alarmas, se sabe que pueden sonar 6 veces. $n = 6$.
- Suponiendo que éxito será que la alarma no suene, así que $p = 0,05$, además, fracaso estaría representado por $1 - p$ y se tiene que: $1 - p = 0,95$.
- Se tiene que la probabilidad de éxito no cambia. En forma similar, la probabilidad de fracaso no cambia.
- Cada alarma funciona de manera independiente.

Se puede concluir que este experimento es binomial.

b. **Una moneda se lanza cinco veces al aire y en cada lanzamiento se observa si el lado visible es cara o sello.**

Suponer que para este caso interesa contar la cantidad de sellos que aparecen en los cinco lanzamientos.

Se deben examinar las cuatro propiedades:

- El experimento consiste en cinco intentos idénticos. Así que $n = 5$.
- Son posibles dos resultados: cara o sello. Se puede convenir que, para esta situación, el que caiga sello será éxito y que caiga cara será fracaso.
- La probabilidad de que caiga sello no cambia en los lanzamientos ($p = 0,5$).
- Cada lanzamiento es independiente pues el resultado de uno no influye en el resultado del otro.

En conclusión, este experimento es binomial.

Función de distribución binomial

Actividad

La **función de distribución binomial de probabilidad** se define así:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{(n-x)}$$

Donde:

- $f(x)$: probabilidad de x éxitos en n intentos.
- $\binom{n}{x} = \dfrac{n!}{(n-x)!x!}$
- p: probabilidad de éxito en cualquier intento.
- $1 - p$: probabilidad de fracaso en cualquier intento.

Recuerda que...

Si S significa que el cliente compra y N significa que el cliente no compra, si asisten tres clientes, los posibles resultados serán:

(S, S, S), (S, S, N), (S, N, S), (S, N, N), (N, S, S), (N, N, S), (N, S, N), (N, N, N)

De donde se entiende que, por ejemplo, la probabilidad de que los dos primeros clientes compren y el tercero no, está dada por:

$$p \cdot p \cdot (1 - p)$$

Es decir,

$$(0,3)(0,3)(0,7) = 0{,}063$$

EJEMPLOS

1. **El administrador de una tienda de ropa para caballero sabe por experiencia que la probabilidad de que un cliente que entra compre algo en el lugar es de 0,30. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de los siguientes tres clientes hagan una compra?**

Primero, se determina si el experimento es binomial:

- El experimento sucede de tres maneras idénticas, pues se va a analizar la decisión de tres clientes. $n = 3$.
- Hay dos resultados posibles para cada cliente: éxito (que compre) y fracaso (que no compre).
- La probabilidad de que un cliente compre ($p = 0{,}30$) se supone igual para cada uno de los clientes; de manera similar, la probabilidad de que un cliente no compre ($1 - p = 0{,}70$) se supone igual para cada uno de los clientes.
- La decisión de compra es independiente en cada cliente.

Entonces, el experimento es binomial.

Luego, se plantea la función de distribución binomial. Para ello, se tiene que es posible que ningún cliente compre, que un cliente compre, que dos clientes compren o que tres clientes compren. Es decir, es necesario plantear la función para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.

Finalmente, teniendo en cuenta la función $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{(n-x)}$ se determina la función de distribución binomial así:

x	$f(x)$
0	$\binom{3}{0}(0,3)^0(0,7)^{(3-0)} = \frac{3!}{3!0!}(1)(0,343) = 0,343$
1	$\binom{3}{1}(0,3)^1(0,7)^{(3-1)} = \frac{3!}{2!1!}(0,3)(0,49) = 0,441$
2	$\binom{3}{2}(0,3)^2(0,7)^{(3-2)} = \frac{3!}{1!2!}(0,09)(0,7) = 0,189$
3	$\binom{3}{3}(0,3)^3(0,7)^{(3-3)} = \frac{3!}{0!3!}(0,027)(1) = 0,027$

Luego, la probabilidad de que dos de los tres clientes hagan la compra será del 18,9%. En forma similar, se puede deducir que la probabilidad de que los tres clientes compren será del 2,7%; la probabilidad de que ninguno compre será de 34,3% y la probabilidad más alta, que es la de que un cliente compre, será de 44,1%.

2. **El 90% de las personas que se han postulado para un crédito educativo lo han obtenido. Si en la semana anterior se han presentado seis postulaciones para créditos educativos:**

a. **Hallar la probabilidad de que cuatro de los créditos sean otorgados.**

La función de distribución de probabilidad se define como $f(x) = \binom{6}{x}(0,9)^x(0,1)^{(6-x)}$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Luego, la probabilidad de que cuatro de los créditos sean otorgados está dada por:

$$f(4) = \binom{6}{4}(0,9)^4(0,1)^{(6-4)} = 0,0984$$

Es decir, 9,84% es la probabilidad de que sean otorgados cuatro créditos.

b. **Hallar la probabilidad de que se otorguen entre dos y cuatro créditos.**

La probabilidad que se otorguen entre dos y cuatro créditos está dada por la probabilidad que se otorguen dos, que se otorguen tres o que se otorguen cuatro.

Como los eventos son independientes, estas probabilidades se suman:

$$\binom{6}{4}(0,9)^4(0,1)^{(6-4)} + \binom{6}{3}(0,9)^3(0,1)^{(6-3)} + \binom{6}{2}(0,9)^2(0,1)^{(6-2)}$$

$$= 0,0984 + 0,01458 + 0,001215 = 0,114195$$

Es decir, la probabilidad de que se otorguen entre dos y cuatro créditos es del 11,42%.

c. **Hallar la probabilidad de que otorguen al menos dos créditos.**

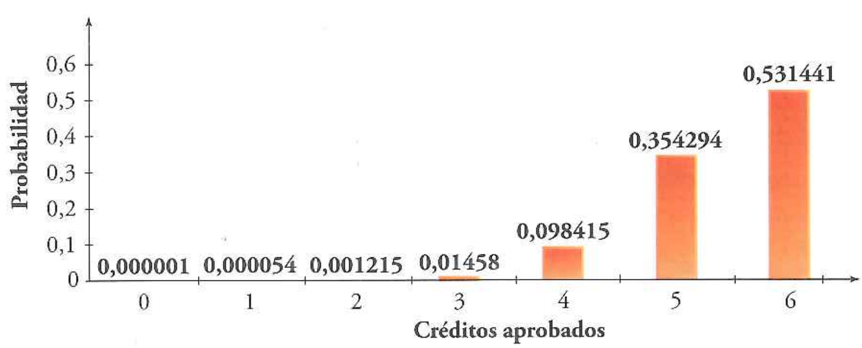
La probabilidad de que otorguen al menos dos créditos es igual a la probabilidad de que otorguen 2 o 3 o 4 o 5 o los 6 créditos. Lo cual es equivalente a calcular 1 menos la probabilidad de que otorguen un crédito o no otorgar ninguno. Así:

$$1 - \left[\binom{6}{1}(0,9)^1(0,1)^{(6-1)} + \binom{6}{0}(0,9)^0(0,1)^{(6-0)}\right] = 1 - (0,00005 + 0,000001)$$

$$= 0,999949$$

Con lo cual, la probabilidad de que otorguen al menos dos créditos es del 99,99%.

Es posible construir el histograma de probabilidades para esta situación:



Es posible hacer el cálculo de la probabilidad de x éxitos en n intentos sin usar la fórmula de la distribución binomial que se plantea en la página anterior; para ello, se usan tablas que han sido generadas en computador.

Si bien el uso de las tablas resulta relativamente sencillo, hay valores que no aparecen en ellas, pero que se pueden obtener haciendo uso de las calculadoras modernas o de *software* que viene incorporado en los computadores que permite hacer cálculos de binomiales de manera muy sencilla.

Matemática*mente*

- Demuestra que el experimento de los créditos educativos es binomial.
- Escribe la función de distribución de probabilidad para

$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

teniendo en cuenta que:

$f(x) = \binom{6}{x}(0,9)^x(0,1)^{(6-x)}$

Recurso imprimible

Recuerda que...

Si F es una función de distribución acumulada de probabilidades de una variable aleatoria X discreta, entonces:

$P(a \leq X \leq b)$

$= F(b) - F(a - 1)$

Uso de tablas de probabilidad binomiales

Recurso imprimible

Las **tablas para las distribuciones de probabilidad binomiales** trabajan tres valores: n, x, y p. Ellos se encuentran relacionados, de tal forma que resulta mucho más rápido consultar la tabla que aplicar las fórmulas dadas para la distribución binomial.

Para usar dichas tablas se debe identificar en el problema planteado los valores de n, x y p.

Por ejemplo, para la situación planteada con relación a la tienda de ropa para caballero se tiene que: $n = 3$ (número de clientes), $x = 2$ (número de clientes que compran) y $p = 0{,}3$ (probabilidad conocida) , así con estos datos el cálculo mediante el uso de la fórmula es bastante sencillo; pero si se quiere determinar la probabilidad de que entre los siguientes 10 clientes, 6 clientes compren, la aplicación de la fórmula se hace larga y con gran posibilidad de error, mientras que al consultar la tabla se tiene lo siguiente:

		p												
n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	1/6	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
10	0	0,9044	0,5987	0,3487	0,1969	0,1615	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,0914	0,3151	0,3874	0,3474	0,3230	0,2684	0,1877	0,1211	0,0867	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098
	2	0,0042	0,0746	0,1937	0,2759	0,2907	0,3020	0,2816	0,2335	0,1951	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439
	3	0,0001	0,0105	0,0574	0,1298	0,1550	0,2013	0,2503	0,2668	0,2601	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172
	4	0,0000	0,0010	0,0112	0,0401	0,0543	0,0881	0,1460	0,2001	0,2276	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051
	5	0,0000	0,0001	0,0015	0,0085	0,0130	0,0264	0,0584	0,1029	0,1366	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0022	0,0055	0,0162	**0,0368**	0,0569	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0008	0,0031	0,0090	0,0163	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0030	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010

El número señalado es la cifra en común para $n = 10$, $x = 6$ y $p = 0{,}3$.

En conclusión, la probabilidad que entre los 10 clientes, los siguientes 6 sean compradores es de 0,0368, es decir, el 3,68%.

Es importante aclarar que la mayoría de las tablas de distribución que circulan inician para $n = 5$, pues se asume que para valores menores el uso de la fórmula es sencillo, o el cálculo en el programa Excel resulta bastante práctico.

Función de distribución binomial acumulada

Dado un experimento binomial con variable aleatoria X, probabilidad de éxito p y de fracaso $1 - p$, para n repeticiones independientes, entonces:

$$F(x) = P(X \leq x) = \binom{n}{0} p^0 (1 - p)^{n-0} + \binom{n}{1} p^1 (1 - p)^{n-1} + \ldots + \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

es llamada **función de distribución binomial acumulada de probabilidades.**

Es importante escribir la simbología correspondiente a la probabilidad que se necesite de manera particular. Por ejemplo, en el caso de los clientes de la tienda de ropa para caballero, si se pregunta por cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, 6 clientes compren ropa se tendría que hallar la probabilidad para $X \leq 6$, entonces, la notación para la probabilidad en la función acumulada se escribe como $P(X \leq 6)$; si se pregunta por la probabilidad de que más de seis clientes compren ropa para caballero, dicha notación se escribe como $P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6)$.

Para resolver ejercicios que involucran la aplicación de la distribución binomial acumulada se usan las tablas correspondientes a este tipo de distribución y su uso se hace de manera similar al explicado para la binomial.

EJEMPLOS

Actividad

En un punto determinado de la ciudad, la probabilidad de que un automóvil se accidente es de 0,2 y en una hora determinada pasan 16 automóviles.

a. Calcular la probabilidad de que al menos 5 automóviles sufran un accidente.

Para responder esta pregunta se tiene que determinar $P(X \geqslant 5)$ pues, al menos 5 significa que pueden ser 5, 6, 7 o los 16, los automóviles accidentados.

Entonces, se tiene que $P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \leqslant 4)$.

Para este caso, $n = 16$, $x = 4$ y $p = 0,2$, así que se buscan en la tabla los valores, como se muestra a continuación:

		p																		
n	x	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
16	0	0,4401	0,1853	0,0743	0,0281	0,0100	0,0033	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,8108	0,5147	0,2839	0,1407	0,0635	0,0261	0,0098	0,0033	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9571	0,7892	0,5614	0,3518	0,1971	0,0994	0,0451	0,0183	0,0066	0,0021	0,0006	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9930	0,9316	0,7899	0,5981	0,4050	0,2459	0,1339	0,0651	0,0281	0,0106	0,0035	0,0009	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9991	0,9830	0,9209	**0,7982**	0,6302	0,4499	0,2892	0,1666	0,0853	0,0384	0,0149	0,0049	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9999	0,9967	0,9765	0,9183	0,8103	0,6598	0,4900	0,3288	0,1976	0,1051	0,0486	0,0191	0,0062	0,0016	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	0,9995	0,9944	0,9733	0,9204	0,8247	0,6881	0,5272	0,3660	0,2272	0,1241	0,0583	0,0229	0,0071	0,0016	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	7	1,0000	0,9999	0,9989	0,9930	0,9729	0,9256	0,8406	0,7161	0,5629	0,4018	0,2559	0,1423	0,0671	0,0257	0,0075	0,0015	0,0002	0,0000	0,0000
	8	1,0000	1,0000	0,9998	0,9985	0,9925	0,9743	0,9329	0,8577	0,7441	0,5982	0,4371	0,2839	0,1594	0,0744	0,0271	0,0070	0,0011	0,0001	0,0000
	9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9984	0,9929	0,9771	0,9417	0,8759	0,7728	0,6340	0,4728	0,3119	0,1753	0,0796	0,0267	0,0056	0,0005	0,0000
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9938	0,9809	0,9514	0,8949	0,8024	0,6712	0,5100	0,3402	0,1897	0,0817	0,0235	0,0033	0,0001
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9951	0,9851	0,9616	0,9147	0,8334	0,7108	0,5501	0,3698	0,2018	0,0791	0,0170	0,0009
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9991	0,9965	0,9894	0,9719	0,9349	0,8661	0,7541	0,5950	0,4019	0,2101	0,0684	0,0070
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9994	0,9979	0,9934	0,9817	0,9549	0,9006	0,8029	0,6482	0,4386	0,2108	0,0429
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9967	0,9902	0,9739	0,9365	0,8593	0,7161	0,4853	0,1892
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9967	0,9900	0,9719	0,9257	0,8147	0,5599

Así, la probabilidad está dada por:

$P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \leqslant 4) = 1 - 0,7982 \approx 0,202 = 20,2\%$.

b. Calcular la probabilidad de que se accidenten entre 6 y 12 automóviles.

La segunda pregunta pide encontrar $P(6 \leqslant X \leqslant 12)$.

Sabemos que $P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a - 1) = F(12) - F(5)$. Como $p = 0,2$ y $n = 16$ se tiene que los resultados de la tabla son:

$$F(12) - F(5) = 1 - 0,918 = 0,082.$$

En conclusión, la probabilidad de que se accidenten entre 6 y 12 automóviles es de 8,2%.

El valor $F(12) = 1$ se debe a que la tabla se construye con una aproximación hasta de cuatro cifras decimales, es decir, que la probabilidad de que, a lo más, 12 de los 16 automóviles se accidenten es bastante cercana a 1.

Valor esperado y varianza para la función de distribución de probabilidad binomial

En las páginas anteriores se presentaron las fórmulas para calcular el valor esperado, la varianza y la desviación estándar de una variable aleatoria discreta. En este caso, para la función de distribución binomial dichas fórmulas se plantean de la siguiente manera.

Dada una distribución binomial de probabilidad de una variable aleatoria con un número n conocido de intentos y una probabilidad p de éxito se determina que:

El valor esperado es $E(X) = \mu = np$.

La varianza es $\sigma^2 = np(1 - p)$.

Para el caso de la tienda de ropa para caballero que se ha venido trabajando en esta sección, se puede aplicar la ecuación para calcular el número esperado de clientes que hacen la compra, de la siguiente manera:

$E(X) = \mu = 3 \times (0{,}30) = 0{,}9$

$\sigma^2 = 3 \times (0{,}3)(1 - 0{,}3) = 0{,}63$

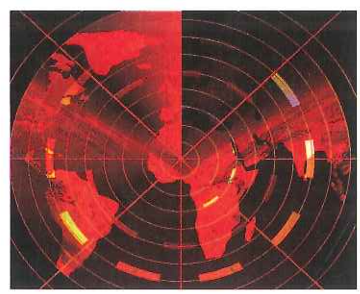
$\sigma = \sqrt{0{,}63} \backsimeq 0{,}79$

Si se supone que, en el mes que se celebrará el día del padre, la tienda pronostica que entrarán 1.000 clientes, entonces, la fórmula para determinar el número de clientes que se espera harán una compra, se plantea como $E(X) = \mu = 1.000 \times (0{,}30) = 300$.

Este resultado le servirá a la tienda, pues se deduce que para aumentar la posibilidad de que los clientes compren, los dueños de la tienda deben buscar estrategias para hacer que más clientes entren a dicho establecimiento.

EJEMPLOS

Un sistema de protección contra misiles está diseñado con n radares que funcionan independientemente uno de otro. Cuando un misil entra a la zona protegida, cada radar tiene una probabilidad de 0,9 de detectarlo.



a. Si hay 12 radares y un misil entra a zona protegida, ¿cuál es la probabilidad de que sea detectado al menos por 7 radares?

Como se tiene que el misil debe ser detectado por 7, 8, 9, … o 12 radares, entonces, esta información se interpreta como hallar la probabilidad de que la variable sea mayor o igual a 7. Así, se tiene que $n = 12$, $p = 0{,}9$ y $P(X \geqslant 7) = 1 - P(X \leqslant 6)$.

Al buscar en la tabla de distribución de probabilidad binomial se tiene que:

$P(X \geqslant 7) = 1 - P(X \leqslant 6) = 1 - 0{,}0005 = 0{,}9995$

En conclusión, si hay 12 radares, la probabilidad de que un misil sea detectado, por lo menos, por 7 de ellos es del 99,9%.

b. Si se tienen 10 radares, ¿cuál es el número de los mismos que se espera que detecten el misil?

En el caso de que haya 10 radares, el valor esperado se calcula de la siguiente manera:

$n = 10$, $p = 0{,}9$ y $np = 9$, entonces, se espera que 9 de los 10 radares detecten el misil.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Soluciono problemas

Dado un experimento binomial con dos intentos conocidos y $p = 0,4$.

75. Elabora el diagrama de árbol que representa este experimento.

76. Calcula la probabilidad de un éxito.

77. Determina $f(0)$.

78. Calcula $f(2)$.

79. Determina la probabilidad de al menos un éxito.

Dado un experimento binomial con $n = 20$ y $p = 0,7$.

80. Encuentra $f(12)$.

81. Calcula $f(16)$.

82. Determina $P(X \geq 16)$.

83. Halla $P(X \leq 15)$.

84. Encuentra los valores μ, σ^2 y σ.

Se dice que el 75% de los accidentes en una planta procesadora de piezas industriales se atribuyen a errores humanos. Si en un período de tiempo dado se presentan 5 accidentes:

85. Determina la probabilidad de que dos de los accidentes se atribuyan a errores humanos.

86. Encuentra la probabilidad de que como máximo un accidente se atribuya a un error de tipo humano.

87. Halla la probabilidad de que dos de los accidentes no se deban a errores humanos.

La probabilidad de que el vapor se condense en un tubo de aluminio de cubierta delgada a 10 atm de presión es de 0,4. Si se prueban 12 tubos de ese tipo y con esas mismas condiciones:

88. Determina la probabilidad de que el vapor se condense en cuatro de los tubos.

89. Encuentra la probabilidad de que el vapor se condense en más de dos tubos.

90. Halla la probabilidad de que el vapor se condense en exactamente cinco tubos.

La probabilidad de que el nivel de ruido de un amplificador de banda ancha exceda de 2 dB (decibeles) es de 0,15. Si se prueban 10 amplificadores de banda ancha:

91. Determina la probabilidad de que en solo cinco de los amplificadores el nivel de ruido exceda los 2 dB.

92. Calcula la probabilidad de que por lo menos en dos de los amplificadores el ruido exceda los 2 dB.

93. Encuentra el número esperado de amplificadores que se exceden de un nivel de ruido de 2 dB y su desviación estándar.

Cuando una máquina nueva funciona bien, solo el 3% de los artículos que produce tienen defectos. Se seleccionan al azar dos partes producidas por dicha máquina, e interesa conocer las cantidad de partes defectuosas encontradas.

94. Describe las condiciones en las cuales este ejemplo sería un experimento binomial.

95. Dibuja un diagrama de árbol de probabilidades que represente esta situación.

96. ¿Cuántos de los resultados experimentales consisten en encontrar exactamente un artículo defectuoso?

97. Calcula las probabilidades asociadas con no encontrar defectos, encontrar un defecto y encontrar dos defectos.

El 5% de los taxistas en Bogotá son mujeres. Supón que se seleccionan al azar 10 taxis para responder una encuesta acerca de las condiciones del trabajo.

98. ¿Es un experimento binomial la selección de los 10 taxis? Explica tu respuesta.

99. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de los taxistas sean mujeres?

100. Halla la probabilidad de que ninguno sea mujer.

S El 50% de industrias manufactureras colombianas de tamaño mediano planearon visitas de representantes de su administración a Estados Unidos para aprovechar las oportunidades que abrió el tratado de libre comercio.

Un grupo exportador de Estados Unidos invitó a 20 manufactureros colombianos a participar en una conferencia relacionada con las ventajas del tratado.

101. ¿Cuál es la probabilidad de que 12 o más de estas empresas manden representantes a la conferencia?

102. ¿Cuál es la probabilidad de que 5 de estas empresas, como máximo, manden representantes?

103. ¿Cuántas de estas empresas espera el sector que manden?

104. ¿Cuál es el valor de la varianza y de la desviación estándar en esta situación?

S Setenta por ciento de las personas que viajan por negocios llevan un teléfono celular o un computador portátil. En una muestra de 15 personas:

105. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 tengan teléfono celular o computador portátil?

106. ¿Cuál es la probabilidad de que 12 de los viajeros no tengan ninguno de los dos artefactos?

107. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 3 tengan alguno de dichos artefactos?

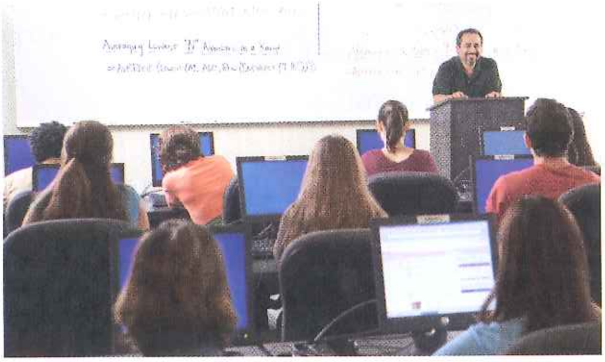
S En una cosecha de sandías, el 15% no son de tipo exportación. Un recolector selecciona 6 sandías para determinar si son o no de tipo exportación.

108. Construye el histograma de probabilidades de la variable aleatoria número de sandías tipo exportación en una muestra de seis.

109. ¿Cuál es la probabilidad de que todas las sandías sean tipo exportación?

110. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos una no sea de tipo exportación?

S La facultad de psicología de una universidad reportó que 20% de sus estudiantes cancelan el curso de estadística a mitad de semestre. Para el presente semestre se inscribieron 20 alumnos para cursar esta materia:



111. ¿Cuál es la probabilidad de que dos o menos la cancelen a mitad de semestre?

112. ¿Cuál es la probabilidad de que la cancelen exactamente cuatro estudiantes?

113. ¿Cuál es la probabilidad de que la cancelen más de siete estudiantes?

114. Para este semestre, ¿cuántos estudiantes se espera que cancelen estadística?

S Un estudio demuestra que 50% de las familias de un área metropolitana grande tienen por lo menos dos automóviles. Si se seleccionan 16 familias al azar en dicha área:

115. Halla la probabilidad de que exactamente 9 tengan dos automóviles.

116. Encuentra la probabilidad de que a los sumo 6 tengan por lo menos dos automóviles.

117. Determina la probabilidad de que entre 8 y 12 familias tengan por lo menos dos automóviles.

S El 40% de los ratones que se usan en una prueba de laboratorio se tornarán muy agresivos un minuto después de habérseles aplicado un medicamento experimental.

118. Encuentra la probabilidad de que en una muestra de 15 ratones, entre 8 y 12 se tornen muy agresivos después de aplicado el medicamento.

119. En un grupo de 40 ratones, ¿cuántos se espera que se tornen agresivos después de aplicado el medicamento?

4. Funciones de distribución de probabilidad para variables aleatorias continuas

Enlace web

En el tema anterior presentamos un análisis de algunas de las funciones de distribución de probabilidad para variables aleatorias discretas, en este tema, se tratan las distribuciones de probabilidad para las variables aleatorias que toman valores en un intervalo (variables aleatorias continuas). Una diferencia fundamental que hace que el estudio de distribuciones de probabilidad se divida para variables discretas y para variables continuas es que la forma como se calculan las probabilidades es muy diferente.

Así, para una variable aleatoria discreta la función de probabilidad $f(x)$, proporciona la probabilidad de que la variable tome un valor particular; en las variables aleatorias continuas, la función de probabilidad es llamada función de densidad de probabilidad (también se nota $f(x)$) y no determina directamente dicha probabilidad. Sin embargo, el área bajo la gráfica de $f(x)$, que corresponde al área en un intervalo, determina la probabilidad de que la variable aleatoria continua tome un valor en dicho intervalo.

Como para definir estas funciones se habla específicamente de área bajo una gráfica, se plantea como una de las implicaciones importantes en estas variables, que la probabilidad de cualquier valor particular será cero (pues bajo un punto no hay ninguna área).

Recuerda que...

El concepto de integral definida a partir del que se define la función de distribución de una variable aleatoria continua se trabajó en las unidades anteriores, sin embargo, para esta aplicación solo se usará como la noción de área bajo una curva en un intervalo cerrado de la función descrita.

4.1 Función de distribución de una variable aleatoria continua

Si la variable aleatoria X tiene función de distribución $f(x)$, la probabilidad de que X pertenezca al intervalo $[a, b]$ está dada por:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

La función así definida debe cumplir dos propiedades que garantizan que cumpla a su vez las características de la probabilidad:

1. $f(x) \geqslant 0$, lo cual garantiza que cualquier probabilidad que se calcule será un número positivo.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, lo que determina que las probabilidades medias no pueden ser mayores que 1. Esta propiedad es análoga a la interpretación en variables discretas que la suma de todas las probabilidades es 1.

Recuerda que...

Si f es continua y positiva

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_{-b}^{b} f(x)\,dx$$

si dicho límite existe.

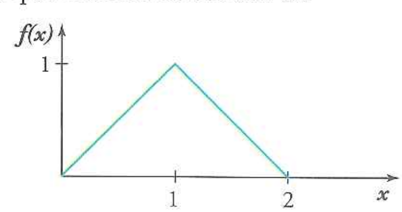
EJEMPLOS

Una estación de servicio tiene dos bombas que, cada una, pueden dispensar gasolina hasta 10.000 galones por mes. La cantidad de gasolina dispensada en un mes es una variable aleatoria, en miles de galones, y su función de distribución es:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

a. Elaborar una gráfica de la función de distribución para esta situación.

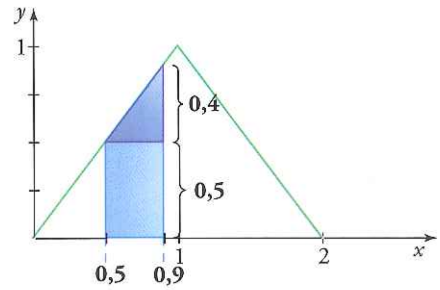
La gráfica que describe la función es:



Actividad

b. Calcular la probabilidad de que las bombas dispensen entre 0,5 y 0,9 miles de galones el siguiente mes.

Para calcular la probabilidad de que las bombas dispensen entre 0,5 y 0,9 miles de galones se debe calcular el área bajo la gráfica de la función en [0,5; 0,9]. La siguiente gráfica muestra dicha porción:



Así, el área que se debe calcular es la del rectángulo y el triángulo señalados, pues son las porciones de la función que están en [0,5; 0,9].

Para el caso del rectángulo se tiene que:

- La base es de longitud $0,9 - 0,5 = 0,4$.
- La altura es $f(0,5) = 0,5$.
- El área del rectángulo será $0,4 \times 0,5 = 0,2$.

Para el caso del triángulo se tiene que:

- La base es 0,4.
- La altura es $f(0,9) - f(0,5) = 0,9 - 0,5 = 0,4$.
- El área del triángulo será $\dfrac{0,4 \times 0,4}{2} = 0,08$.

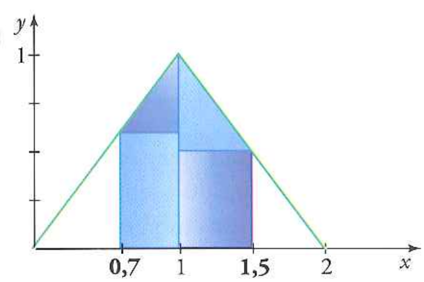
Así, $P(0,5 \leqslant X \leqslant 0,9) = 0,2 + 0,08 = 0,28$.

En conclusión, la probabilidad de que las bombas dispensen entre 0,5 y 0,9 miles de galones es del 28%.

c. Calcular la probabilidad de que las bombas dispensen entre 0,7 y 1,5 miles de galones el siguiente mes.

Primero, para calcular la probabilidad de que la bomba dispense entre 0,7 y 1,5 miles de galones se busca el área bajo [0,7; 1,5].

La siguiente gráfica describe la situación:



Luego, para calcular estas áreas se debe tener en cuenta que la función está definida algebraicamente de dos formas distintas en el mismo intervalo.

- De 0,7 a 1 la función es descrita por $f(x) = x$.
- De 1 a 1,5 la función es descrita por $f(x) = 2 - x$.

Con lo cual, se deben calcular las áreas teniendo en cuenta dichas definiciones así:

- De 0,7 a 1 $f(x) = x$.

  Área del rectángulo:

  Base $= 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ Altura $= f(0{,}7) = 0{,}7$

  Área $= 0{,}3 \times 0{,}7 = 0{,}21$

  Área del triángulo:

  Base $= 1 - 0{,}7 = 0{,}3$ Altura $= f(1) - f(0{,}7) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

  $$\text{Área} = \frac{0{,}3 \times 0{,}3}{2} = 0{,}045$$

  En conclusión, área de 0,7 a 1 $= 0{,}21 + 0{,}045 = 0{,}255$.

- De 1 a 1,5 $f(x) = 2 - x$.

  Área del rectángulo:

  Base $= 1{,}5 - 1 = 0{,}5$ Altura $= f(1{,}5) = 2 - 1{,}5 = 0{,}5$

  Área $= 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$

  Área del triángulo:

  Base $= 1{,}5 - 1 = 0{,}5$ Altura $= f(1) - f(1{,}5) = (2 - 1) - (2 - 1{,}5) = 0{,}5$

  $$\text{Área} = \frac{0{,}5 \times 0{,}5}{2} = 0{,}125$$

  En conclusión, área de 1 a 1,5 $= 0{,}25 + 0{,}125 = 0{,}375$.

Finalmente, se sabe que la probabilidad buscada se representa por $P(0{,}7 \leq X \leq 1{,}5)$.

Así, $P(0{,}7 \leq X \leq 1{,}5) = P(0{,}7 \leq X \leq 1) + P(1 \leq X \leq 1{,}5) = 0{,}255 + 0{,}375 = 0{,}63$.

Luego, se determina que la probabilidad de que las bombas dispensen entre 0,7 y 1,5 miles de galones es del 63%.

Otra forma de hacer el cálculo de esta probabilidad es resolviendo la integral definida que se planteó en la página 309. Para el caso se tendría que:

$$\int_{0,7}^{1,5} f(x)\,dx = \int_{0,7}^{1} x dx + \int_{1}^{1,5} (2 - x)\,dx$$ Integral para la probabilidad.

$$\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0,7}^{1} + \left.\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_{1}^{1,5}$$ Se aplica el primer teorema fundamental del cálculo.

$$(0{,}5 - 0{,}245) + [(3 - 1{,}125) - (2 - 0{,}5)] = 0{,}255 + [1{,}875 - 1{,}5] = 0{,}63$$

Se observa que la probabilidad calculada mediante la integral coincide con la calculada en forma geométrica.

Recuerda que...

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

si el límite existe

y

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

si el límite existe.

4.2 Función de distribución acumulada de una variable aleatoria continua

Recurso imprimible

Sea X una variable aleatoria, la función de distribución acumulada de X se simboliza como $F(x)$ y está dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \text{ para } -\infty < x < \infty$$

En la misma forma como se asumió el concepto de área bajo la curva en la función de distribución para una variable aleatoria continua, vista anteriormente, para la función de distribución acumulada se toma el mismo concepto.

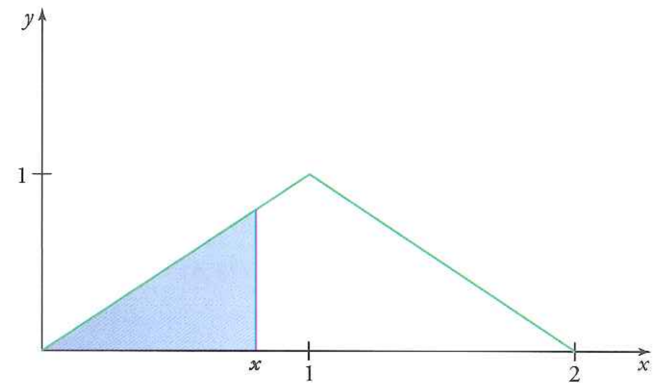
Así, para el caso de la estación de servicio es posible plantear la función acumulada de probabilidades teniendo en cuenta cuatro intervalos de comportamiento:

$x \in (-\infty, 0)$, $x \in [0, 1)$, $x \in [1, 2)$ y $x \in [2, \infty)$

Teniendo en cuenta lo anterior, se pueden plantear las siguientes opciones:

- Opción 1. Si $x < 0$, entonces, la función acumulada es 0.
- Opción 2. Si $x \in [0, 1)$, entonces, para esta situación se genera el triángulo de base x y altura $f(x) = x$.

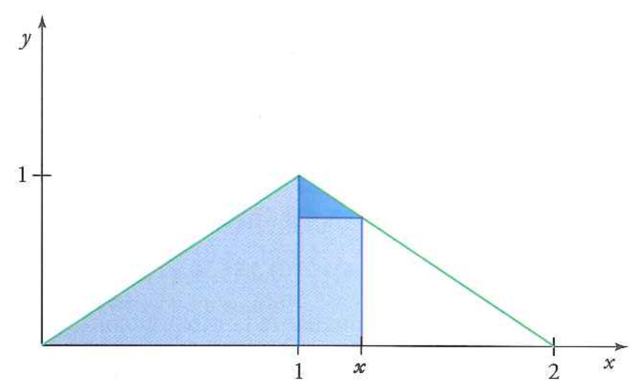
  Esta gráfica se muestra a continuación:



  Por tanto, $F(x) = \dfrac{xf(x)}{2} = \dfrac{x \cdot x}{2} = \dfrac{x^2}{2}$

- Opción 3. Si $x \in [1, 2)$, entonces, se genera una porción bajo la gráfica que está formada por un triángulo rectángulo y un rectángulo.

  La situación se muestra a continuación:



  Sin embargo, al considerar un punto a la derecha de 1, se debe sumar el área del triángulo generado desde 0 hasta 1.

  La base del rectángulo es $x - 1$ y la altura es $f(x)$.

  En el caso del triángulo, la base es $x - 1$ también y la altura es $1 - f(x)$.

  Así, el área estaría determinada por:

$$F(x) = \frac{1 \times 1}{2} + (x - 1)\, f(x) + \frac{(x - 1)(1 - f(x))}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - x^2 + 3x - 2 + \frac{x^2 - 2x + 1}{2}$$

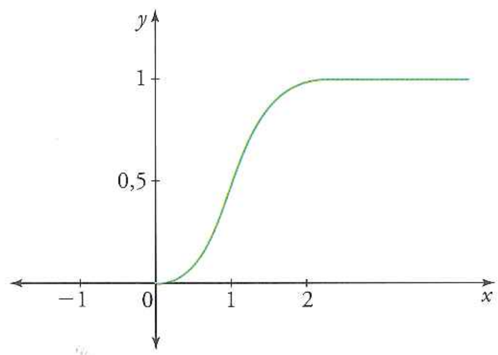
$$F(x) = \frac{-x^2 + 4x - 2}{2}$$

- Opción 4. Si $x \in [2, \infty)$. Para este caso el área acumulada será igual a 1.

  Teniendo en cuenta la definición en los cuatro intervalos, la función de distribución acumulada de la variable X estará definida por la siguiente función a trozos:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{2} & 0 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{-x^2 + 4x - 2}{2} & 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & x \geqslant 2 \end{cases}$$

La gráfica correspondiente a $F(x)$ se muestra a continuación:



Una vez definida la función de distribución acumulada es posible definir la función de distribución acumulada de probabilidades de una variable aleatoria continua, como sigue:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a)$$

Teniendo en cuenta que la función de distribución es el área bajo la curva de una función, es decir, la integral definida de dicha función en un intervalo, se dice que el resultado anterior es conocido como el primer teorema fundamental del cálculo.

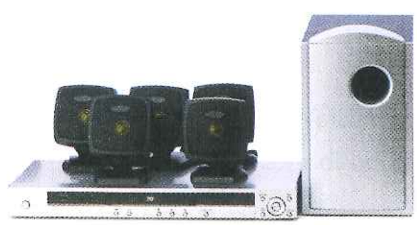
Del resultado anterior, se puede concluir que, para una variable aleatoria continua, la probabilidad de ocurrencia de un punto es cero, pues:

$$P(X = a) = P(a \leqslant X \leqslant a) = F(a) - F(a) = 0$$

EJEMPLOS

El período, en miles de horas de funcionamiento, de un equipo electrónico, viene dado por la siguiente función de distribución acumulada:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x^2} & x \geqslant 0 \end{cases}$$



a. ¿Cuál es la probabilidad de que un equipo seleccionado al azar funcione a lo sumo 1,5 miles de horas?

Para hallar esta probabilidad se deben remplazar los valores dados en la función de distribución acumulada que describe la situación. Así, para 1,5 horas se tiene que:

$P(X \leqslant 1{,}5) = F(1{,}5) = 1 - e^{-1{,}5^2} = 1 - 0{,}105399 = 0{,}89460.$

Así que la probabilidad de que un equipo seleccionado al azar funcione a lo sumo 1,5 miles de horas es del 89,4%.

b. ¿Cuál es la probabilidad que un equipo electrónico funcione entre 0,5 y 0,75 miles de horas?

Para responder esta pregunta se tiene que $P(0{,}5 \leq X \leq 0{,}75)$. Esta probabilidad está dada por la diferencia de la función de distribución calculada en cada uno de los extremos del intervalo, así:

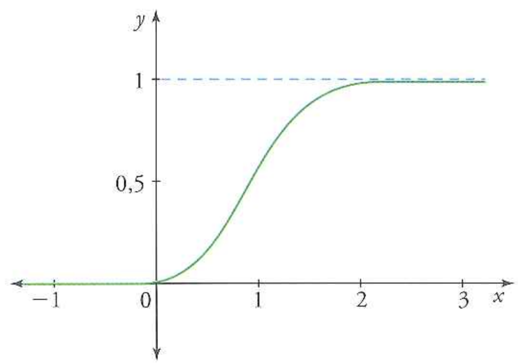
$P(0{,}5 \leq X \leq 0{,}75) = F(0{,}75) - F(0{,}5)$

$F(0{,}75) - F(0{,}5) = (1 - e^{-0{,}75^2}) - (1 - e^{-0{,}5^2}) = 0{,}43021 - 0{,}22119$

$P(0{,}5 \leq X \leq 0{,}75) = 0{,}20902$

En conclusión, que el equipo seleccionado funcione entre 0,5 y 0,75 miles de horas tiene una probabilidad del 20,902%.

A continuación, se presenta la gráfica de la función de distribución acumulada para la situación anterior:



Recurso imprimible

4.3 Valor esperado y varianza de una variable aleatoria continua

El valor esperado es un concepto fundamental en el estudio de las distribuciones de probabilidad. Desde hace muchos años este concepto ha sido aplicado ampliamente en el negocio de seguros y en los últimos veinte años ha sido aplicado por otros profesionales que casi siempre toman decisiones en condiciones de incertidumbre.

- Sea X una variable aleatoria continua, el **valor esperado** de X está dado por:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

  Así, para determinar dicho valor es necesario evaluar la integral propuesta.

- Es posible definir la **varianza** de la variable aleatoria x como sigue:

$$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\,dx$$

- En forma similar, la **desviación estándar** se define como la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)\,dx}$$

Una variable aleatoria continua corresponde a un modelo matemático de un fenómeno determinado. Es por ello, que para caracterizar el comportamiento de dicho modelo es importante conocer las funciones de distribución de probabilidad, el valor esperado y la varianza.

4.4 Distribución de probabilidad uniforme

Ampliación multimedia

Cuando se dice que una variable aleatoria continua tiene una distribución uniforme, se asume que $f(x)$ gráficamente es una recta paralela al eje x (en el intervalo definido).

La **función de distribución de probabilidad uniforme** se describe de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

Valor esperado y desviación estándar en una distribución de probabilidad uniforme

El cálculo del valor esperado y la desviación estándar de las variables que tienen una distribución uniforme se hace utilizando las siguientes fórmulas:

$$E(X) = \mu = \frac{a+b}{2} \qquad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

EJEMPLOS

El tiempo de vuelo de un avión que sigue la ruta Cali-San Andrés puede ser cualquier valor en el intervalo [120, 140] minutos.

a. Definir la función de distribución de probabilidad para la variable aleatoria que analiza los minutos de vuelo y realizar su gráfica.

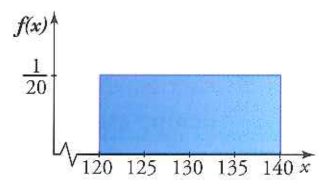
En esta situación la variable estudiada es continua. Al definir las condiciones del problema se puede observar que la probabilidad de que el tiempo de vuelo en cada instante del intervalo [120, 140] es la misma, así que la función de distribución es uniforme y se puede definir de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20} & \text{si } 120 \leqslant x \leqslant 140 \\ 0 & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

Luego, la función de densidad de probabilidad puede ser

$f(x) = \dfrac{1}{20}$ en $120 \leqslant x \leqslant 140$

La gráfica de la situación se muestra en la figura 3.

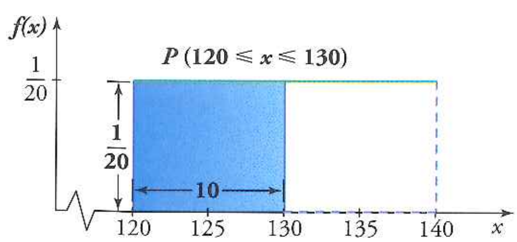


Minutos de vuelo

Figura 3.

b. Determinar la probabilidad de que el vuelo dure entre 120 y 130 minutos.

En este caso se debe calcular el área bajo la curva de la función en el intervalo [120, 130].



Minutos de vuelo

Dicha área está determinada por el área del rectángulo de base 10 y altura $\frac{1}{20}$, es decir, 0,5.

Por tanto, la probabilidad de que el vuelo dure entre 120 y 130 minutos es del 50%.

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Para una variable aleatoria X uniformemente distribuida entre 1 y 1,5, realiza lo que se indica en cada caso.

120. Elabora la gráfica de la función de densidad de probabilidad.

121. Determina $P(X = 1{,}25)$.

122. Determina $P(1 \leq X \leq 1{,}25)$.

Una aerolínea colombiana reporta un tiempo de vuelo de 2 horas y 5 minutos entre Leticia y Bucaramanga. Suponiendo que los tiempos reales de vuelo están uniformemente distribuidos entre 2 horas y 2 horas y 20 minutos, resuelve.

123. Elabora la gráfica de la función de distribución de probabilidad para los tiempos de vuelo.

124. ¿Cuál es la probabilidad de que el vuelo no llegue más de cinco minutos tarde?

125. ¿Cuál es la probabilidad de que el vuelo llegue más de 10 minutos tarde?

126. ¿Cuál es el tiempo esperado de vuelo?

127. Escribe una interpretación del resultado del tiempo esperado de vuelo.

La organización de mujeres golfistas profesionales LPGA (Ladies Professional Golf Association) tiene su sede en Daytona, Florida. La LPGA planea anualmente una serie de torneos para las mejores exponentes de este deporte. Dicha asociación reporta la distancia que hacen recorrer la bola, en un golpe las mejores golfistas del mundo. Este dato está entre 238,9 y 261,2 yardas.

Supón que para cada golfista profesional de la LPGA, las distancias alcanzadas por la bola en un golpe se distribuyen uniformemente.

128. Escribe la función de distribución para esta situación.

129. ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia de tiro sea mayor que 250 yardas?

130. ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia de tiro sea a lo menos 255 yardas?

131. ¿Cuál es la probabilidad de que la distancia alcanzada por una de estas mujeres sea de 245 a 260 yardas?

La función de distribución de la variable aleatoria que mide la distancia que hay entre el blanco de una diana y el disparo realizado por una persona es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Donde los valores negativos de X corresponden a disparos por debajo de la diana y los valores positivos de X corresponden a disparos por encima de la diana.

Calcula las siguientes probabilidades:

132. $P(X \leqslant 0{,}1)$

133. $P(0{,}5 \leqslant X \leqslant 1)$

134. $P(-0{,}7 \leqslant X \leqslant 0{,}5)$

135. Elabora la gráfica de la función.

136. Si la diana es circular, ¿cuál es su área?

137. Si una persona dispara a la diana, ¿cuál es la probabilidad de que la distancia al centro esté a menos de 0,5 unidades por encima?

138. ¿Cuál es la probabilidad de que un disparo esté a 0,3 unidades alrededor de la diana?

139. Construye la función de distribución acumulada de X.

La función de distribución acumulada de probabilidad de la variable aleatoria correspondiente al tiempo que dura un libro de cocina en la biblioteca antes de ser prestado está definida por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & 0 \leqslant x < 2 \\ 1 & x \geqslant 2 \end{cases}$$

140. Elabora la gráfica de $F(X)$.

Usando la función anterior calcula:

141. $P(X \leqslant 0{,}75)$

142. $P\left(\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant \frac{3}{2}\right)$

143. $P\left(X \geq \frac{1}{5}\right)$

144. $P(-0{,}8 < X \leqslant 1{,}8)$

4.5 Distribución de probabilidad normal

Enlace web

La normal es quizá una de las distribuciones más importantes cuando se va a describir una variable aleatoria continua. Tiene muchas aplicaciones en variados contextos, por ejemplo, la altura y el peso de las personas, mediciones científicas, precipitaciones, inferencia estadística, etc.

La **función de densidad de probabilidad normal** está definida mediante la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ para } -\infty < x < \infty$$

Curva normal

La forma de la gráfica de la distribución de probabilidad normal es una *curva acampanada* como se muestra en la figura 4. Las siguientes son propiedades de esta curva:

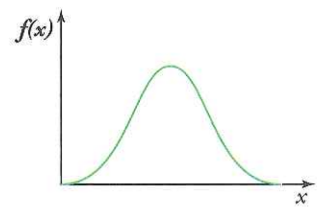
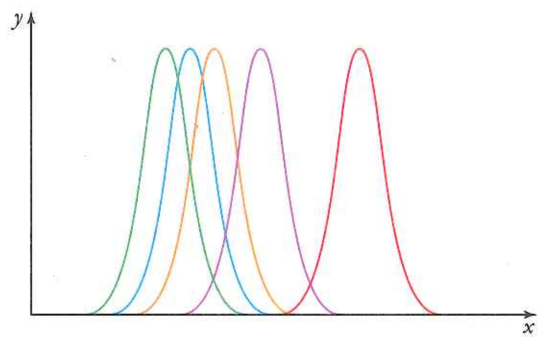


Figura 4.

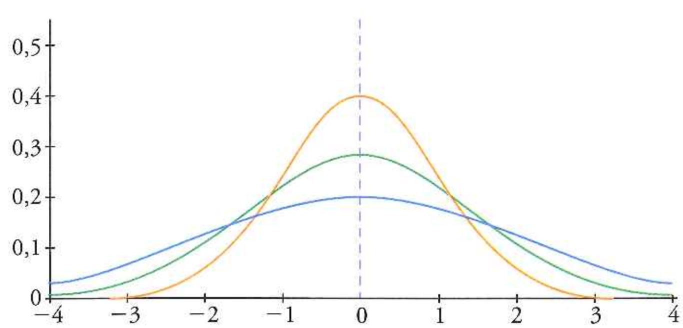
- La familia completa de distribuciones de probabilidad normales se diferencia por su media y su desviación estándar.
- El punto donde se alcanza el valor más alto de la curva normal es la media, que a su vez es la mediana y la moda de la distribución.
- La media de la distribución puede ser cualquier valor numérico: negativo, cero o positivo. En la siguiente gráfica, se presentan ejemplos de distribuciones con la misma desviación estándar pero diferente media:



- La distribución de probabilidad normal es simétrica y su eje de simetría es la media.

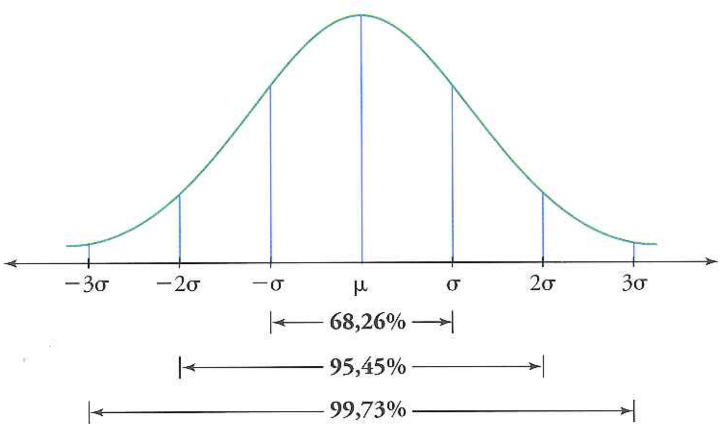
  Los extremos (lados de la curva) se prolongan al infinito en ambas direcciones y teóricamente nunca tocan el eje horizontal aunque se aproximan a él.
- La desviación estándar determina el ancho de la curva, a valores mayores de la desviación estándar se generan curvas más anchas y bajas, es decir, distribuciones con mayor dispersión de los datos.

  A continuación, se presentan curvas normales con el mismo promedio pero con distinta desviación estándar:



- Las probabilidades para la variable aleatoria normal se definen mediante áreas bajo la curva. El área total bajo una curva normal es 1; además, como la distribución es simétrica el área bajo la curva a la izquierda de la media es 0,5 y el área bajo la curva a la derecha de la media es 0,5.
- Para la distribución normal se presentan unos porcentajes de los datos que se organizan a derecha e izquierda de la media teniendo como referencia la desviación estándar de la distribución, así:
  — El 68,26% de los valores de una variable aleatoria normal está dentro de más o menos una desviación estándar de su media $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.
  — El 95,45% de los valores de una variable aleatoria normal está dentro de más o menos dos desviaciones estándar de su media $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$.
  — El 99,73% de los valores de una variable aleatoria normal está dentro de más o menos tres desviaciones estándar de su media $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

  La siguiente gráfica muestra la situación anterior:



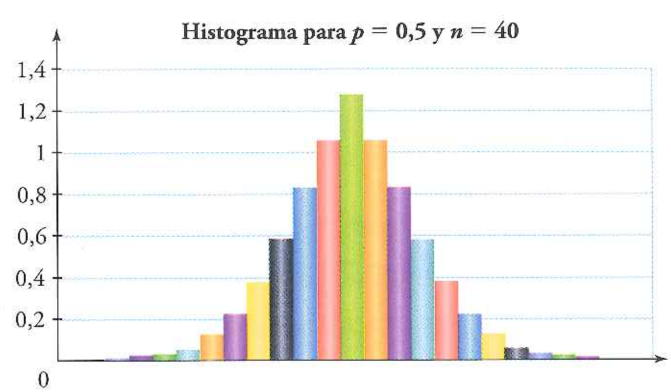
Ampliación multimedia

Aproximación de la distribución binomial a la distribución normal

A continuación, se presenta una forma en la cual la distribución binomial se puede aproximar a la distribución normal; esta permite determinar la manera de analizar una variable discreta desde el punto de vista de una variable aleatoria continua.

Al considerar una variable aleatoria discreta binomial en la cual n sea grande y los valores de p y $1 - p$ sean parecidos, se tiene que el histograma de probabilidades tiende a tener la forma de una curva normal.

Por ejemplo, si para una variable aleatoria X se tiene que $n = 40$ y $p = 0,5(1 - p = 0,5)$ el histograma correspondiente será:



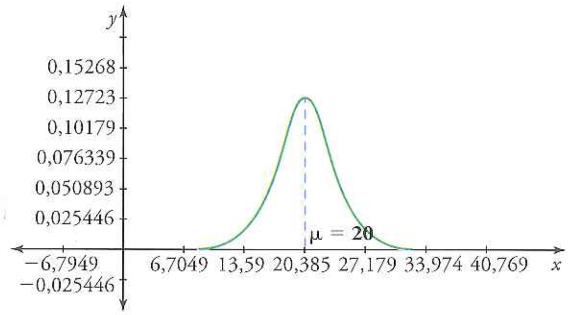
El valor esperado, la varianza y la desviación estándar de X son:

$$\mu = 40 \times 0{,}5 = 20 \qquad \sigma^2 = 40 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 10 \qquad \sigma = \sqrt{10} \approx 3{,}162$$

Para estos parámetros se tiene que la función de densidad de probabilidad normal quedaría definida así:

$$f(x) = \frac{1}{3{,}162\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-20)^2}{20}}$$

y su gráfica se muestra a continuación:



En conclusión, dada una variable aleatoria discreta binomial X, con n repeticiones y probabilidad de éxito p, si n es mayor que 30 y p y $1 - p$ se parecen, entonces, X tiene un comportamiento aproximadamente normal con valor esperado y varianza dados por:

$$\mu = np \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Distribución de probabilidad normal estándar

Recurso imprimible

Ampliación multimedia

Como en las anteriores distribuciones, la probabilidad de ocurrencia está enmarcada por el área bajo la curva de la función de distribución de probabilidad. Para la distribución normal, dicha área en un intervalo $[a, b]$ requiere el cálculo de una integral como la siguiente:

$$\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)}{2\sigma^2}} dx$$

que en el contexto del cálculo requiere de métodos complejos para su solución, además, dicha función no se puede descomponer en figuras planas de las cuales se pueda hacer un sencillo cálculo del área. Es por esto que se hace necesario determinar una herramienta que permita calcular, de una manera sencilla, dichas probabilidades, esta herramienta consiste en llevar a la distribución normal a una nueva distribución llamada *distribución normal estándar*.

Se dice que una variable aleatoria con distribución normal en la que la media es 0 y la desviación estándar es 1 tiene **distribución de probabilidad normal estándar**.

Para la distribución de probabilidad normal estándar se han determinado tablas que presentan las áreas bajo las curvas y por tanto permiten calcular de manera rápida las probabilidades. Estas tablas usan como parámetro los valores z que se describen a continuación (estos valores también fueron estudiados en el teorema de Chebyshev).

Todas las distribuciones de probabilidades normales se determinan a partir de la normal estándar, es decir, que cuando se tiene una distribución normal con media μ y desviación estándar σ, se verifican algunas condiciones para convertirla en una distribución normal estándar. Para ello, es necesario determinar los valores z adecuados que se encuentran teniendo en cuenta la siguiente expresión:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- El valor z para un valor x igual a la media μ es $z = \dfrac{\mu - \mu}{\sigma} = 0$.

  Se puede observar, entonces, que un valor x igual a la media μ corresponde a un valor z igual a 0.

- Ahora, si x está a una desviación estándar arriba de su media, es decir, $x = \mu + \sigma$, el valor z correspondiente es:

$$z = \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma} = 1$$

  Se observa que un valor x que está a una desviación estándar arriba de su media da como resultado un valor z igual a 1. Así, z se puede interpretar como la cantidad de desviaciones estándar que la variable aleatoria X se aleja de su media.

EJEMPLOS

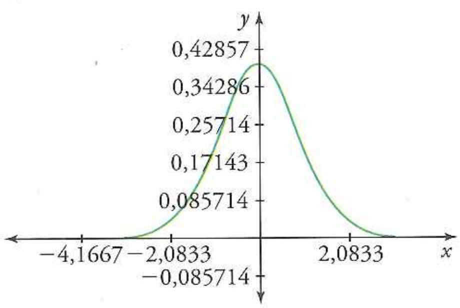
Recurso imprimible

1. **La vida útil, en miles de horas de trabajo, de un determinado televisor tiene una distribución normal, con media 7 y desviación estándar 1,5. Escribir la distribución como una distribución normal estándar y graficarla.**

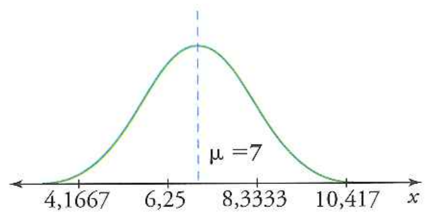
Para la situación se hace necesario hallar el valor z correspondiente:

$$z = \frac{x - 7}{1,5}$$

Gráficamente se tiene que:



Normal estándar



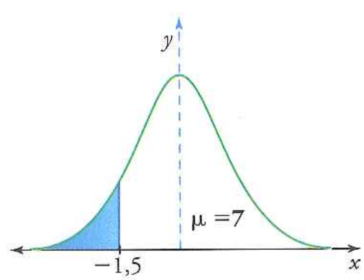
Distribución de la vida útil del televisor

El cálculo de probabilidades de la normal estándar se realiza con las tablas. En las filas se obtienen los valores de z en términos de unidades y décimas, en las columnas se representan las centésimas. El valor que se encuentra en la tabla que corresponde al área bajo la curva normal en el intervalo $(-\infty, z]$.

2. **Calcular las siguientes probabilidades a partir de los datos de la tablas de distribución de la normal estándar.**

a. $P(Z \leq -1,5)$

La gráfica que se muestra al lado describe la región que se va a considerar:



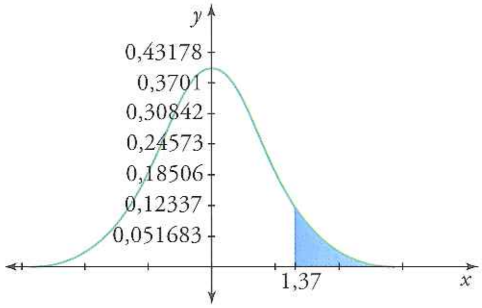
Usando la tabla de probabilidades de la distribución normal estándar, se ubica en la primera columna el valor $-1,5$ y como no hay centésimas, se ubica el valor correspondiente a la columna 0. El valor encontrado es 0,0668.

Recuerda que...

Es de gran utilidad aprovechar las tablas ya diseñadas para el cálculo de las probabilidades en la distribución normal estándar. Puedes encontrar estas tablas en el recurso imprimible correspondiente.

b. $P(Z \geqslant 1{,}37)$

Para encontrar esta probabilidad se tiene que la región en la cual se debe hacer el cálculo está representada por:



Usando la tabla de distribución normal estándar, para el valor 1,37 se obtiene una probabilidad de 0,9147. Es decir, la región de la izquierda de 1,37 tal y como se muestra en la figura 5.

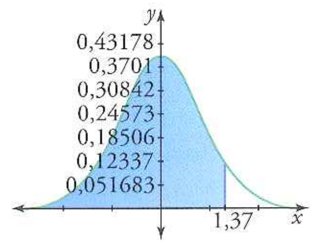


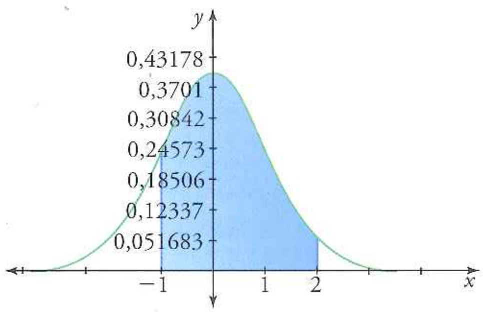
Figura 5.

Para calcular el área de la región de la derecha se debe usar la propiedad del complemento de un evento.

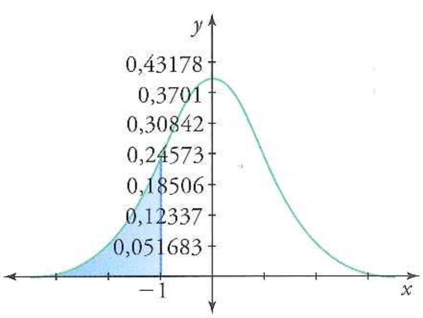
Por tanto, $P(Z \geqslant 1{,}37) = 1 - P(Z < 1{,}37) = 1 - 0{,}9147 = 0{,}0853$

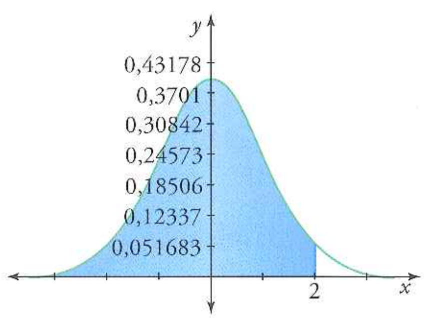
c. $P(-1 \leqslant Z \leqslant 2)$

Para determinar esta probabilidad se tiene la gráfica de la región correspondiente:



En la tabla de distribución normal estándar, el valor correspondiente a -1 es 0,1587 y el valor correspondiente a 2 es 0,9772. A continuación se muestra cada región:





Para obtener el área de la región se debe hallar la diferencia entre los dos valores encontrados:

$$P(-1 \leqslant Z \leqslant 2) = F(2) - F(-1) = 0{,}9772 - 0{,}1587 = 0{,}8185$$

Al observar las gráficas, se puede determinar que la normal estándar está, en su mayoría, concentrada en el intervalo de -4 a 4.

Ampliación multimedia

Cálculo de probabilidades en distribuciones normales no estándar

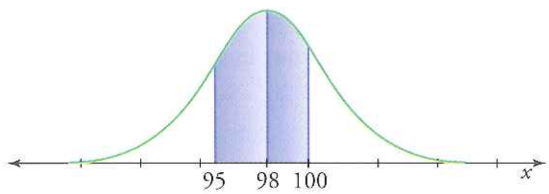
Para calcular probabilidades en distribuciones normales no estándar se deben estandarizar los valores de la variable aleatoria X y encontrar la región equivalente en la curva estándar.

EJEMPLOS

El número de personas, medido en miles, que utiliza el servicio masivo de transporte público tiene una distribución normal con media 98 y desviación estándar 12.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día cualquiera haya entre 95 mil y 100 mil usuarios?

Esta pregunta se resuelve calculando $P(95 \leqslant x \leqslant 100)$. La gráfica muestra la región sobre la que se debe hacer el cálculo:

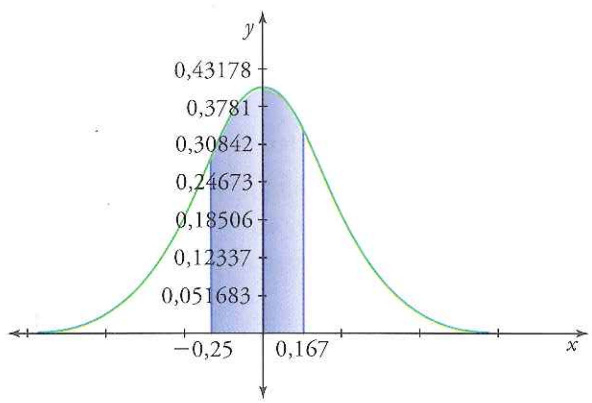


En este caso se deben estandarizar dos valores (extremos del intervalo):

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{95 - 98}{12} = -0,25$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{100 - 98}{12} = 0,17$$

Así, la gráfica de la normal estándar en esta situación será la siguiente:



El cálculo de la probabilidad se muestra a continuación:

$P(95 \leqslant X \leqslant 100) = P(-0,25 \leqslant Z \leqslant 0,17)$

$P(-0,25 \leqslant Z \leqslant 0,17) = F(0,17) - F(-0,25)$

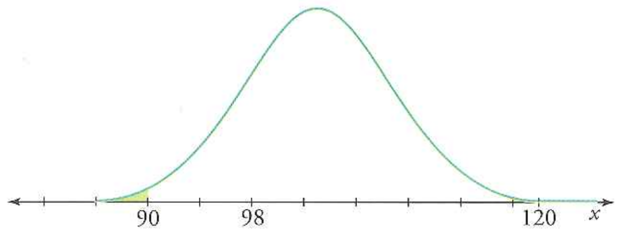
$= 0,5675 - 0,4013$

$P(-0,25 \leqslant Z \leqslant 0,167) = 0,1662$

En conclusión, la probabilidad de que en un día cualquiera el sistema tenga entre 95 mil y 100 mil usuarios es del 16,62%.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día determinado usen el servicio menos de 90 mil personas o más de 120 mil?

En este caso se debe calcular $P(X \leq 90) + P(X \geq 120)$. La gráfica de la situación se muestra a continuación:



Los valores estandarizados para este caso son:

$$z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{90 - 98}{12} = -0,67$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{120 - 98}{12} = 1,83$$

Ahora, calculando la probabilidad se tiene que:

$P(X \leq 90) + P(X \geq 120) = P(Z \leq -0,67) + P(Z \geq 1,83)$

$P(Z \leq -0,67) + P(Z \geq 1,83) = F(-0,67) + (1 - P(Z \leq 1,83))$

$P(Z \leq -0,67) + P(Z \geq 1,83) = 0,2514 + (1 - 0,9664) = 0,285$

En conclusión, la probabilidad de que en un día determinado usen el servicio menos de 90 mil personas o más de 120 mil es del 28,5%.

Percentiles en la distribución normal estándar

Dada una distribución normal estándar es posible que en la probabilidad se busque encontrar el valor z correspondiente, para ello, se debe tener en cuenta que la probabilidad es denominada el **percentil de la distribución**.

Por ejemplo, si $P(Z < a) = 0,75$ es porque a corresponde al percentil 75 (cuartil 3). En este caso, para ubicar el valor del percentil se busca en la tabla el valor de z más cercano a 0,75; el cual corresponde a 0,67. Entonces, se dice que para esta distribución el percentil 75 es 0,67.

EJEMPLO

El salario, en miles de pesos, de un empleado de una compañía tiene una distribución normal con media 720 y desviación estándar 95. Calcular los cuartiles de la distribución.

Para la situación solo se deben calcular los cuartiles 1 y 3 ya que el cuartil 2 corresponde a la media.

- Cuartil 1. Para $P(Z \leq z_1) = 0,25$, se tiene que $z_1 = -0,67$.

  Luego, $-0,67 = \dfrac{q_1 - 720}{95}$ así que $q_1 = 656,35$.

- Cuartil 3. Para $P(Z \leq z_3) = 0,75$ se tiene que $z_3 = 0,67$.

  Luego, $0,67 = \dfrac{q_3 - 720}{95}$ así que $q_3 = 783,65$.

Los siguientes casos involucran variables aleatorias con distribuciones normales. Determina si la primera probabilidad es mayor, la segunda probabilidad es mayor o las dos probabilidades son iguales.

145. La probabilidad de que una variable aleatoria que tiene la distribución normal con $\mu = 50$ y $\sigma = 10$ tome un valor menor que 60, o la probabilidad de que una variable aleatoria que tiene distribución normal con $\mu = 500$ y $\sigma = 100$ tome un valor menor que 600.

146. La probabilidad de que una variable aleatoria que tiene la distribución normal con $\mu = 40$ y $\sigma = 5$ tome un valor mayor que 40, o la probabilidad de que una variable aleatoria que tiene distribución normal con $\mu = 50$ y $\sigma = 5$ tome un valor mayor que 40.

147. La probabilidad de que una variable aleatoria que tiene la distribución normal con $\mu = 5.000$ y $\sigma = 1.000$ tome un valor entre 4.000 y 6.000, o la probabilidad de que una variable aleatoria que tiene distribución normal con $\mu = 7.000$ y $\sigma = 1.000$ tome un valor entre 4.000 y 6.000.

E **Una variable aleatoria tiene distribución normal con $\mu = 80$ y $\sigma = 4,8$. Determina las siguientes probabilidades:**

148. Menor que 87,2.

149. Mayor que 76,4.

150. Entre 81,2 y 86.

151. Entre 71,6 y 88,4.

E **Una variable aleatoria tiene distribución normal con $\mu = 62,5$ y $\sigma = 12,4$. Determina las siguientes probabilidades:**

152. Menor que 40,1.

153. Mayor que 69,3.

154. Entre 65 y 75.

S **Un estudio revela que el 40% de todos los pensionados tienen una microempresa familiar.**

155. Usa la distribución normal para obtener una aproximación de la probabilidad de que, entre 40 de dichos pensionados seleccionados al azar, 10 tengan microempresas familiares.

R **156. Una distribución normal tiene media igual a 62,4. Encuentra su desviación estándar si 20% del área bajo la curva cae a la derecha de 79,2.**

R **157. Usa la distribución normal para encontrar una aproximación de la probabilidad de obtener 24 caras y 16 sellos en 40 lanzamientos de una moneda.**

S **El 45% de los juguetes fabricados por una industria son de material sintético.**

158. Usando la distribución normal, encuentra una aproximación de la probabilidad de que entre 150 juguetes por lo menos 58 sean de material sintético.

Una variable aleatoria se distribuye normalmente con media $\mu = 50$ y desviación estándar $\sigma = 5$.

159. Dibuja la curva normal de la función de densidad de probabilidad. Indica los valores 35, 40, 45, 50, 55, 60 y 65 en el eje horizontal.

160. ¿Cuál es la probabilidad de que la variable aleatoria tenga un valor entre 45 y 55?

161. ¿Cuál es la probabilidad de que la variable aleatoria tenga un valor entre 40 y 60?

S **El número anual de terremotos a nivel mundial es una variable aleatoria que tiene aproximadamente una distribución normal con $\mu = 20$ y $\sigma = 4,5$. Determina las probabilidad de que en cualquier año de referencia haya:**

162. Exactamente 19 terremotos.

163. A lo sumo 19 terremotos.

164. Como mínimo 19 terremotos.

S La cantidad real de café instantáneo que una máquina llenadora vierte en pocillos de 6 onzas varía de un pocillo a otro y se puede considerar como una variable aleatoria que tiene una distribución normal con una desviación estándar de 0,04 onzas.

165. ¿Cuál debe ser la cantidad media vertida en estos pocillos si solo el 2% de ellos debe contener más de 6 onzas de café?

S En un estudio de comportamiento agresivo, ratones machos blancos, devueltos al grupo en el que viven después de cuatro horas de aislamiento, promediaron 18,6 peleas en los primeros cinco minutos; la desviación estándar fue de 3,3 peleas. Si se supone que la distribución de esta variable (el número de peleas en que se ve involucrado uno de dicho ratones en las condiciones mencionadas) se puede aproximar a una distribución normal.

166. Calcula la probabilidad de que uno de dichos ratones participe como mínimo en 15 peleas en los primeros cinco minutos.

S El tiempo promedio que emplea un suscriptor de una revista de farándula en leer la publicación es de 49 minutos con desviación estándar de 16 minutos. Supongamos que los tiempos de lectura tienen una distribución normal.

167. Calcula la probabilidad de que el suscriptor tarde cuando menos una hora en leer la revista.

168. ¿Cuál es la probabilidad de que el suscriptor no tarde más de 30 minutos en leer la revista?

169. Determina la probabilidad de que el lector tarde entre 33 y 65 minutos en leer la revista.

S Según el Departamento Administrativo Nacional de Estadística, el pago semanal promedio de un profesor particular de inglés es de $795.000 con una desviación estándar de $162.000. Si se supone que dicha variable tiene distribución normal:

170. ¿Cuál es la probabilidad de que un profesor gane entre $720.000 y $900.000?

171. Para un profesor elegido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que gane menos de $450.000 por semana?

S El tiempo necesario para terminar un examen final de matemáticas se distribuye normalmente con una media de 80 minutos y una desviación estándar de 10 minutos.

172. ¿Cuál es la probabilidad de terminar el examen en una hora o menos?

173. ¿Cuál es la probabilidad de terminar el examen en más de 60 minutos pero menos de 75 minutos?

174. Supón que en el grupo en el que se practicó el examen hay 60 estudiantes y que el tiempo del examen es de 90 minutos. ¿Cuántos alumnos se espera que no puedan terminar el examen en el tiempo indicado?

S La cantidad promedio de lluvias en una ciudad en el mes de abril es de 3,5 pulgadas. Supón que la cantidad de lluvias es una variable aleatoria distribuida normalmente y con una desviación estándar de 0,8 pulgadas.

175. ¿Qué porcentaje del tiempo, la cantidad de lluvia en el mes de abril es mayor que 5 pulgadas?

176. ¿Qué porcentaje del tiempo, la cantidad de lluvia en el mes de abril es menor que 3 pulgadas?

EJERCICIOS PARA REPASAR

Probabilidad condicional

La probabilidad de que una persona responsable de un delito se declare culpable es del 32%, la probabilidad de que se le otorguen beneficios en la condena por su confesión es del 98%, y la probabilidad de no tener beneficios sin haber confesado es del 85%.

177. Construye un diagrama que muestre las probabilidades en esta situación. Ten en cuenta las probabilidades que son condición de otras.

178. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona reciba beneficios en su condena?

179. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona culpable confiese y reciba beneficios?

180. Si una persona no recibe beneficios en su condena, ¿cuál es la probabilidad de que no haya confesado?

En una moneda cargada, la probabilidad de que caiga cara es de 0,75. Dicha moneda se lanza al aire tres veces. Si se supone que los lanzamientos son independientes:

181. Calcula la probabilidad de que los dos primeros lanzamientos sean cara.

182. Calcula la probabilidad de que el primer lanzamiento sea cara y los dos siguientes sean sellos.

183. Calcula la probabilidad de que los tres lanzamientos sean sellos.

La costura de un tipo de pantalón necesita cuatro remaches para que quede segura. La costura tendrá que volverse a realizar si uno de los cuatro remaches queda defectuoso. Se supone que los remaches tienen una probabilidad de 0,05 de estar defectuosos y los cuatro remaches tienen la misma probabilidad de tener defectos.

184. ¿Cuál es la probabilidad de que una costura se deba realizar nuevamente?

185. Si se elaboran 200 pantalones, ¿a cuántos se les debe realizar nuevamente las costuras?

Variables aleatorias

Determina de qué tipo son las siguientes variables aleatorias:

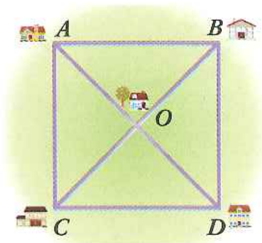
186. El diámetro de un tornillo producido por un torno electrónico. ______

187. El número de respuestas acertadas en un examen de cinco preguntas. ______

188. El diámetro de la cabeza de un niño de cinco años. ______

Distribuciones discretas de probabilidad

Juan vive en el punto O de la siguiente gráfica:



Tiene cuatro amigos que viven en los puntos A, B, C y D. Un día decide ir de visita, lanza una moneda al aire para determinar a cuál de ellos visitar.

Una vez en la casa de su amigo decide volver a su casa o visitar a uno de los dos amigos de al lado. Así continúa de visita hasta llegar a casa y se sabe que Juan no visita dos veces a un amigo:

189. Sea X el número de amigos que visita Juan. Determina el espacio muestral para esta variable.

190. ¿Cuáles son los posibles valores de X?

191. Construye la función de distribución de probabilidad de X.

192. ¿Cuál es el número esperado de visitas que hace Juan?

193. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan visite por lo menos a dos amigos?

194. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan visite a un amigo?

Distribución binomial

Determina si los siguientes experimentos son binomiales. En caso de serlo, identifica n, p y q.

195. Un estudiante debe resolver un examen de siete preguntas, cada una con dos opciones de respuesta V o F. Sea X la variable aleatoria que mide el número de respuestas correctas.

196. Un automóvil se acerca a una esquina y puede tomar una de tres direcciones: continuar a la derecha, a la izquierda o seguir adelante. En un minuto específico se acercan cuatro automóviles a una esquina, sea Y la variable que mide el número de automóviles que giran a la derecha.

Función de distribución de una variable aleatoria continua

Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo que dura un libro de cálculo en la biblioteca pública de la ciudad antes de que una persona lo pida prestado. La función de distribución de la variable X para x en días es:

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

197. ¿Cuál es la probabilidad de que el libro dure a lo sumo medio día en la biblioteca?

198. ¿Cuál es la probabilidad de que el libro dure exactamente un día en la biblioteca?

199. ¿Cuál es la probabilidad de que el libro dure menos de 1 día o más de 3 días?

PROBLEMAS PARA REPASAR

Una persona vende automóviles nuevos en un concesionario. Generalmente negocia el mayor número de vehículos los días sábado. Este vendedor ha establecido la siguiente distribución de probabilidad para el número de automóviles que espera vender en un sábado particular:

Automóviles vendidos	0	1	2	3	4	Total
Probabilidad $P(x)$	0,10	0,20	0,30	0,30	0,10	1,00

¿Qué tipo de variable aleatoria se plantea?

Un sábado común, ¿cuántos automóviles espera vender?

¿Cuál es la varianza de la distribución?

Paso 1 Comprende el problema.

¿Cuáles son las preguntas del problema?

¿Qué tipo de variable aleatoria se plantea?, en un sábado común, ¿cuántos automóviles espera vender?, y ¿cuál es la varianza de la distribución?

¿Cuáles son los datos del problema?

En esta situación se da como información primordial la tabla de probabilidades que el vendedor ha planteado teniendo en cuenta su experiencia en ventas los días sábado.

Paso 2 Elabora un plan y llévalo a cabo.

Para saber qué tipo de variable aleatoria se plantea, se analiza que los valores que forma la varible automóviles vendidos, son números enteros 0, 1, 2, 3 o 4 y son mutuamente excluyentes, luego la variable es discreta.

Para determinar cuántos automóviles espera vender en un sábado común, se debe calcular el valor esperado o media ponderada de la distribución mediante la fórmula $\mu = \sum x\,P(x)$ y para determinar la varianza se completa la tabla de la siguiente manera:

Automóviles vendidos	Probabilidad	$xP(x)$	$x - \mu$	$(x - \mu)^2$	$(x - \mu)^2 P(x)$
0	0,10	0	$-2,10$	4,41	0,441
1	0,20	0,20	$-1,10$	1,21	0,242
2	0,30	0,60	$-0,10$	0,01	0,003
3	0,30	0,90	0,90	0,81	0,243
4	0,10	0,40	1,90	3,61	0,361
Total	1,00	2,10			$\sigma^2 = 1,29$

Paso 3 Verifica y redacta la respuesta.

Teniendo en cuenta la tabla se tiene que $\mu = \sum x\,P(x) = 2,1$ y $\sigma^2 = 1,29$, por tanto, $\sigma = 1,136$, se concluye que esa variable es discreta. En un sábado particular se espera que se vendan dos automóviles y la varianza de la distribución es 1,136.

Realiza lo que se indica en los numerales 200 a 204 de acuerdo con la siguiente información.

La siguiente tabla muestra la distribución de probabilidades de la variable x: número de errores ortográficos en un cuaderno de matemáticas.

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0,15	0,25	0,25	0,1	0,25

200. Si se abre el cuaderno en una página al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga por lo menos dos errores de ortografía?

201. ¿Cuál es la probabilidad de que una página del cuaderno tenga entre tres y cinco errores?

202. Construye y grafica la función de distribución acumulada de probabilidades de X.

203. Halla el número esperado de errores en una página del cuaderno de matemáticas.

204. Calcula la varianza de X.

Realiza las actividades 205 a 212 a partir de la siguiente información.

Sea X la variable aleatoria que mide el número de tabletas vendidas en un día por un nuevo empleado de la sección de ventas.

La función de distribución de X es:

x	0	1	2	3	4
$P(x)$	0,5	0,3	0,15	0,03	0,02

205. ¿Cuál es la probabilidad de que un empleado venda por lo menos una *tablets*?

206. ¿Cuál es el valor de venta esperado del empleado?

207. Si el salario del empleado se calcula mediante la función $f(x) = 350.000 + 750.000x$, ¿cuál es el salario esperado?

208. Calcula la varianza de la variable.

209. Construye la función de distribución acumulada de X.

210. ¿Cuál es la probabilidad de que el empleado haga a lo sumo una venta?

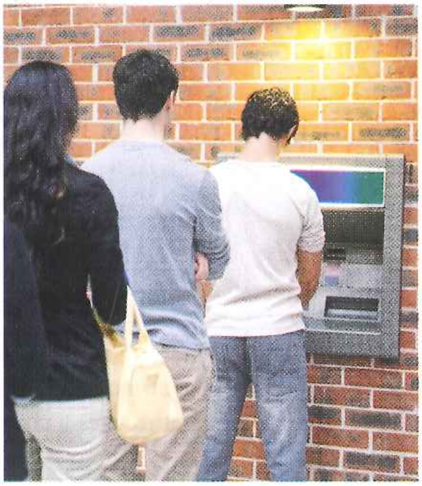
211. ¿Cuál es la probabilidad de que el empleado no haga ninguna venta o venda más de cuatro *tablets*?

212. ¿Cuál es la probabilidad de que venda entre dos y cuatro *tablets*?

Y esto que aprendí, ¿para qué me sirve?

...Para analizar los tiempos de espera de los clientes en un cajero automático.

Galería de imágenes



Los cajeros automáticos permiten a los clientes realizar sus operaciones bancarias en un solo lugar, las 24 horas del día, durante los siete días de la semana. Por esto, en un cajero automático se pueden realizar con facilidad distintas transacciones bancarias, que van desde simples retiros hasta el manejo de inversiones.

Cada cajero automático opera con un sistema de línea de espera, que depende de la cantidad de clientes que llegan en forma aleatoria en busca de uno de los servicios que ofrece. Si todos los cajeros están ocupados, el cliente que llega debe esperar en la fila. Por esto, se emplean estudios periódicos para analizar los tiempos de espera de los clientes y así poder determinar si es necesario instalar un mayor número de cajeros automáticos en los diferentes puntos de atención.

Como la cantidad de clientes que llegan a un cajero automático en un determinado lapso de tiempo es aleatoria, entonces, se puede analizar mediante una distribución de probabilidad conocida como función de distribución de Poisson. De esta manera, el banco puede calcular las probabilidades para la cantidad de clientes que llegan a un cajero durante un tiempo y tomar decisiones en cuanto al número de cajeros que deben permanecer en funcionamiento.

Según la distribución de Poisson, la probabilidad de que x personas lleguen a un cajero en determinado lapso de tiempo, está dado por la expresión:

$$P(x, \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

Donde:

λ es el promedio de personas que visita el cajero durante ese lapso de tiempo.

x es el número de personas que se espera que lleguen al cajero.

e es el número de Euler cuyo valor aproximado es 2,718.

1. **¿En qué otras situaciones relacionadas con entidades bancarias se podría aplicar la distribución de probabilidad de Poisson? Justifica tu respuesta.**

2. **Si una entidad bancaria establece que en promedio ocho personas visitan uno de los cajeros automáticos durante media hora, ¿cuál es la probabilidad de que puedan llegar solo tres personas al cajero en ese lapso de tiempo?**

3. **Según la función de distribución de Poisson que aparece en la lectura, responde:**

a. ¿Qué tipo de variable es x?

b. ¿Cómo es la gráfica de la función cuando el valor promedio λ es igual a 10?

4. **En la siguiente tabla se muestran las probabilidades de que lleguen x personas a un cajero durante un minuto. Calcula el promedio de personas que visitan el cajero en ese lapso de tiempo.**

x	Probabilidad
1	0,3515
2	0,2342
3	0,1040

5. **Consulta otra aplicación de la distribución de Poisson en otra área o ciencia. Luego, redacta un problema al respecto y resuélvelo.**

...También sirve para determinar el porcentaje de personas que tienen una determinada estatura.

La estatura es una variable morfológica que depende de la genética y la nutrición. Por esta razón, determinar la variación de la estatura media de una población en cierto período de tiempo, sirve como referente para establecer su estado nutricional, lo que permite analizar las condiciones socioeconómicas en una región. Por ejemplo, en algunos países europeos la estatura promedio de los varones aumentó hasta 15 cm, del siglo XIX al siglo XXI, debido a los cambios sociales y económicos que permitieron una mejora en la alimentación.

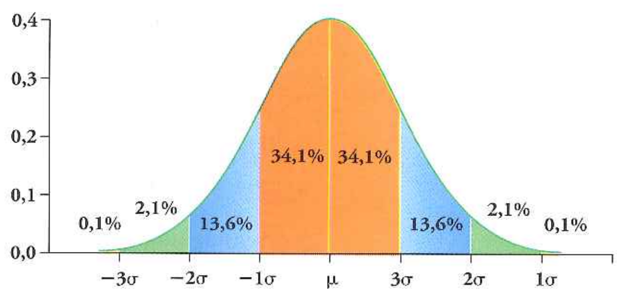
En Colombia, según un documento del Banco de la República, hubo un incremento en la estatura entre 1910 y 1984, ya que la estatura promedio de los hombres aumentó 8 cm y la estatura promedio de las mujeres aumentó 9 cm. Además, se tiene que la diferencia entre la estatura promedio de los departamentos varía en un 43% debido a los ingresos económicos y a ciertas características raciales.

Para determinar el porcentaje de personas que están en un rango de estatura dado, se utiliza la distribución normal, la cual está dada por la expresión:

$$P(x) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2s^2}$$

Donde S es la desviación estándar constante, μ es la media y el valor aproximado de π es de 3,1416.

La gráfica de la distribución normal tiene forma de campana, y el área bajo la curva es 1, que equivale al 100% como se muestra en la figura.



Para hallar el porcentaje de hombres que tienen una estatura entre 170 y 175 centímetros, si la media es de 173 cm y la desviación estándar es 1, se debe calcular el área bajo la curva de la función de distribución normal mediante la siguiente integral:

$$\int_{170}^{175} P(x)\,dx = \int_{170}^{175} \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-(x-\mu)^2/2s^2}\,dx$$

Una forma de calcular esta integral, es aproximar el área bajo la curva mediante la suma de las áreas de trapecios, de tal forma que si se toman intervalos de una unidad como altura de cada trapecio, entonces se tiene que:

$$\frac{P(170)+P(171)}{2}\cdot 1 + \frac{P(171)+P(172)}{2}\cdot 1 + \ldots + \frac{P(174)+P(175)}{2}\cdot 1$$

Realizando las operaciones se obtiene:

$$\int_{170}^{175} P(x)\,dx \approx 0,0292 + 0,148 + 0,321 + 0,321 + 0,148$$

Al sumar los resultados se tiene que:

$$\int_{170}^{175} P(x)\,dx \approx 0,9672$$

Finalmente, para obtener el porcentaje se multiplica el resultado por 100.

$0,9672 \times 100 = 96,72\%$

Lo que indica que el 96,72% de los hombres tienen estaturas entre 170 y 175 centímetros para una distribución normal, con una media de 173 cm.

1. **Consulta las estaturas promedio de hombres y mujeres en dos países diferentes. Luego, escribe las posibles causas por las cuales se pueden presentar diferencias en las estaturas.**
2. **Entre 1945 y 1949, las estaturas promedio de las mujeres y de los hombres en Colombia era aproximadamente 156 cm y 167 cm, respectivamente. Si se toma como desviación estándar 1, calcula:**
   - **a.** El porcentaje de mujeres cuya estatura estaba entre los 152 y los 157 centímetros.
   - **b.** El porcentaje de hombres cuya estatura estaba entre los 166 y los 170 centímetros.

Trabaja con Excel

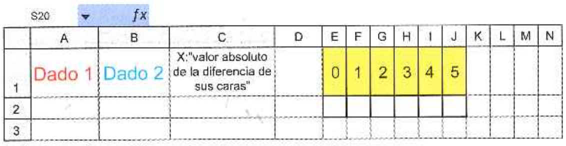
Objetivo: calcular la función de probabilidad de una variable aleatoria.

Descripción: utilizar una planilla de cálculo, para simular el lanzamiento de dos dados, para calcular la función de probabilidad de la variable aleatoria X, definida como X: valor absoluto de la diferencia de sus caras, en 50, 1.000 y 5.000 lanzamientos.

1. Haz clic en inicio programas y luego, en Microsoft Excel.

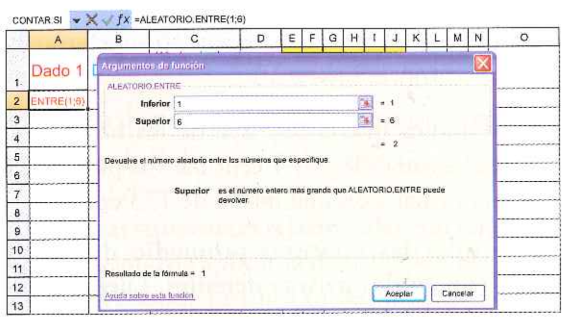
2. Crea una hoja de trabajo. Luego, se escribe en las celdas A1, B1 y C1, "Dado 1", "Dado 2" y la variable aleatoria X, respectivamente.

   Además, en las celdas E1 hasta J1 se escriben los posibles valores que puede tomar la variable X.



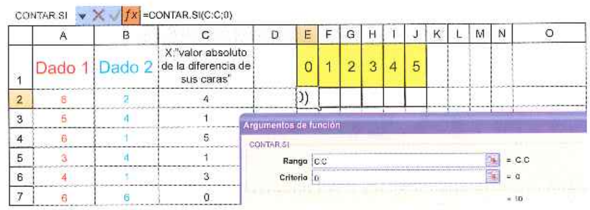
3. Genera los lanzamientos mediante la función =**ALEATORIO.ENTRE**. Luego, marca en el argumento superior de la función 6, y en el inferior 1. Después, haz clic en **Aceptar**.

   Finalmente, copia la función desde A2 hasta A51 y B2 hasta B51, para simular 50 lanzamientos, como se muestra en la figura.



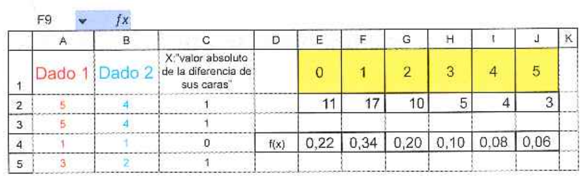
4. Escribe en la celda C2 la función =ABS(A2 − B2). Luego, cópiala en toda la columna C.

5. Para contar la cantidad de 0 que resultan al restar las caras de los dos dados, escribe en la celda E2 la función =CONTAR.SI(C:C;0), donde los argumentos del rango indican la columna C donde se va a contar, y el criterio indica qué número se va a contar (en este caso, 0). Luego, copia esta fórmula en las celdas correspondientes a 1, 2, 3, 4 y 5, cambiando el criterio correspondiente en cada caso, como se muestra en la figura.



6. Observa los valores obtenidos de la variable aleatoria X.

   Luego, determina los valores de la función de probabilidad $f(x_i)$ escribiendo en la celda E4 la fórmula =E2/50. Finalmente, copia la fórmula en las respectivas celdas F4, G4, H4, I4 y J4.



La anterior función de probabilidad para 50 lanzamientos, se expresa como:

$$f(x_i) = P(X = x_i) = \begin{cases} 0{,}22 \text{ si } X = 0 \\ 0{,}34 \text{ si } X = 1 \\ 0{,}20 \text{ si } X = 2 \\ 0{,}10 \text{ si } X = 3 \\ 0{,}08 \text{ si } X = 4 \\ 0{,}06 \text{ si } X = 5 \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

7 Realiza la simulación para 1.000 lanzamientos de la misma forma como se efectuó anteriormente.

M984 fx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Dado 1	Dado 2	X:"valor absoluto de la diferencia de sus caras"		0	1	2	3	4	5	
2	5	3	2		169	279	237	166	103	46	
3	6	5	1								
4	1	1	0	f(x)	0,17	0,28	0,24	0,17	0,10	0,05	
5	6	6	0								

Luego, escribe la función de probabilidad para 1.000 lanzamientos.

$$f(x_i) = P(X = x_i) = \begin{cases} 0{,}17 \text{ si } X = 0 \\ 0{,}28 \text{ si } X = 1 \\ 0{,}24 \text{ si } X = 2 \\ 0{,}17 \text{ si } X = 3 \\ 0{,}10 \text{ si } X = 4 \\ 0{,}05 \text{ si } X = 5 \\ 0 \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

8 Realiza la simulación para 5.000 lanzamientos de la misma forma como se efectuó en los pasos 3 al 6.

G7 fx

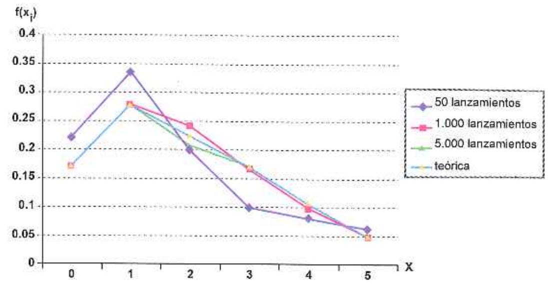
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Dado 1	Dado 2	X:"valor absoluto de la diferencia de sus caras"		0	1	2	3	4	5
2	5	5	0		829	1398	1064	875	563	271
3	2	2	0							
4	5	2	3	f(x)	0,17	0,28	0,21	0,18	0,11	0,05
5	2	2	0							

Luego, escribe la función de probabilidad para 5.000 lanzamientos.

9 Construye la siguiente tabla, con los valores de la función de probabilidad de la variable aleatoria X, para 50, 1.000 y 5.000 lanzamientos. Luego, compara cada una con la función de probabilidad teórica, indicando la diferencia o error, con respecto al valor teórico.

X	0	1	2	3	4	5
50	0,22	0,34	0,20	0,10	0,08	0,06
1.000	0,17	0,28	0,24	0,17	0,10	0,05
5.000	0,17	0,28	0,21	0,18	0,11	0,05
Teórico	0,16	0,27	0,2	0,16	0,11	0,05
Error 50	0,05	0,06	-0,02	-0,06	-0,0311	-0,004
Error 1.000	0,003	0,007	0,017	0,003	-0,011	-0,004
Error 5.000	0,003	0,007	-0,012	0,013	-0,0011	-0,005

10 Realiza el gráfico correspondiente a la tabla anterior.



11 Simula el lanzamiento de dos dados 1.000, 2.000 y 5.000 veces y determina para cada uno de ellos la función de probabilidad y de distribución de probabilidad de la variable aleatoria, y si esta se define como "producto entre las caras de los dados".

12 Calcula el error para cada una de las simulaciones.

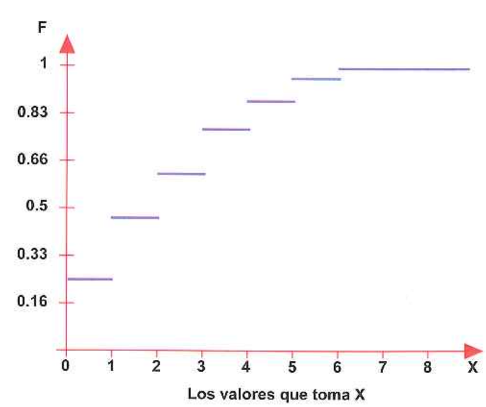
13 Responde. ¿Qué observas respecto al error de las probabilidades a medida que aumentan los lanzamientos?

14 Lee y resuelve en una hoja de cálculo de Excel, como se muestra en la figura.

En una bolsa se han puesto todas las fichas de un dominó, se extrae una al azar y se resta al mayor de los valores de la ficha el otro valor.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Variable aleatoria X							
2	Espacio muestral							
3	Recorrido para v.a.X							
4	Función de probabilidad	P(X = 0)	P(X = 1)	P(X = 2)	P(X = 3)	P(X = 4)	P(X = 5)	P(X = 6)
5								
6								
7								

15 Realiza la gráfica de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria.



GLOSARIO

A

Antiderivada: función $F(x)$ que satisface $F'(x) = f(x)$.
Área de regiones curvas: aquellas cuyos límites no son rectas sino gráficas de funciones.
Asíntota: línea recta que prolongada indefinidamente se acerca a una curva.

C

Complemento: conjunto formado por los elementos que pertenecen a un conjunto universal y no pertenecen a un subconjunto de U.
Cóncava hacia abajo: se dice que la función f es cóncava hacia abajo en un punto, cuando la recta tangente a la curva en el punto, se encuentra por encima de la gráfica de la función.
Cóncava hacia arriba: se dice que la función f es cóncava hacia arriba en un punto, cuando la recta tangente a la curva en el punto, se encuentra por debajo de la gráfica de la función.
Condición inicial: información adicional en el planeamiento de una integral.
Conjunción: proposición compuesta por la unión de dos proposiciones simples y el conectivo "y".
Conjunto: colección de objetos.
Consecutivo lógico: partícula de enlace entre dos proposiciones simples.
Cota: número que es mayor o menor que todos los elementos del conjunto.
Cuantificador: expresión que indica cantidad en una proposición.

D

Derivada de una función: llamamos derivada de una función en un punto x al valor $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ siempre y cuando este valor exista.
Diferencia de conjuntos: conjunto formado por los elementos que pertenecen a un conjunto y que no pertenecen a otro.
Disyunción: proposición compuesta formada por la unión de dos o más proposiciones compuestas y el conectivo "o".
Dominio: conjunto formado por las primeras componentes de las parejas ordenadas de una función.

E

Equivalencia o bicondicional: proposición compuesta por la unión de dos proposiciones simples y el conectivo "...si y sólo si...".
Extremos: valores máximos y mínimos de una función.

F

Función: regla de correspondencia o fórmula que asigna a cada valor de x del dominio un único valor en el rango.
Función afín: función lineal de la forma $y = ax + b$, donde a y b son constantes.
Función a trozos: función descrita por dos o más fórmulas, en intervalos distintos.
Función biyectiva: aquella que es inyectiva y sobreyectiva a la vez.
Función constante: aquella en la cual la variable dependiente toma siempre el mismo valor sin importar el valor que tome la variable independiente.
Función continua en a: aquella que cumple:

i. $f(a)$ existe
ii. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe
iii. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Función creciente: aquella en la cual al aumentar el valor de la variable independiente, aumenta el valor de la variable dependiente.
Función cuadrática: función de la forma $y = ax^2 + bx + c$ con a, b y c constantes y $a \neq 0$.
Función decreciente: aquella en la cual al aumentar el valor de la variable independiente, disminuye el valor de la variable dependiente.
Función discontinua: función que no es continua.
Función exponencial: función de la forma $y = b^x$, con x un número real, $b > 0$ y $b \neq 1$.
Función impar: función simétrica respecto al origen.
Función inyectiva: aquella en la cual se asignan imágenes distintas para elementos distintos del dominio.
Función logarítmica: función de la forma $y = \text{Log}_b\, x$ con $b > 0$ y $b \neq 1$.
Función par: función simétrica respecto al eje y.
Función parte entera: aquella función que define el mayor entero que es menor o igual que el número.
Función racional: función de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios $Q(x) \neq 0$.
Función radical: función que contienen raíces de cantidades variables.
Función segmentada: función descrita mediante dos o más fórmulas o intervalos distintos.
Función sobreyectiva: aquella cuyo codominio y rango son iguales.

I

Implicación: proposición compuesta por la unión de dos o más proposiciones simples y el conectivo "si... entonces".

Indeterminación: expresión no definida como $\frac{0}{0}$, $\infty - \infty$, 0^{∞}, ∞^{0}, etc.

Inecuación: desigualdad en la que intervienen una o más variables.

Integración numérica: método que proporciona una aproximación al valor del área bajo una función.

Integración por partes: método que se fundamenta en la regla de derivación del producto de dos funciones.

Integración por sustitución: método que se fundamenta en la regla de la cadena para derivar funciones compuestas.

Integral definida: área de la porción del plano limitada por la gráfica de una función y el eje x.

Integral indefinida: conjunto de todas las antiderivadas de una función f.

Intersección: conjunto formado por los elementos comunes de dos o más conjuntos.

Intervalo: subconjunto de los números reales.

L

Límite: valor al que se aproximan los valores de la variable dependiente de una función, cuando la variable independiente se aproxima a un valor determinado.

Límite de la integral: número mínimo y número máximo del intervalo $[a, b]$.

Límite en el infinito: valor al cual se aproxima la variable dependiente, cuando la variable independiente crece o decrece indefinidamente.

Límite exponencial: límite que se calcula en funciones exponenciales o cuyo resultado es una función exponencial.

Límite infinito: aquel que se presenta cuando la variable dependiente de la función crece o decrece indefinidamente.

Límite lateral: límite que indica los acercamientos de x a a por la izquierda o por la derecha.

Longitud de un arco de curva: distancia que recorre una partícula que se mueve a lo largo de una gráfica.

O

Optimización: proceso mediante el cual se determinan los valores máximos y mínimos de diversas situaciones matemáticas.

P

Pendiente de la recta secante: aquella que se calcula mediante la fórmula $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Pendiente de la recta tangente: límite de la pendiente de la recta secante cuando $\Delta x \to 0$.

Punto crítico: punto en el cual la función f cambia de comportamiento.

Punto de inflexión: punto en el cual la función cambia de concavidad.

R

Rango: conjunto de imágenes para los x que pertenecen al dominio de una función.

Regla de la cadena: la derivada de la función externa por la derivada de la función interna.

S

Sólido de revolución: sólido que se obtiene al hacer girar una región del plano alrededor de una recta en el mismo plano.

U

Unión: conjunto formado por los elementos que pertenecen a uno u otro conjunto.

V

Valor absoluto: número no negativo simbolizado por $|a|$.

Variación de una función: valor de $f(x_2) - f(x_1)$ en el intervalo I.

Variación instantánea: límite de la variación media cuando Δx tiende a cero.

Variación media: cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Velocidad instantánea: límite de la velocidad media cuando Δt tiende a cero.

Velocidad media: variación de posición con respecto al tiempo.

BIBLIOGRAFÍA

- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Decreto 1860 de 1994.*
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Estándares curriculares de matemáticas.* Bogotá, D. C., 2003.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Matemáticas. Lineamientos curriculares.* Bogotá, 1998.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Resolución número 2343 del 5 de junio de 1996.*
- AA. VV. *Currículo y aprendizaje.* Bogotá, Santillana, 1996.
- AA. VV. *Matemáticas 4 Eso opción A.* España, Editorial Santillana, 2008, pp. 69, 423.
- AA. VV. *Matemáticas I 1 Bachillerato.* España, Editorial Santillana, 2008, pp. 121, 191, 215, 245, 273.
- AA. VV. *Trabajemos la solución de problemas con Santillana.* Bogotá, Santillana, 1997.
- ABDÓN MONTENEGRO, IGNACIO. *Evaluemos competencias matemáticas.* Cooperativa Editorial Magisterio, 1999.
- ALVARENGA, B. y Máximo A. *Física general con experimentos sencillos.* México, Harla, S. A., 1983.
- ÁLVAREZ, FERNANDO. *Fractal 3, matemáticas.*
- APOSTOL, TOM M. *Calculus.* Editorial Reverté, 1998.
- AVERBUJ, EDUARDO; COHAN, ADRIANA; MARTÍNEZ, SILVIA. *Tecnología I.* Buenos Aires, Editorial Santillana S. A., 1998.
- BALDOR. *Geometría plana y del espacio y trigonometría.* México, Publicaciones cultural, 1998.
- BELL, E. T. *Historia de las matemáticas.* México, Fondo de Cultura Económica, 1995.
- BOL, BRIAN. *Matemáquinas, la matemática que hay en la tecnología.* Labor.
- BUECHE, F. *Fundamentos de física I.* Colombia, McGraw Hill Latinoamérica S. A., 1988.
- CARRUNCHO, JOSÉ RAMÓN; GIL, JOSÉ; VÁZQUEZ, CARMEN; RIVERA, MIGUEL. *Matemática.* Santillana, 1986.
- CARRUNCHO, JOSÉ RAMÓN; VÁZQUEZ, CARMEN. *Matemáticas comerciales y estadísticas.* Enciclopedia temática Santillana, 1992.
- CASTRO, ENCARNACIÓN; RICO, LUIS; CASTRO, ENRIQUE. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 2, Números y operaciones.* España, Editorial Síntesis, 1996.
- CENTENO PÉREZ, JULIA. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 5.* Números decimales. España, Editorial Síntesis, 1997.
- CLEMENS, ET ÁL. *Serie awli. Geometría.* México, Addison Wesley. Pearson Educación, 1998.
- COHAN, ADRIANA; DE KECHICHIAN, GRACIELA. *Tecnología II.* Buenos Aires, Ediciones Santillana S. A., 1999.
- DEL OLMO ROMERO, MARÍA ÁNGELES; MORENO CARRETERO, MARÍA FRANCISCA; GIL CUADRA, FRANCISCO. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 19. Superficie y volumen.* España, Editorial Síntesis, 1993.
- DÍAZ GODINO, JUAN; BATANERO BERNABEU, MARÍA DEL CARMEN; CAÑIZARES CASTELLANOS, MARÍA JESÚS. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 27. Azar y probabilidad.* España, Editorial Síntesis, 1996.
- DOLCIANI, MARY; BERMAN, SIMON; WOOTON, WILLIAM. *Álgebra moderna y trigonometría.* México, Publicaciones Cultural S. A., 1967.
- FARRAND, SCOUT M.; POXON, NANCY. *Cálculo.* Orlando, HBJ, 1998.
- FIOL MORA, MARÍA LUISA; FORTUNY AYMEMÍ, JOSEPH MARÍA. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 20. Proporcionalidad directa. La forma y el número.* España, Editorial Síntesis, 1990.
- GONZALES, JOSÉ LUIS IRIARTE, MARÍA: JIMENO, MANUELA; ORTIZ, ALFONSO; SANZ, ESTEBAN; VARGAS MACHUCA, INMACULADA. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 6. Números enteros.* España, Editorial Síntesis, 1990.
- GUILLÉN SOLER, GREGORIA. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 15. Poliedros.* España, Editorial Síntesis, 1997.
- HAEUSSLER JR., ERNEST F.; PAUL, RICHARD S. *Matemáticas para administración y economía.* México, Grupo Editorial Iberoamericano, 1992.
- HEWITT, PAUL, G. *Física conceptual.* Tercera edición. Pearson Educación, 1999.
- JONSON, ROBERT. *Estadística elemental.* México, Editorial Educativa, 1998.
- LARSON, RONALD; HOSTELLER. ROBERT. *Cálculo.* Bogotá, McGraw-Hill Latinoamericana, 1994.
- LEITHOLD, LOUIS. *El cálculo con geometría analítica.* México, Harla S. A. de C. V., 1973.
- LINDENMAYER, ASISTID. *Arreglos geométricos de la naturaleza.* Árbol pitagórico, Estados Unidos, 1989.
- MASON, J., BURTON, L., STACEY, K. *Pensar matemáticamente.* Madrid, MEC/Labor, 1992.
- MOISE, E. Y DOWNS, F. *Geometría moderna.* Estados Unidos, Addison Wesley Publishing Company, 1966.
- MORREY, CHARLES B.; PLOTTER, MURRAY H. *Calculus with analytic geometry.* Estados Unidos, Fondo Educativo Interamericano, 1970.
- PAPPAS, THEONI. *La magia de las matemáticas. El orden oculto tras la naturaleza y el arte*, Estados Unidos, 1994.
- POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas.* México, Trillas, 1989.
- PURCEL, VARBERG. *Cálculo con geometría analítica.* México, Prentice Hall Hispanoamérica, 1993.
- SÁNCHEZ, DAVID; CERESO, JOSÉ. *Proyectos tecnología.* Madrid, Grupo Santillana de Ediciones, S. A.
- SESTIER, ANDRÉS. *Historia de las matemáticas.* México, Limusa, 1983.
- STEPHEN, F. M. *Historia de la ciencia.* Madrid, Alianza Editorial, 2000.
- STEWART, JAMES. *Cálculo.* México, Grupo Editorial Iberoamericano, 1994.
- SWOKOWSKY, EARL W. *Introducción al cálculo con geometría analítica.* México, Grupo Editorial Iberoamérica, 1994.
- TIPLER, PAUL A. *Física.* España, Editorial Reverté, S. A., 1995.
- VÁSQUEZ, C. *Geometría plana y del espacio.* Madrid, Biblioteca Santillana de consulta, 1998.